



HYDRAULIK

VON

PHILIPP FORCHHEIMER

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914

VORWORT.

Das vorliegende Buch entspringt sowohl dem eigenen Bedürfnisse nach dem Besitz einer eingehenden Zusammenfassung der heutigen Hydraulik in dem Umfange, in dem sie für den Bauingenieur von Belang ist, als auch der Einwirkung vieler Fachgenossen, welche ebenfalls den Mangel an einer solchen empfanden.

Die Abfassung wurde mir dadurch erleichtert, daß ich einen Bericht über das gleiche Gebiet in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften verfaßt hatte, der mir als zweckmäßige Vorarbeit dienen konnte. Während die neuere französische Literatur in der Hydraulik *Flamants* ein Handbuch besitzt, welches wenigstens die französischen hydraulischen Forschungen erschöpfend behandelt, während die italienische die wohlgelungene Idraulica *Masonis* aufweist, fehlte bisher ein entsprechendes Werk in deutscher Sprache; denn die vorhandenen Bearbeitungen der neueren Zeit tragen mehr den Charakter des Lehrbuches und sind überdies der Mehrzahl nach vom Standpunkte des Maschineningenieurs aus verfaßt, wie z. B. die bekannte schöne technische Hydromechanik von *H. Lorenz*, welche insofern hier als vorbildlich gelten kann, als in ihr die Technik als ein Zweig der Physik betrachtet wird. Meine „Hydraulik" soll nämlich in ähnlichem Sinne, aber eingehender einerseits die Ergebnisse der mathematischen und physikalischen Forschung, soweit sie sich fruchtbringend gezeigt hat, oder fruchtbringend zu werden verspricht, der technischen Fachwelt in verständlicher Form übermitteln, andererseits jene Versuchsangaben und Koeffizienten sichten und sammeln, welche erst die Verpflanzung der Theorie auf das Feld baulicher Tätigkeit ermöglichen.

Zur Erhöhung der Brauchbarkeit mußte ich denn auch eine größere Zahl von Tabellen beifügen, von denen einige hier zum ersten Mal erscheinen.

Bei der Anordnung des Stoffes folgte ich fast von selbst der geschichtlichen Entwicklung; denn diese ist so gesetzmäßig vor sich gegangen, daß die chronologische Aneinanderreihung von der logischen Einteilung mir nirgends abzuweichen schien. Hiermit sei angedeutet, daß ich, wenn tunlich, auf die ursprünglichen Quellen zurückzugehen trachtete und deren Anführung Aufmerksamkeit schenkte. *Rühlmanns* Hydromechanik diente mir hierbei als ein bezüglich Vollständigkeit und Zuverlässigkeit kaum zu erreichendes Muster. Ich hoffe, daß diese Literaturnachweise nicht nur dem Forscher lieb sein werden, sondern auch dem im Berufsleben stehenden Ingenieur, weil er an Hand von Quellenangaben die Möglichkeit hat, sich wenn nötig vergleichsweise rasch in ein ihm neues Sondergebiet zu vertiefen.

Bei der eingehenden Behandlung drängten sich viele Fragen auf, deren Beantwortung wünschenswert erschien. Ich war bemüht zu ihrer Lösung beizutragen, auch wohl andere hierzu zu veranlassen. Hieraus und aus freundlichen Mitteilungen von Fachgenossen floß mir vielfach bisher unveröffentlichter Stoff zu, den ich als solchen im Buche gekennzeichnet habe. Dabei gab ich meine eigenen Beiträge als „bisher unveröffentlicht“ zumeist ohne Nennung des Autors an, während ich bei anderen Verfassern selbstverständlicherweise ihren Namen anführte.

Die Rechnungen hoffe ich genügend eingehend wiedergegeben zu haben, so daß man sie bei einiger Gewandtheit ohne Stocken verfolgen kann. Soweit sie aus mathematischen Werken und Aufsätzen stammen, mußte ich sie zu diesem Zwecke vielfach ausführlicher ausarbeiten als in der Quelle. Ich trachtete aber möglichst einfache Methoden zu wählen und den Text möglichst knapp an Worten zu gestalten. Mit Rücksicht auf das Raumerfordernis habe ich ferner die Figuren nicht mit Nummern versehen und ihnen gewöhnlich keine Bezeichnung beigefügt.

Mehr und mehr wird heute im Wasserbau nach theoretischen Gesetzen gegriffen. Die Zeit ist angebrochen, in der auf allen Teilen dieses Gebietes wissenschaftliche Forschung und bauliche Gestaltung voneinander Nutzen ziehen. Möge dieses Buch dazu beitragen, den innigen Verband beider zu fördern.

Graz, im November 1913.

Philipp Forchheimer.

Liste der wichtigeren bisher unveröffentlichten Beiträge:

Liste einiger eigener bisher unveröffentlichter Mitteilungen:

Erklärung der Abkürzungen.

Es bedeutet:

Allg. Bauz.	Allgemeine Bauzeitung, Wien.
Am. Soc. Civ. Eng. Trans.	Transactions of the American Society of Civil-Engineers, New York.
Ann. chim. phys.	Annales de chimie et de physique, Paris.
Ann. d. ponts et chauss.	Annales des ponts et chaussées, Paris.
Ann. Phys. Chem.	Annalen der Physik und Chemie, Leipzig; heute: Annalen der Physik.
Journ. de math.	Journal de mathématiques pures et appliquèes, Paris.
Journ. f. Gasb. u. Wass.	Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, München.
London, Math. Soc. Proc.	Proceedings of the London Mathematical Society.
London, Phil. Trans.	Philosophical Transactions of the Royal Society of London.
London, Proc. Roy. Soc.	Proceedings of the Royal Society of London.
Öst. Woch. f. d. öff. Baud.	Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst, Wien.
Paris, C. R.	Comptes rendus des séances de l'académie des sciences.
Paris, Mém. prés. par div. sav.	Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'Institut de France.
Phil. Mag.	The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science, London.
Schweiz. Bauz.	Schweizerische Bauzeitung, Zürich.
Torino, Memorie	Memorie della r. accademia delle scienze di Torino.
Wien, Ber.	Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften, Abt. IIa.
Zeitsch. Math. Phys.	Zeitschrift f. Mathematik und Physik, Leipzig.
Z. d. öst. I. u. A.V.	Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereines, Wien.
Z. f. Bauw.	Zeitschrift für Bauwesen, Berlin.
Z. d. V. deutsch. Ing.	Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin.

Die erste (eingeklammerte) Zahl bedeutet die Reihe, die zweite den Band der Reihe, die dritte (wieder eingeklammerte) das Jahr, deren Exponent gegebenenfalls den Jahresabschnitt.

Es bedeutet ferner:

Eaux courantes	*J. V. Boussinesq,* Essai sur la théorie des eaux courantes, Paris, Mém. prés. par div. sav. 23 (1877) avec supplément ibid. 24 (1877).
Théorie 1, 2	*J. V. Boussinesq,* Théorie de l'écoulement tourbillonant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section, 2 mémoires, Paris 1897.
Recherches hydrauliques	*H. Bazin,* Recherches hydrauliques sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts et sur la propagation des ondes, Paris, Mém. prés. par div. sav. 19 (1865).
Weisbach-Herrmann	*J. Weisbach,* Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, 5. Aufl. bearbeitet von *G. Herrmann,* 1. Teil, Theoretische Mechanik, Braunschweig 1875.

Die Titel der Lehrbücher nachgenannter Verfasser sind auf folgenden Seiten angegeben: *d'Aubuisson de Voisins* S. 37, *Bovey* S. 254, *Bresse* S. 141, *Budau* S. 8, *Eytelwein* S. 63, *Flamant* S. 492, *Gibson* S. 44, *Grashof* S. 234, *Lorenz* S. 341, *Masoni* S. 255, *Meißner-Hederich* S. 47, 63, *Merriman* S. 4, *Prášil* S. 16, *Rühlmann* S. 287, *Tolkmitt-Bubendey* S. 196, *Weisbach* S. 9. Eine Formelsammlung veröffentlichte *R. Weyrauch,* siehe S. 45. Als Übungsbuch sei besonders genannt: *F. Wittenbauer,* Aufgaben aus der technischen Mechanik, 3. Flüssigkeiten und Gase, Berlin 1911.

INHALTSVERZEICHNIS.

VI. Stationäre Strömung.

VII. Mit der Zeit veränderliche Strömung.

VIII. Das Strömen in Röhren und Wasserläufen bei unstetiger Wandung.

IX. Der Ausfluß durch Öffnungen.

X. Der Überfall.

XI. Füllung und Entleerung von Wasserbecken und Gefäßen.

XII. Schwingungen.

XIII. Wellenbewegung.

XIV. Der Wasserstoß.

XV. Grundwasserbewegung.

Bemerkung. Im ganzen Buche, Bazins Formel (45) ausgenommen, bedeutet γ das Eigengewicht der Flüssigkeit.

1. Gegenstand der Hydraulik. Definition der Flüssigkeit. Der Name Hydraulik bedeutet zwar als Zusammensetzung von *ὕδωρ* = Wasser und *αὐλός* = Röhre strenggenommen nur die Lehre von der Leitung des Wassers, wird aber heute für die gesamte auf Erfahrung oder Versuche gegründete Wissenschaft der Druckäußerung des ruhenden und des Verhaltens bewegter Flüssigkeiten gebraucht. Mit den ruhenden Flüssigkeiten befaßt sich speziell die *Hydrostatik*. Dabei kann das Wort Flüssigkeit als Bezeichnung jener Stoffe definiert werden, bei welchen, wenn sie sich im ruhenden Zustande befinden, durchweg die auf irgendein Teilchen wirkenden Außenkräfte rechtwinklig zur Umgrenzungsfläche des Teilchens gerichtet sind. Die Unmöglichkeit des Auftretens von Scherkräften, wenn keine Bewegung stattfindet, bildet hiernach das wesentliche Merkmal der Flüssigkeit gegenüber dem festen Körper. Andererseits müssen die geringfügigsten Scherkräfte bei den Flüssigkeiten eine Bewegung erzeugen, die aber so langsam sein kann, daß sich die Entscheidung, ob ein Körper als fest oder flüssig zu bezeichnen ist, unter Umständen als unmöglich erweist[1]). Die Flüssigkeiten werden dann vielfach noch in tropfbare Flüssigkeiten und Gase eingeteilt, wobei das Maß der Zusammendrückbarkeit das Kennzeichen bildet. Im Nachfolgenden soll unter einer Flüssigkeit stets eine tropfbare verstanden werden. Eine solche hat die Eigenschaft, ihr Volumen unter der Einwirkung äußerer Kräfte nur unwesentlich zu verändern. In den *bewegten* Flüssigkeiten stehen, wie schon angedeutet, nicht mehr sämtliche Außenkräfte senkrecht zu den Umgrenzungsflächen; man bezeichnet daher die Flüssigkeiten der Natur vielfach als „zähe“ oder „klebrig“. Zum Unterschiede von der Hydraulik, welche, wenn sie die Zähigkeit nicht berücksichtigt, sie nur als im Einzelfalle vernachlässigbar betrachtet, befaßt sich die Hydrodynamik im engeren Sinne nur mit „vollkommenen“ Flüssigkeiten, d. h. sie nimmt grundsätzlich an, daß es auch in bewegten Flüssigkeiten keine Scherkräfte gebe, also alle Bewegungen reibungslos erfolgen. Frei-

---

1) *O. Lehmann* (Die scheinbar lebenden Kristalle, Eßlingen 1907, S. 68) glaubt sogar Kristalle beobachtet zu haben, welche in einer Richtung eine Schub-Elastizitätsgrenze besitzen, als wären sie fest, und senkrecht dazu nicht, als wären sie flüssig.

lich wurde diese strenge Scheidung schon frühzeitig verlassen, um der mehr äußerlichen Platz zu machen, nach welcher die Hydraulik mehr die Förderung der praktischen Anwendbarkeit, die Hydrodynamik mehr die naturwissenschaftlich-mathematische Forschung zum Ziele hat. Die Tatsache, daß in ruhenden Flüssigkeiten jede Außenkraft die Oberfläche des betreffenden Teilchens senkrecht trifft, hat, wenn man die Masse als zusammenhängend und gleichförmig betrachtet, wie in der Mechanik fester Körper gezeigt wird, zur Folge, daß die auf die Flächeneinheit der Oberfläche eines unendlich kleinen z. B. kugelförmigen Teilchens wirkenden Außendruckkräfte gleich groß sein müssen. (Die Kugel wird also von allen Seiten gleich stark gedrückt.) Ist das Teilchen nicht mehr unendlich klein, so trifft dies aber nicht mehr zu, indem dann die mit der dritten Potenz der Länge wachsenden Massenkräfte (z. B. das Gewicht des Teilchens) nicht mehr gegenüber den nur mit der zweiten Potenz wachsenden Oberflächendrücken vernachlässigt werden dürfen. Die Gleichförmigkeit im kleinsten Bezirk ist übrigens nur eine bildliche Vorstellung, denn in Wirklichkeit besteht die Masse aus Molekülen, die durch ihre Stöße (unter dem Mikroskop noch sichtbare) Schwebeteilchen in die nach ihrem Entdecker benannte *Braun*sche Wimmelbewegung versetzen.

I. Hydrostatik.

2. Prinzip des Archimedes. Hydrostatisches Paradoxon. Pascalscher Satz. Die Hydrostatik nahm ihren Anfang mit *Archimedes*, der seiner auf uns herabgelangten Schrift über schwimmende Körper[1]) den Grundsatz voranstellte, daß in einer Flüssigkeit der stärker gedrückte Teil den weniger gedrückten in die Höhe treibe und daß jeder Teil von der senkrecht über ihm befindlichen Flüssigkeit gedrückt werde. *Simon Stevin*[2]) erweiterte den Archimedischen Satz zum sogenannten hydrostatischen Paradoxon, nämlich dahin, daß der Druck auf eine wagrechte Bodenfläche dem Gewicht einer auf ihr lastend gedachten lotrechten Flüssigkeitssäule auch dann gleiche, wenn tatsächlich nur eine geneigte oder gewundene Säule vorhanden sei. Auch gab er bereits an, daß der Druck auf eine geneigte Wandfläche ebenfalls der Tiefenlage unter dem Wasserspiegel entspreche. Daß der Druck durchweg rechtwinklig zur Wand sei, nahm er, wie es scheint, als selbstverständlich an.

---

1) Die Schrift hat sich in lateinischen Übersetzungen vollständig unter dem Namen „De iis quae in humido vehuntur“ und ähnlichen Überschriften erhalten, der Anfang mit dem vorangestellten Grundsatz auch griechisch. *J. L. Heiberg*, Archimedis opera omnia, vol. 2, Lipsiae 1881 in der Bibliotheca Teubneriana.

2) *S. Stevin*, de Beghinselen des Waterwichts, Leyden 1586; französische Übersetzung in *S. Stevin*, Œuvres mathématiques, Leyden 1634.

Pascal[1]) fügte dann hinzu, daß ein an der Oberfläche einer Flüssigkeit ausgeübter Druck sich gleichmäßig nach allen anderen Punkten der Flüssigkeit verbreite, wenn diese nicht ausweichen kann. Nach diesen Lehren beträgt der Normaldruck auf ein in der Tiefe z unter dem Spiegel befindliches Flächenelement dF, wenn die Flüssigkeit das Eigengewicht γ besitzt, das heißt ihre Raumeinheit γ wiegt, und wenn der Spiegel unter einem Druck p_0 steht, der z. B. durch ein Gas oder eine Schicht einer anderen Flüssigkeit hervorgerufen werden kann,

$$p\,dF = p_0\,dF + \gamma z\,dF. \tag{1}$$

Die Auffassung wird vereinfacht, wenn man den von der eigentlichen Flüssigkeit (z. B. dem Wasser) herrührenden Druck und den von dem überlagernden Stoff (z. B. der Luft) erzeugten gesondert betrachtet und unter p nur ersteren versteht, denn dann geht (1) in die noch einfachere Gleichung

$$p\,dF = \gamma z\,dF \tag{1a}$$

über.

3. Eigengewichte, Luftdruck. Das Eigengewicht von destilliertem Wasser ist bei 4° Celsius am größten und das Gewicht eines cm^3 solchen Wassers liegt unter der Benennung 1 g unserem Gewichtssystem zugrunde. Das Eigengewicht von Quecksilber beträgt 13,59 g cm^{-3} bei 0° C. Der Luftdruck ist an der Meeresoberfläche durchschnittlich so groß, daß er im Quecksilberbarometer einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe und 0° C das Gleichgewicht hält. Hiernach ergeben sich nachstehende Umrechnungstabellen:

Wassersäule von 4° C		Atmosphären		Quecksilbersäule von 0° C
m	cm	neue = kg/cm^2	alte	cm
1	100	0,1	0,0967	7,355
0,01	1	0,001	0,000967	0,0736
10,0	1000	1	0,967	73,55
10,333	1033,3	1,0333	1	76,0
0,1359	13,6	0,0136	0,0131	1

Das Eigengewicht[2]) des Wassers ändert sich mit der Temperatur wie folgt in g cm^{-3}:

−10°	0°	10°	20°	30°	40°	50°
0,99815	0,99987	0,99973	0,99823	0,99567	0,99224	0,98807

60°	70°	80°	90°	100°	150°	200°
0,9833	0,9778	0,9718	0,9653	0,9584	0,9173	0,8628

1) *B. Pascal*, Traité de l'équilibre des liqueurs, Paris 1663; Œuvres de *Pascal* 4, Paris 1819.

2) *F. Auerbach* im Handb. d. Physik, 2. Aufl. 1, Leipzig 1908, S. 171.

Das Eigengewicht des Eises beträgt in $g\,cm^{-3}$ bei:

0°	− 10°	− 20°
0,9167	0,9186	0,9203

Über das Eigengewicht natürlicher Wässer sind trotz zahlreicher chemischer Analysen nur spärliche Angaben aufzufinden. *G. Torricelli*[1]) behauptet, daß große Hochwässer meistens 0,07 Raumteile Schwebestoffe führen und dann 1020 $kg\,m^{-3}$ wiegen, falls es sich um Lehm u. dgl. handelt. Andererseits hätten Versuche gezeigt, daß trübes Wasser in Weihern häufig ein Gewicht von 1015 bis 1200 $kg\,m^{-3}$ habe. Auf viel geringere Zahlen führen die unten in § 187 enthaltenen Daten über Schlammförderung in Flüssen. Dementsprechend gibt *M. Merriman*[2]) an, daß das von den gelösten und den schwebenden Stoffen, sowie von der Temperatur abhängige Eigengewicht des Flußwassers gewöhnlich zwischen 997 und 1001 $kg\,m^{-3}$ liege und im Mittel zu 1000 zu schätzen sei. Bei Mineralwässern habe man schon 1004 gefunden. Das Eigengewicht der Abwässer amerikanischer Städte steige von 1000 bis 1004, das der europäischen Abwässer, weil sie weniger verdünnt sind, etwas höher.

Das Salzgehalt des Meerwassers[3]) beträgt an der Oberfläche in Promille durchschnittlich

im Atlant. Ozean	im Indischen Ozean	im Stillen Ozean	in der Ostsee	im Mittelmeer	im Roten Meer
35,4	34,8	34,9	7,8	34,9	38,8

und nimmt gegen die Pole hin ab. Das Eigengewicht nimmt für jedes Tausendstel Salzgehalt um ungefähr 0,0008 $g\,cm^{-3}$ zu, so daß es bei 0° C und 35 Promille Salzgehalt 1028 $kg\,m^{-3}$ beträgt. Der Gefrierpunkt solchen Meerwassers liegt bei — 1,9° C, doch sind Unterkühlungen häufig.

Zusammendrückung vergrößert das Gewicht; doch ist der Elastizitätsmodul des Wassers sehr hoch, nämlich 20700 $kg\,cm^{-2}$, so daß selbst in 100 m Tiefe das Eigengewicht von z. B. 1,0 nur auf 1,0005 $g\,cm^{-3}$ wachsen würde.

Die Beschleunigung der Schwere (Fallbeschleunigung) beträgt in Meereshöhe am Pole 9,832, am Äquator 9,781 $m\,sec^{-2}$ und wird für je 100 m Höhe um 0,0003 $m\,sec^{-2}$ kleiner. Sie wird im ganzen Buche in üblicher Weise mit g bezeichnet und zu 9,81 $m\,sec^{-2}$ angenommen.

4. Druck auf ebene Flächen. Aus (1a) folgt, daß der Wasserdruck auf eine ebene Fläche F durch das über die ganze Fläche erstreckte Integral

$$\int p\,dF = \gamma \int z\,dF \tag{2}$$

dargestellt wird. Hat die Ebene der Figur F eine Neigung ν, und wer-

---

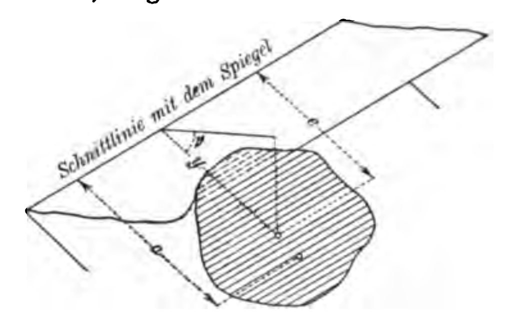
1) Giornale del genio civile (4) 5 (1885), S. 611. Halbflüssiger Schlamm einer Grazer Basaltschotterstraße wog 1840 $kg\,m^{-3}$.

2) Treatise on hydraulics, 8. Aufl., New-York 1909, S. 8, 19.

3) Näheres in *O. Krümmel*, Handbuch der Ozeanographie 1, Stuttgart 1907, S. 241, 333, 499.

den mit y die Entfernungen von der Geraden bezeichnet, in welcher die Figurebene den Wasserspiegel schneidet, so gilt

$$z = y \sin \nu$$



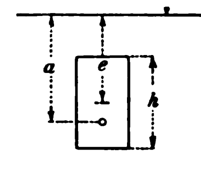
und daher, wenn man mit e das y des Schwerpunktes der Figur F bezeichnet

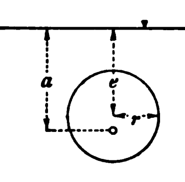
$$(3)\quad \int p\,dF = \gamma \sin \nu \int y\,dF = \gamma e F \sin \nu,$$

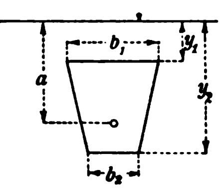
worin $e \sin \nu$ die Tiefenlage des Schwerpunktes darstellt. Hiernach ist der Wasserdruck auf eine ebene Fläche gleich dem Produkte aus *Eigengewicht, Flächengröße* und *Tiefenlage* des *Flächenschwerpunktes.* Der resultierende Wasserdruck greift aber nicht etwa im Schwerpunkte an. Man erhält nach den Regeln der Statik den Abstand a des Angriffspunktes von der Spiegelschnittgeraden, indem man die Summe der statischen Momente der Einzeldrucke durch die Drucksumme dividiert. Es ist hiernach

$$(4)\qquad a = \int \gamma y z\,dF : \int \gamma z\,dF = \int y^2\,dF : \int y\,dF.$$

Aus (4) folgt bei der Bezeichnungsweise der Abbildungen für ein Rechteck, einen Kreis und ein Trapez

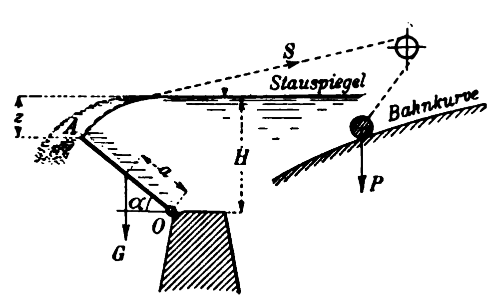






$$a = e\left(1 + \frac{1}{12}\frac{h^2}{e^2}\right); \quad a = e\left(1 + \frac{1}{4}\frac{r^2}{e^2}\right); \quad a = \frac{(b_1+b_2)(y_1+y_2)^2 + 2b_1y_1^2 + 2b_2y_2^2}{2[y_2(b_1+2b_2)+y_1(2b_1+b_2)]}.$$

Beispiele: 1. Für Talsperren oder dort, wo bei höheren Wasserständen ein Rückstau zum Oberlieger zu befürchten ist, sind den Stauspiegel selbsttätig auf konstante Höhe haltende Stauklappen, über die das Wasser überfällt, von Vorteil. Eine derartige Anlage kann, wie nebenstehend skizziert, in der Weise ausgeführt werden, daß die um eine feste Achse O drehbare Stauklappe mit Hilfe eines auf bestimmter Bahnkurve laufenden Gegengewichtes P im Gleichgewichte gehalten wird und ein in A an der Stauklappe befestigter Seilzug die



von der jeweiligen Bahnneigung abhängige Gewichtskomponente S überträgt. Das geforderte Gleichgewicht herrscht, wenn [1])

$$S \cdot H = G a \cos \alpha + M b$$

ist, worin G das Gewicht der Klappe, M das Moment des Wasserdruckes um O pro m Klappenbreite und b die Breite der Stauklappe bedeutet. Nach Gl. (3) und (4) ist

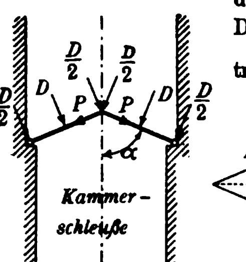
$$M = \int_{H}^{H - H \sin \alpha} z \frac{dz}{\sin \alpha} \frac{H - z}{\sin \alpha} = \frac{H^3}{6} (3 - 2 \sin \alpha)$$

und daher

$$S = \frac{1}{H} \left[G a \cos \alpha + \frac{b H^3}{6} (3 - 2 \sin \alpha) \right].$$

Dieser Bedingung kann durch eine entsprechend geformte Bahn für das Gegengewicht P genügt werden.

2. Die Stemmtore bei Kammerschleußen werden zum Zwecke eines selbsttätigen Abschlusses unter einem Winkel α zur Schleußenachse geneigt. Es ist das günstigste α zu ermitteln. Ist H die Wassertiefe am Drempel, so rufen die in der Kammerachse am Flügelende übertragenen Wasserdrücke $\frac{D}{2} = \gamma \frac{b}{4 \sin \alpha} \frac{H^2}{2}$ eine Knickkraft



$$P = \frac{D}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\gamma b H^2}{8 \cos \alpha}$$

im Torflügel hervor. Dessen Beanspruchung wird sonach durch eine gleichmäßige Belastung $p = \gamma \frac{H^2}{2}$ und durch die Knicklast erzeugt und beträgt, wenn F den Trägerquerschnitt und M das maximale Biegungsmoment und W das Widerstandsmoment bedeutet,

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{\gamma b H^2}{8 F \cos \alpha} + \frac{\gamma b^2 H^2}{64 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{1}{W},$$

woraus sich für ein gegebenes H, b und ein angenommenes F und W ein Minimum für die Beanspruchung σ bei einem Winkel α ergibt, der aus der Gleichung

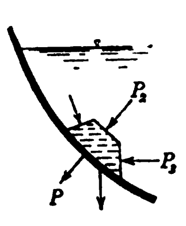
$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0 = \frac{\gamma b H^2}{8 F} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\gamma b^2 H^2}{32 W} \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha}$$

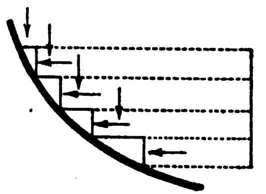
bestimmt werden kann.

5. Druck auf gekrümmte Flächen. Eine unter Wasser befindliche Fläche F kann durch weitere Flächen F_1, F_2, ... zu einem Körper ergänzt werden. Der Wasserdruck auf F muß dann nach den allgemeinen Regeln der Statik die Resultierende aus dem Körpergewichte und den auf F_1, F_2, ... wirkenden Wasserdrucken sein. Ist der Körper klein genug, so kann man sein Gewicht vernachlässigen und den Wasserdruck auf F einfach als Mittelkraft der Drucke auf F_1, F_2, ... betrachten. Daraus geht hervor, daß man sich jede Fläche durch unendlich viele

1) *F. Schaffernak*, bisher unveröffentlicht.

kleine Staffeln (übrigens auch durch Vielkante) ersetzt denken kann. Bestehen nun die Staffeln aus drei Scharen aufeinander senkrechter Ebenen und zwar einer wagrechten und zwei lotrechten, so kann man die lotrechten Staffelflächen senkrecht zu sich selbst (also wagrecht in der Richtung ihres Wasserdruckes) verschieben, ohne den Wasserdruck in bezug auf Größe und Lage zu ändern. Man kann also die wagrechte Teilkraft des auf eine beliebige Wandung wirkenden Wasserdruckes finden, indem man letzteren auf zwei zueinander senkrechte Ebenen projiziert und die Wasserdrücke auf die Projektionen aufsucht und vereinigt. Die lotrechte Teilkraft des Wasserdruckes stimmt dem Archimedischen Gesetze gemäß mit dem Gewichte des lotrechten Zylindertrumes überein, das unten von der gegebenen Wandfläche, oben vom Spiegel begrenzt wird.





Beispiel[1]): Für besondere Zwecke, wie z. B. für Abschlüsse von Floßgassen oder Turbinenkammern, eignen sich zylindrische Segmentwehre, welche in die Sohle versenkt oder über den Wasserspiegel gehoben werden können. Legt man wie in nebenstehender Skizze die Drehachse des Verschlusses in die Zylinderachse, so schneidet die Resultierende des Wasserdruckes sie, wenn

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H} = \frac{\gamma h^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{\gamma \frac{h^2}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} = 0{,}429,$$

somit $\alpha = 23^\circ 13' 10''$ ist; in diesem Falle beträgt die Resultierende

$$\frac{H}{\cos \alpha} = 1{,}08\, \gamma \frac{h^2}{2}$$

und ist bei Aufrichten des Wehres nur das Moment des Eigengewichtes und das der Zapfenreibung zu überwinden. Wird die Drehachse in die Entfernung e von der Resultierenden verlegt, so tritt ein positives oder negatives Zusatzmoment



$$1{,}08\, \gamma \cdot \frac{h^2}{2} e = \gamma \frac{h^2}{2} \left[z - \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right) x \right] = \gamma \frac{h^2}{2} (z + 0{,}429\, x)$$

hinzu. Derartige Verschiebungen der Achse empfehlen sich, wo aus konstruktiven Gründen eine Vermehrung oder Verminderung des Hubmomentes nötig oder wo eine bestimmte Lage, z. B. über Hochwasser, der Drehachse vorgeschrieben ist.

6. Spiegelverlauf. Die bisher entwickelten Beziehungen betreffen nur Flüssigkeiten, die sich in vollkommener Ruhe unter Einwirkung paralleler Schwerkräfte befinden. Schon *Archimedes* ging einen Schritt weiter, indem er auf die Kugelgestalt der Erde Rücksicht nahm und die

1) *F. Schaffernak,* bisher unveröffentlicht.

Spiegel als Kugelflächen bezeichnete. Allgemein betrachtet ist der Spiegel unter einem gleichförmig drückenden Gas eine Fläche gleichen Druckes. Es darf sich also der Druck p (der vermöge der Grundeigenschaft ruhender Flüssigkeiten auf allen Seiten gleich groß ist) längs eines Spiegels nicht ändern. Da nun der Druck in der Richtung der Massenkräfte zunimmt, ändert er sich senkrecht zu deren Richtung nicht und folgt, daß jede Spiegelfläche senkrecht zu den Massenkräften verläuft[1]). Das gilt auch noch bei Einführung von Zusatzkräften für bewegte Flüssigkeiten. Es lautet dann die Gleichung der Spiegelfläche

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z}, \tag{5}$$

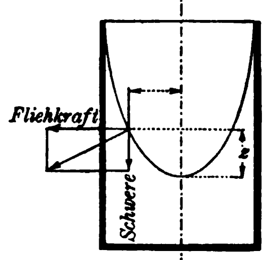
wobei X und Z die Komponenten der Resultierenden aus den Massenkräften und Zusatzkräften im Sinne des d'Alembertschen Prinzipes darstellen.

Beispiele: 1. Wird ein mit Wasser gefüllter Trog, wie es bei Schiffshebewerken geschieht, mit einer Beschleunigung $v' = \frac{dv}{dt}$ auf einer unter dem Winkel α geneigten Ebene bewegt[2]), so ergibt sich die Neigung β des Spiegels (als Mittellage der auftretenden Schwingungen), weil $X = -v' \cos\alpha$, $Z = -g - v' \sin\alpha$ und nach Gl. (5)

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{v' \cos\alpha}{g + v' \sin\alpha} \text{ ist, mit}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tang} \frac{v' \cos\alpha}{g + v' \sin\alpha}.$$

2. Dreht sich eine Flüssigkeit mit ihrem Gefäße um eine lotrechte Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω, so wirkt auf jedes unmittelbar unter dem Spiegel liegende Teilchen die Schwere G und die Fliehkraft $\frac{G}{g}\omega^2 x$. Es folgt also nach Gl. (5)



$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{G\omega^2 x}{g}}{G} = \frac{\omega^2 x}{g},$$

oder, wie die Integration zeigt, wenn man für $x = 0$, also für den Punkt in der Achse $z = 0$ sein läßt,

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g},$$

wonach der Spiegel einer in Umlauf gesetzten Flüssigkeit, sobald infolge der Klebrigkeit alle Flüssigkeitsteilchen gleiche Winkelgeschwindigkeit erlangt haben, sich als Mantelfläche eines Umdrehungsparaboloides einstellt[3]).

---

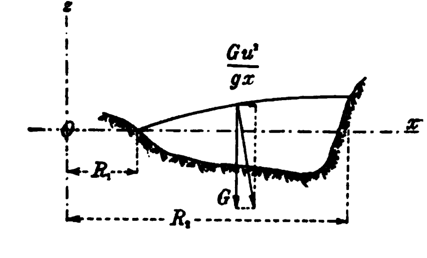
1) Dies war *d'Alembert* bekannt: Essai de la résistance des fluides, Paris 1752. Die ersten Spuren dieses Ergebnisses finden sich in *Huygens*, dissertatio de causa gravitatis, opera reliqua 2, Amsterdam 1728.

2) Vgl. *A. Budau*, Kurzgefaßtes Lehrbuch der Hydraulik, Wien u. Leipzig 1913, S. 52.

3) Die Flächen gleichen Druckes sind mit dieser Oberfläche kongruent. *D. Bernoulli*, Hydrodynamica, Straßburg, S. 246.

3. Denkt man sich das Gefäß stillstehend, die Flüssigkeit jedoch mit einer für alle Teilchen gleichen Geschwindigkeit u bewegt, so hat man den praktisch wichtigen Fall der Wasserbewegung in einer Flußkrümmung[1]). Nach Gl. (5) ist

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z} = \frac{\frac{G}{g}\frac{u^2}{x}}{G}, \quad g\,dz = u^2\frac{dx}{x},$$



also $gz = u^2 \log\text{nat}\, x + \text{konst}$. Für $x = R_1$ und $z = 0$ ist zugleich

$$0 = u^2 \log\text{nat}\, R_1 + \text{konst}.$$

Also folgt

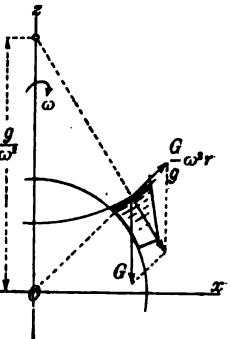
$$z = \frac{u^2}{g}\log\text{nat}\frac{x}{R_1}$$

und somit die Überhöhung h in einer Flußkrümmung (in Briggschen Logarithmen angeschrieben) mit:

$$h = 2{,}30\,\frac{u^2}{g}\,(\log R_2 - \log R_1).$$

4. Findet die Drehung der Flüssigkeit um eine wagrechte Achse statt, wie dies beispielsweise bei Wasserrädern der Fall ist, so hat man nach Gl. (5) die Integration von

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z} = \frac{-\frac{G}{g}\,\omega^2 r\cos\alpha}{-G + \frac{G}{g}\,\omega^2 r \sin\alpha},$$



oder, da $z = r\sin\alpha$, $x = r\cos\alpha$ ist, von $\frac{dz}{dx} = \frac{-\omega^2 x}{-g + \omega^2 z}$ durchzuführen. Es folgt sonach

$$x^2 + \left(z - \frac{g}{\omega^2}\right)^2 = \text{konst.},$$

oder, daß die Spiegel in den einzelnen Zellen des Rades Kreiszylinderflächen bilden, deren gemeinschaftliche Achse im Abstande $\frac{g}{\omega^2}$ parallel zur Radachse liegt[2]).

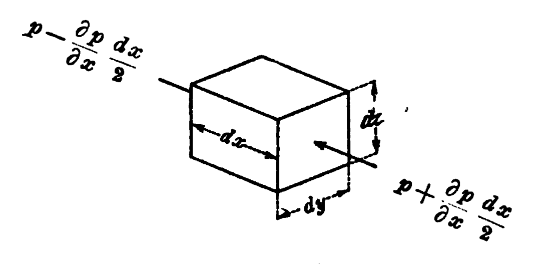
II. Die grundlegenden Beziehungen der Hydraulik.

7. Eulersche Gleichungen. Für das Verhalten vollkommener Flüssigkeiten stellte *L. Euler* Gleichungen auf, welche man auch auf reibende Flüssigkeiten anwenden kann, sofern man bei letzteren im besonderen Falle die Reibung vernachlässigen darf, und welche übrigens durch Hinzufügung weiterer Glieder zu Ausdrücken werden, die für reibende Flüssigkeiten zutreffen. Es werde ein parallelepipedisches Teilchen $dx\,dy\,dz$ be-

1) *F. Grashof,* Maschinenlehre 1, Hydraulik, Leipzig, S. 755. Für den Rhein unterhalb Köln zeigte sich die Formel nach *R. Jasmund*, Handb. d. Ingenieurwissenschaften, 3. Wasserbau, 1. Bd., 4. Aufl., S. 239 im allgemeinen verwendbar.

2) *J. Weisbach,* Lehrbuch d. Ing.- u. Masch.-Mechanik, 1. Teil Braunschweig 1845, S. 339, 2. Teil 1846, S. 183.

trachtet, in dessen Mitte der Druck p herrsche. Da die beiden Seitenflächen $dy\,dz$ den Abstand $\pm\frac{dx}{2}$ von der Teilchenmitte haben, empfängt die eine Fläche einen Druck



$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz,$$

die andere einen Druck

$$\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz,$$

so daß deren Unterschied

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

beträgt. Auf die Masseneinheit des Teilchens selbst wirke ferner eine Außenkraft (z. B. die Schwere), deren Teilkräfte in der x-, y- und z-Richtung X, Y und Z seien, dann wirken zusammen nach der x-Richtung die Kräfte

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz+X\,dx\,dy\,dz\frac{\gamma}{g}.$$

Bezeichnet man mit t die Zeit, mit u, v und w die Geschwindigkeiten nach den drei Koordinatenrichtungen, so betragen die Beschleunigungen nach denselben Richtungen

$$\frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\ \text{und}\ \frac{dw}{dt}.$$

Diese Beschleunigungen können auch durch partielle Differentialquotienten ausgedrückt werden. Wäre die Bewegung stationär, d. h. nur vom Ort, nicht von der Zeit abhängig, so würde während der Zeit dt das Teilchen, das die Geschwindigkeiten u, v und w besitzt, um $u\,dt$ nach der x-Richtung, um $v\,dt$ nach der y-Richtung und um $w\,dt$ nach der z-Richtung weiterrücken, und daher wegen der Ortsveränderung die Geschwindigkeit

$$u+du=u+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot u\,dt+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot v\,dt+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot w\,dt \tag{6}$$

in der x-Richtung erlangen. Bei nicht stationärer Bewegung sind zwar die in der Zeit dt zurückgelegten Wege etwas anders als eben angegeben — weil u, v und w in der Zeit dt nicht die alten Werte behalten —, aber die Unterschiede sind unendlich klein im zweiten Grade, so daß (6) beibehalten werden könnte, wenn nicht die Veränderung hinzukäme, die u an Ort und Stelle erleidet und die $\frac{\partial u}{\partial t}dt$ beträgt. Daher gilt bei nicht stationärer Bewegung

$$u+du=u+\frac{\partial u}{\partial t}dt+\frac{\partial u}{\partial x}u\,dt+\frac{\partial u}{\partial y}v\,dt+\frac{\partial u}{\partial z}w\,dt$$

und beträgt die Beschleunigung

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w. \tag{6a}$$

Nach dem *d'Alembert*schen Prinzip[1]) gilt hiernach für die Kräfte und Beschleunigungen in der x-Richtung

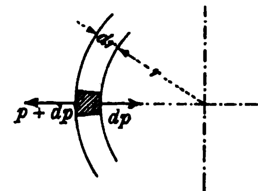
$$\frac{\gamma}{g} X - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w\right) = 0$$

oder, wenn man zugleich ebensolche Entwickelungen für die anderen Richtungen vornimmt

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\gamma}{g} X - \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \frac{\gamma}{g} Y - \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \frac{\gamma}{g} Z - \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Das sind die sogenannten *Euler*schen Gleichungen[2]).

Beispiel: Man benutzt die an dem Massenteilchen angreifende Fliehkraft in Schleudermaschinen (Zentrifugen) zur Trennung von Gemischen[3]), z. B. in Milchzentrifugen oder Separatoren, zum Aufrahmen, d. i. zur Absonderung der Fettkügelchen von der schweren Milchflüssigkeit. Bedeutet γ_1 das Eigengewicht des Fetteilchens, γ_2 das der Milchflüssigkeit, ω die Winkelgeschwindigkeit, so ergibt sich die nach innen gerichtete, auf die Flächeneinheit wirkende Horizontalkraft



$dH = (p + dp) - p - \frac{\gamma_1}{h}\omega^2 r\,dr = dp - \frac{\gamma_1}{g}\omega^2 r\,dr$ und weil $dp = \frac{\gamma_2}{g}\omega^2 r\,dr$ ist, $dH = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{g}\omega^2 r\,dr$, mithin eine gegen die Drehachse gerichtete wagerechte Beschleunigung

$$dH : \frac{\gamma_1}{g} dr = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1}\omega^2 r.$$

Bei dem sonst üblichen Aufrahmen durch „Absetzen" bewirkt nur der Auftrieb $(\gamma_2 - \gamma_1)dr$ eine (lotrechte) Beschleunigung

$$\frac{(\gamma_2 - \gamma_1)dr}{\frac{\gamma_1 dr}{g}} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1} g.$$

Das Verhältnis $\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1}\omega^2 r : \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1} g = \frac{\omega^2 r}{g}$ zeigt die Überlegenheit der Zentri-

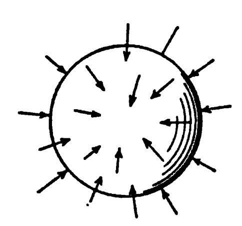
1) Das Prinzip, das wir heute nach *d'Alembert* benennen, ist eigentlich erst von *Lagrange* (Mécanique anal. (1811), Bd. 1 Dynamik, Sect. 1, Art. 11) zur allgemeinen Anwendung gebracht worden. In seinen Anfängen kann es aber schon auf *Jacob Bernoulli* zurückgeführt werden. Vgl. *E. Dühring*, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik, Berlin 1873, S. 305.

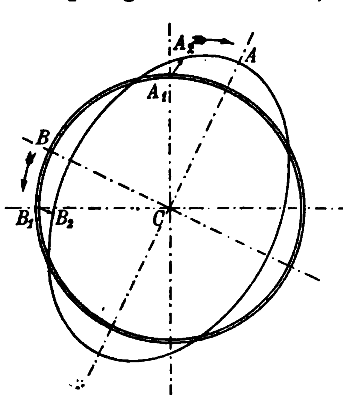
2) Berlin, Hist. de l'Acad. 1755.

3) *J. Weisbachs* Lehrbuch d. Ing.- u. Masch.-Mechanik, herausg. v. *G. Herrmann*, 3. Teil, 1. Hälfte, 2. Aufl., Braunschweig 1896, S. 742.

fuge. Beispielsweise würden zwar bei $r = 0{,}1$ m und $\omega = 9{,}9\ \mathrm{sec}^{-1}$, d. i. bei 95 Umdrehungen in der Minute, beide Systeme gleich günstig wirken; aber wenn die Umdrehungszahl auf 3000 stiege, so würde $\frac{\omega^2 r}{g} = 1005$ werden, oder infolge der Fliehkräfte eine 1005 mal größere Beschleunigung als beim reinen „Absetzen" auftreten.

8. Wirbelfreiheit. Kontinuität. Ist die Gestalt, welche man einem Teilchen zuweist, die einer Kugel, so sind alle Kräfte gegen deren Mittelpunkt gerichtet, weil infolge der vollkommenen Glätte keine Tangentialkräfte an der Oberfläche von den Nachbarteilchen ausgeübt werden können. Eine etwaige Drehbewegung des Teilchens kann also keine Änderung ihres Momentes erfahren, und ist das Teilchen in Ruhe, so kann es zwar fortgetrieben, aber in keiner Weise in Umlauf gesetzt werden. Es kann sich also ein nicht wirbelndes Kügelchen zwar in ein beliebiges Ellipsoid und weiter in ein neues Ellipsoid verwandeln, aber die jeweiligen Hauptachsen müssen stets parallel zu jenen Durchmessern sein, aus denen sie ursprünglich entstanden, so daß sich bezüglich des Mittelpunktes die Drehmomente der zu den Hauptebenen symmetrisch gelagerten Unterteilchen fortgesetzt aufheben. Bei der Verwandlung eines größten Kugelkreises in die nahebenachbarte Ellipse sind für zwei Kreispunkte auf zueinander senkrechten Halbmessern A_1 und B_1, von denen A_1 soweit vom künftigen Endpunkt A der großen Halbachse absteht, wie B_1 vom künftigen Endpunkte B der kleinen Halbachse, die Bewegungen offenbar entgegengesetzt, derart, daß sich der Halbmesser CA_1 um den Mittelpunkt C soweit nach rechts dreht, wie der Halbmesser CB_1 nach links. Bilden A_1 und B_1 die Schnittpunkte von Geraden, die man durch den Kugelmittelpunkt C parallel zur x-Achse bzw. y-Achse gelegt hat, so gilt also wegen der Gleichheit der Drehungswinkel





$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}.$$

Findet keine Bewegung nach der z-Seite statt, so sind Ellipse und Kreis flächen- und längengleich, andernfalls müssen die Unterteilchen noch strahlenförmig vom Mittelpunkt C fortrücken oder sich ihm nähern, was ohne Moment bezüglich dieses Punktes erfolgt. Da man ähnliche Betrachtungen wie für die zu x und y parallele Ebene auch für die an-

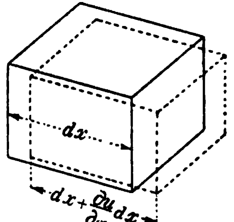
deren Richtungen wiederholen kann, lautet das Ergebnis, daß für wirbelfreie Verwandlungen

$$(8) \qquad \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = 0$$

gelten muß[1]). Nebenbei bemerkt gilt statt dessen für *reine Drehung* mit oder ohne Parallelverschiebung, aber ohne Gestaltsveränderung, wie man sich unschwer überzeugen kann,

$$(8a) \qquad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0.$$

Da die tropfbaren Flüssigkeiten für alle folgenden Berechnungen als unzusammendrückbar gelten, müssen ihre Formänderungen ohne Volumänderung vor sich gehen. Ein kleiner Block $dx\,dy\,dz$ wird nun, weil seine Endflächen verschieden rasch vorschreiten, in der Zeit dt in der x-Richtung um $\frac{\partial u}{\partial x} dx\,dt$ länger. Es müssen also die gleichzeitigen Änderungen $\frac{\partial v}{\partial y} dy\,dt$ und $\frac{\partial w}{\partial z} dz\,dt$ derart sein, daß der Rauminhalt



$$\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\,dt\right) \cdot \left(dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy\,dt\right) \cdot \left(dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz\,dt\right) = dx\,dy\,dz$$

bleibt, oder daß bei Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung stets

$$(9) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist. Die Forderung unveränderlichen Rauminhaltes heißt Kontinuitäts- oder Raumbedingung und die Gleichung (9), welche bei vielen Betrachtungen wiederkehrt, Kontinuitäts- oder Raumgleichung.

9. Das Potential. Wenn eine Bewegung ein Geschwindigkeitspotential besitzt, so bedeutet dies, daß eine bestimmte Funktion $\Phi(x, y, z)$ besteht[2]), aus der man durch Differentiation die Geschwindigkeiten erhält oder daß, in mathematischer Form geschrieben,

---

1) Zuerst von *L. Euler*, Berlin Hist. de l'Académie 1755, S. 292 in der Form angegeben, daß bei Rotation $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ kein vollständiges Differential sei. Die Ausdrücke der Gl. (8) wurden von *J. C. Maxwell* in den London Math. Soc. Proc. 3 (1871), S. 224 als Quirl (curl) bezeichnet. Da man, wie unten in § 114 ausgeführt wird, von Wirbeln spricht, die nur im innersten Faden quirlen, wäre eigentlich die Bezeichnung „quirlfrei" besser als wirbelfrei.

2) Eine solche Funktion hat *J. L. de Lagrange* eingeführt, Berlin, Nouv. mém. de l'Académie 1781. Ihren Namen erhielt sie viel später. Die Einführung einer Funktion, deren Differentialquotienten *Kräfte* sind, in die Hydrostatik geschah durch *A. C. Clairault*, Théorie de la Figure de la Terre, Paris 1743.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

ist. Nach den Regeln der Differentialrechnung muß

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y},$$

also gemäß der Identität der ersten Differentialquotienten mit den Geschwindigkeiten in den Achsenrichtungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

sein. Die letzten drei Ausdrücke sind aber nach (8) als Kennzeichen der wirbelfreien Bewegung erklärt worden. *Wenn die Bewegung ein Geschwindigkeitspotential besitzt, so erfolgt sie also wirbelfrei.* Umgekehrt hat eine wirbelfreie Bewegung ein Geschwindigkeitspotential. Bei Wirbelfreiheit kann man die Kontinuitätsgleichung in anderer Form geben, indem man in ihr die Geschwindigkeiten u, v und w durch die Funktion Φ ausdrückt, nämlich in der Form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{10}$$

Andererseits zeigt das Bestehen dieser Beziehung zugleich an, daß die Bewegung wirbelfrei vor sich geht. Wenn keine Bewegung nach der z-Richtung stattfindet, vereinfacht sich (10) und wird zu

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \tag{10a}$$

Da die Geschwindigkeit in der Richtung der beiden Achsen u und v beträgt, schließt ein Stromfaden mit der Abszissenachse einen Winkel ein, der die Tangente

$$\frac{v}{u} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}$$

besitzt. Für ein Element einer Kurve Φ = Konst. gilt andererseits

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0$$

oder für die Tangente des Winkels, den dieses Element mit der Abszissenachse einschließt,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = -\frac{u}{v}. \tag{10b}$$

Daß hiernach $\frac{dy}{dx}$ der negative reziproke Wert von $\frac{v}{u}$ ist, beweist, daß der Stromfaden die Linie Φ = Konst. rechtwinklig schneidet. Bezeichnet

man Kurven von konstanter Funktion Φ als Linien unveränderlichen Potentiales oder als Äquipotentiallinien, so läßt sich das eben Gesagte mit den Worten aussprechen, daß die Stromlinien die Äquipotentiallinien rechtwinklig schneiden. Für die Stromlinien mögen nun die Gleichungen $\Psi =$ Konst. gelten. Dann gibt es der Funktionen, welche alle *dieselbe* Schar Stromlinien darstellen, insofern unendlich viele, als auch jede Funktion der Funktion Ψ, wenn sie $=$ Konst. gesetzt wird, eine Linie der Schar gibt. Für die Kurven $\log\sqrt{x^2+y^2} =$ Konst. ist ja beispielsweise auch $\sqrt{x^2+y^2}$ oder $x^2+y^2 =$ Konst.

Wenn man nun die Ebene mit ihren Äquipotentialkurven als einen Plan mit Höhenkurven deutet, so stimmen die Geschwindigkeiten mit den Gefällen der durch den Plan dargestellten Landschaften überein. In diesem Sinne spricht man auch von *Potentialgefälle* oder *Gradient*. Die Bewegung findet längs der Linien stärksten Gefälles statt, die im Plan durch die Stromlinien wiedergegeben sind, und zwar gemäß der Definition des Potentiales Φ mit der Geschwindigkeit

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \tag{10c}$$

wobei n zu den Äquipotentialkurven (Höhenkurven) normal gerichtet ist. Diese und die Stromlinien zerlegen die Planfläche in unendlich viele Rechtecke.

Es mögen nun nur jene benachbarten Höhenkurven betrachtet werden, welche gleichen Höhenabstand (gleichen Geschwindigkeitspotentialunterschied $d\Phi$) besitzen und nur jene Stromlinien, zwischen welchen gleiche Mengen durchfließen. Bei einem Abstand dn der Höhenkurven und einem Abstand ds der Strömungslinien beträgt gemäß (10c) der Durchfluß[1])

ds

dn

$$V\,ds = \frac{\partial \Phi}{\partial n}\,ds,$$

und wenn nun sowohl $V\,ds$ als auch $d\Phi$ für alle Rechtecke gleich sein soll, so folgt ein für letztere unveränderliches Verhältnis $ds : dn$. Alle Rechtecke werden dadurch ähnlich und so kann man z. B. durch entsprechende Wahl des Höhenabstandes oder der Durchflußgröße die ganze Fläche mit Hilfe der beiden Kurvenscharen in Quadrate teilen. Rein geometrisch ist zwischen den zwei Kurvenscharen kein grundsätzlicher Unterschied, indem man nach Belieben die beiden Scharen ihre Rollen vertauschen lassen kann. Daraus geht hervor, daß bei richtiger Auswahl der Funktion Ψ, analog (10a), auch

1) Aus einer analogen Beziehung für wirbelfreie Strömung im Raume folgt für die Strömungsenergie innerhalb einer geschlossenen Fläche die unten abgeleitete Gl. (248a).

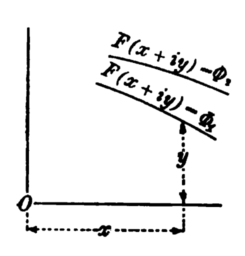
(10d) $$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

gilt. Die beiden sich rechtwinklig schneidenden Kurvenscharen, welche die Fläche in unendlich viele ähnliche Rechtecke zerlegen und für welche die Differentialgleichungen (10a) und (10d) gelten, werden häufig *isothermische Kurvenscharen* genannt[1]), die Funktion Ψ Stromfunktion (current-function)[2]).

Eigentümliche Beziehungen[3]) bestehen zwischen komplexen Funktionen und Potentialfunktionen. Es sei

(10e) $$\Phi + i\Psi = F(x + iy),$$

wobei Φ und Ψ reelle Größen seien. Dann bedeutet Φ den reellen, $i\Psi$ den imaginären Teil von $F(x+iy)$; zugleich besagt der Ansatz (10e), daß iy genau in derselben Weise in $F(x+iy)$ vorkommt wie x (wie das z. B. in $(x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$ der Fall wäre). Die Strecken x und y sollen zueinander senkrecht aufgetragen werden. Durch partielle Differentiationen von (10e) erhält man



$$\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial x} = \frac{d(\Phi + i\Psi)}{d(x+iy)} \cdot \frac{\partial(x+iy)}{\partial x} = \frac{d(\Phi + i\Psi)}{d(x+iy)},$$

$$\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial y} = \frac{d(\Phi + i\Psi)}{d(x+iy)} \cdot \frac{\partial(x+iy)}{\partial y} = i\,\frac{d(\Phi + i\Psi)}{d(x+iy)}.$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial y} = i\,\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\frac{\partial \Psi}{\partial y} = i\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial(i\Psi)}{\partial x} = i\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

und da die reellen Teile links den reellen rechts, die imaginären links den imaginären rechts gleich sein müssen

(10f) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Partielle Differentiation der beiden Gleichungen (10f) nach x bzw. y liefert

---

1) Daß man zeichnerisch von Funktionen Φ_1 und Φ_2 leicht zu $\Phi_1 \pm \Phi_2$ gelangen kann, siehe etwa bei *H. Baudisch*, Z. d. öst. I. u. A.V. 62 (1910), S. 85. Daß auch die Diagonalen eines Quadratnetzes wieder ein solches bilden, siehe *F. Prášil*, Technische Hydrodynamik, Berlin 1913, S. 61.

2) Sie wurde von *G. G. Stokes* eingeführt, Transactions of the Cambridge Philosophical Society 7 (1842), S. 439 = Mathem. and Physical Papers 1, S. 4.

3) Diese können hier nur kurz berührt werden. Es sei insbesondere verwiesen auf *G. Holzmüller*, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\partial x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial \frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\partial y} = -\frac{\partial \frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\partial x},$$

wonach

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

ist und gemäß dieser partiellen Differentialgleichung Φ als Geschwindigkeitspotential aufgefaßt werden kann. Ebenso erhält man durch partielles Differenzieren der ersten Gl. (10f) nach y und der zweiten nach x

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0.$$

Jede komplexe Funktion von $x + iy$ gibt also, wenn man die Punkte (x, y) verbindet, für welche Φ = Konst. und Ψ = Konst. ist, Äquipotentiallinien und Stromlinien.

Solcher Beziehungen gibt es viele. Man kann z. B. nachweisen, daß, wenn man $X + iY = F(x + iy)$ setzt und man X wagrecht und Y senkrecht aufträgt, die Linien $F(a + iy)$ und $F(x + ib)$ isothermische Scharen bilden, derart, daß man für jedes a bzw. b eine Linie der betreffenden Schar erhält.

Die partielle Differentiation von $\Phi + i\Psi = F(x + iy)$ gibt

$$\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial x} = \frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial(x + iy)} \cdot \frac{\partial(x + iy)}{\partial x}$$

oder weil der letzte Bruch = 1 ist,

$$\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial x} = \frac{d(\Phi + i\Psi)}{d(x + iy)} = F'(x + iy).$$

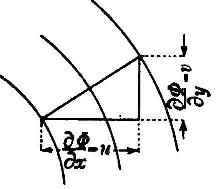
Andererseits ist

$$\frac{\partial(\Phi + i\Psi)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

oder bei Berücksichtigung von (10f) $= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}$. Hiernach gilt

$$\frac{d(\Phi + i\Psi)}{d(x + iy)} = F'(x + iy) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

worin die beiden partiellen Differentialquotienten reelle Größen sind, während $F'(x + iy)$ komplex ist. Bei komplexen Größen nennt man die Wurzel aus der Quadratsumme der reellen und der mit i multiplizierten Größe: *Modul.* Von $F(x + iy)$ ist also der



$$\text{(10g)} \qquad \text{Modul} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2}.$$

Vermöge der Definition des Geschwindigkeitspotentiales ist dies aber nichts anderes als die Summenwurzel der Quadrate der Geschwindigkeiten nach der x- und der y-Richtung, und das ist wieder die wahre Strömungsgeschwindigkeit $V = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Der Modul des Differentialquotienten ist also gleich der Strömungsgeschwindigkeit. Die Richtung der Strömung ist bereits in Gl. (10b) angegeben. Man überzeugt sich leicht, daß die gleichen Überlegungen auch für Funktionen von $x - iy$ gelten.

Beispiel: Eine Strömung kann entweder einheitlich vor sich gehen oder derart, daß zwischen der strömenden Masse und den Wänden Gegenbewegungen (Wirbel des üblichen Sprachgebrauches) erfolgen. Will man den Reibungswiderstand vermindern, so wird man solche Gegenbewegungen zu vermeiden trachten, d. h. demgemäß die Wandform wählen, wobei man sich die klebrige Flüssigkeit durch eine vollkommene ersetzt denken kann.

F. Prášil [1]) berechnete so die Meridianlinien von Saugröhren für Turbinen und zwar mit Hilfe zylindrischer Koordinaten. Zur Vermeidung von Umformungen seien hier orthogonale Koordinaten verwendet [2]) und bedacht, daß, wenn zwei Funktionen Φ_1 und Φ_2 die Differentialgleichung (10) erfüllen, also Potentialfunktionen sind, dies auch deren Summe tut, wonach auch $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ eine Potentialfunktion darstellt. Man überblickt sofort, daß man $\Phi_1 = (-x^2 + z^2)m$ und $\Phi_2 = (-y^2 + z^2)m$, also

$$\Phi = (-x^2 - y^2 + 2z^2)m$$

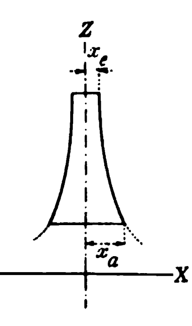
setzen kann. Die Differentiation von Φ liefert dann die Geschwindigkeiten

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2mx, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2my, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 4mz.$$

Sohin stellt $-x^2 - y^2 + 2z^2 =$ Konst. die Gleichungen der Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentiales und $x^2 + y^2 + 4z^2 =$ Konst., da $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$ ist, die Gleichungen der Flächen gleicher Strömungsgeschwindigkeiten V dar. Die orthogonalen Trajektorien der Äquipotentialflächen bilden dann die Stromlinien. Aus Gl. (10b) folgen die Differentialgleichungen ihrer Projektionen auf die xz- und xy-Ebene mit

$$\frac{dx}{dz} = \frac{u}{w} = -\frac{x}{2z} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{u}{v} = \frac{x}{y}$$

und hieraus durch Integration die Gleichungen dieser Projektionen mit



$$x^2 z = \text{Konst.} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = \text{Konst.}$$

Durch Multiplikation geht dann weiter für die Stromflächen die Gleichung

$$\frac{x^3 z}{y} = \text{Konst.}$$

hervor, nach welcher sich das Wasser längs Rotationshyperboloiden bewegt. Daran wird nichts geändert, wenn man eine Stromfläche, also eines der Hyperboloide, durch eine feste Wand ersetzt und den Außenraum beseitigt. In einem nach der Leitlinie $x^2 z =$ Konst. geformten Saugrohre einer Turbine fließt also das Wasser ohne Gegenströmung ab [3]).

1) Schweiz. Bauz. 41 (1903), S. 207, 233, 249, 282, 293.

2) Diese abgekürzte, bisher unveröffentlichte Darstellung rührt von *F. Schaffernak* her.

3) Der Eintritt des Wassers in das Saugerohr scheint nach Beobachtungen

Beispielsweise sei die Meridianlinie eines 4 m langen Saugrohres, das bei einer achsialen Einströmungsgeschwindigkeit von 4 m sec^{-1} und bei einer gleichgerichteten Ausströmungsgeschwindigkeit von 1 m sec^{-1} eine Wassermenge von 4 $m^3 sec^{-1}$ bewältigt, auf Grund der *Prášil*schen Annahme zu bestimmen. Mit e und a als Kennziffern für den Ein- und Austritt ist der Zu- und Abfluß $4{,}0 = x_e^2 \pi \times 4{,}0 = x_a^2 \pi \times 1{,}0$ und $x_e = 0{,}564$ m und $x_a = 1{,}128$ m. Sohin besitzt, weil $z = w : 4m$ gefunden wurde, die Gleichung für die Meridianlinie die Konstante $x_e^2 z_e = -0{,}564^2 \frac{w_e}{4m}$ oder, da $w_e - w_a = 4 - 1 = 4m(z_a - z_e) = 16$ m, also $m = -\frac{3}{16}$ ist, die Konstante $0{,}564^2 \frac{16}{3} = 1{,}71$. Die Gleichung der gesuchten Meridianlinie lautet somit $x^2 z = 1{,}71$. Die Geschwindigkeitskomponenten sind für einen Punkt (x, z) aus $u = -2mx = \frac{3}{8}x$; $w = 4mz = -\frac{3}{4}z$ und der hydraulische Druck aus ihnen nach dem später folgenden *Bernoulli*schen Theorem (Gl. 16) bestimmbar.

Noch sei erwähnt, daß zur praktischen Verwendung des Rohres als Turbinensaugrohr noch Bedingungen über den richtigen Ein- und Austritt des Wassers zu erfüllen sind.

Denkt man sich, daß man einen gegebenen Durchfluß Q von einer Äquipotentialfläche zu einer anderen auf zwei Hohlwegen von den Längen s_1 und s_2 und den Querschnitten F_1 und F_2 treiben will, so gelten für die nötige Potentialdifferenz H der beiden Äquipotentialflächen (wenn man die Geschwindigkeiten mit v_1 und v_2 bezeichnet) die Gleichungen

$$v_1 = \frac{H}{s_1}, \quad v_2 = \frac{H}{s_2},$$

$$Q = v_1 F_1 + v_2 F_2 = \frac{H F_1}{s_1} + \frac{H F_2}{s_2}. \tag{10h}$$

Danach beträgt die lebendige Kraft der strömenden Masse bei einem Eigengewicht 1

$$\frac{v_1^2}{2g} s_1 F_1 + \frac{v_2^2}{2g} s_2 F_2 = \frac{H_1^2 F_1}{2g s_1} + \frac{H_2^2 F_2}{2g s_2}.$$

Wenn man nun die Geschwindigkeiten verändert, aber den Gesamtdurchfluß Q beibehält, muß man für jeden Hohlweg eine neue Potentialdifferenz $H + \Delta_1$ bzw. $H - \Delta_2$ anwenden und hat dann entsprechend (10h)

$$Q = \frac{H + \Delta_1}{s_1} F_1 + \frac{H - \Delta_2}{s_2} F_2,$$

sonach in Verbindung mit (10h)

$$\frac{F_1 \Delta_1}{s_1} - \frac{F_2 \Delta_2}{s_2} = 0, \tag{10i}$$

während die lebendige Kraft zu

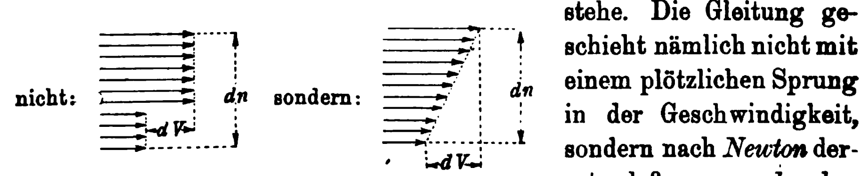
---

von *P. Schuster* u. *K. Ellon*, Mitteilungen üb. Forschungsarbeiten, Heft 82 u. 102, Berlin 1910, 1911, bei günstiger Beaufschlagung der Annahme gemäß zu erfolgen. Nach Versuchen von *W. Hampel*, Technische Blätter 40 (1908), S. 30 breitet sich der Strahl aber erst ganz unten aus, vgl. S. 235.

$$\frac{(H_1+\Delta_1)^2 F_1}{2g s_1}+\frac{(H-\Delta_2)^2 F_2}{2g s_2}=\frac{H^2 F_1}{2g s_1}+\frac{H^2 F_2}{2g s_2}+\frac{1}{g}\left(\frac{F_1\Delta_1}{s_1}-\frac{F_2\Delta_2}{s_2}\right)$$
$$+\frac{\Delta_1^2 s_2 F_1+\Delta_2^2 s_1 F_2}{4g s_1 s_2}$$

wird. In diesem Ausdruck ist das Klammerglied zufolge (10i) Null, der letzte Bruch stets positiv, so daß der Ausdruck sein Minimum für den eingangs behandelten Fall hat, in dem $\Delta_1=\Delta_2=0$ war. Die Verallgemeinerung der Betrachtung führt auf den von *W. Thomson*[1]) streng bewiesenen Satz, daß die reibungslose Strömung einer gegebenen Wassermenge von einer „Quelle" zu einer „Senke" *derart erfolgt, daß die lebendige Kraft des strömenden Wassers ein Minimum ist.*

10. Die Widerstände des zähen Teilchens. In einer bewegten zähen Flüssigkeit ist, wie schon erwähnt, der Druck nicht nach allen Seiten gleich und sind die Kräfte nicht mehr durchweg senkrecht zur Oberfläche der Teilchen gerichtet. Es soll zunächst ein parallelepipedisches Teilchen betrachtet werden, das nicht um irgendeine Achse rotiert und dessen Schwerpunkt seine Lage nicht ändert; dann sind alle Veränderungen solche der Form. Verändert ein Teilchen einer zähen Flüssigkeit seine Form, so werden Spannkräfte wachgerufen. Setzt man voraus, daß diese Kräfte den Geschwindigkeiten der Formänderungen proportional sind, so müssen die im Laufe eines Zeitteilchens erlittenen Formänderungen jenen ähneln, welche das Teilchen eines festen Körpers unter der Einwirkung äußerer Kräfte erfährt. Die Annahme der Proportionalität wird stets gemacht, und zwar seit *Newton*[2]), welcher der Ansicht war, daß, wenn Flüssigkeitsschichten übereinander weggleiten, der Widerstand mit dem Geschwindigkeitsgefälle in festem Verhältnisse stehe. Die Gleitung geschieht nämlich nicht mit einem plötzlichen Sprung in der Geschwindigkeit, sondern nach *Newton* derart, daß, wenn dn den Schichtenabstand und dV den zugehörigen Geschwindigkeitsunterschied bedeutet, $\frac{dV}{dn}$ einen bestimmten Wert besitzt und einen



$$\text{(11)}\qquad \text{Reibungswiderstand pro Flächeneinheit} = \eta\frac{dV}{dn} = \eta\cdot\text{Gleitgeschwindigkeit}$$

1) *W. Thomson*, Camb. and Dub. Math. Journ. 1849 = Mathematical and Physical Papers 1, S. 107.

2) *I. Newton*, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, London, lib. 2 sect. 9, 1687.

erzeugt, worin η konstant. Der Reibungswiderstand der Flächeneinheit entspricht also der Scherspannung fester Körper. Wo Scherspannungen auftreten, müssen auch Zug- und Druckspannungen wachgerufen werden, welche in der Flüssigkeit in der Weise auftreten, daß zu dem mittleren Druck p auf einigen Flächen ein geringfügiger Zuwachs hinzutritt, während auf anderen ein kleiner Abfall stattfindet. Bei festen Körpern besteht folgende Beziehung

$$(12)\qquad \frac{\text{Elastizitätsmodul}}{\text{Gleitmodul}} = \frac{\text{Schubkoeffizient}}{\text{Dehnungskoeffizient}} = 2(1+m),$$

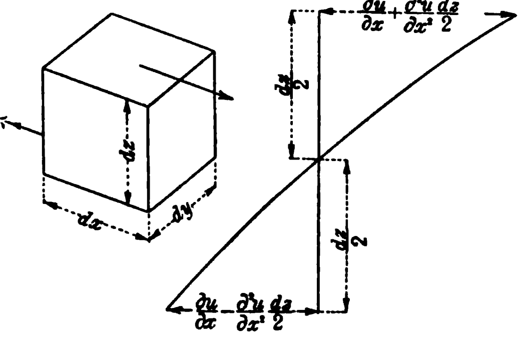
worin m die Querkontraktion oder $1:m$ die sogen. *Poisson*sche Zahl bedeutet, die bei *unzusammendrückbaren* Flüssigkeiten $= 2$ sein muß. Aus (12) folgt für $m = \frac{1}{2}$

$$\text{Elastizitätsmodul} = 3 \cdot \text{Gleitmodul},$$

das heißt auf Flüssigkeiten übertragen,

$$(12\text{a})\qquad \text{Zugspannung} = 3\eta \cdot \text{Dehnungsgeschwindigkeit},$$

worin die Zugspannung im allgemeinen in einem Druckabfall bestehen wird und die Dehnungsgeschwindigkeit die Verlängerung der Längeneinheit in der Zeiteinheit bedeutet.



Betrachtet man in einem seine Form ändernden kleinen Block $dx\,dy\,dz$ die gegenseitigen Verschiebungen der (auf der Zeichnung wagrechten) $dx\,dy$-Ebenen in der x-Richtung, so hat man, wenn keine Drehung der ganzen Masse stattfindet, für jene Schiebungen als $\frac{\partial V}{\partial n}$ den Wert $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ anzusehen, der aber nur für den Mittelpunkt des Teilchens genau gilt. Für den Mittelpunkt der einen (unteren) Begrenzungsebene gilt statt seiner

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{dz}{2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} \cdot \frac{dz}{2}$$

und für den Mittelpunkt der anderen (oberen) Begrenzungsebene

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \frac{dz}{2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} \cdot \frac{dw}{2}.$$

Daraus geht hervor, daß in den genannten beiden $dx\,dy$-Ebenen nach der x-Richtung Teilkräfte des Reibungswiderstandes von der Größe

$$\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{dz}{2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy \quad \text{bzw.} \quad \eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{dz}{2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy$$

auftreten, welche als Außenkräfte des Parallelepipeds einander entgegenwirken und für dasselbe eine

$$\text{(13)} \qquad \text{Mittelkraft} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

hervorrufen. Noch ist eine etwaige Rotation zu bedenken. Findet eine solche ohne Formänderung der Masse statt und zerlegt man sie gemäß den Achsenrichtungen, so ist für den Umlauf um die Drehachsen, die in der x- oder z-Richtung liegen, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0$, während für den Umlauf um die in der y-Richtung liegenden Achse

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \text{Konst., also } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0$$

ist. Durch eine Drehbewegung wird also die Gültigkeit von (13) nicht gestört. Auch in den (lotrechten) Flächen $dx\, dz$ treten im allgemeinen Scherkräfte auf, welche analog (13) eine

$$\text{(13a)} \qquad \text{Mittelkraft} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) dx\, dy\, dz$$

ergeben. Die mit den Gleitungen Hand in Hand gehenden Verlängerungen der Parallelepipedseiten betragen in der Zeiteinheit

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Aus diesen Verlängerungen kann man, wie sich zeigen wird, die Verminderungen (Zugspannungen der Gl. (12a)) berechnen, welche der mittlere Druck p infolge der Formänderungen nach den drei Achsenrichtungen erleidet. Bezeichnet man die mit den drei Koordinatenachsen gleichgerichteten Normaldrucke auf die Parallelepipedflächen mit

$$p_x, \quad p_y, \quad p_z,$$

so gelten nach der Elastizitätslehre unter Berücksichtigung, daß als Elastizitätsmodul 3η und als *Poisson*sche Zahl 2 einzuführen ist, die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{3\eta}\left(-p_x + \frac{p_y}{2} + \frac{p_z}{2} \right), \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{3\eta}\left(\frac{p_x}{2} - p_y + \frac{p_z}{2} \right), \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{3\eta}\left(\frac{p_x}{2} + \frac{p_y}{2} - p_z \right).
\end{aligned}$$

Sie sind, wie man sich leicht überzeugen kann, identisch mit

$$p_x = p - 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad p_y = p - 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad p_z = p - 2\eta \frac{\partial w}{\partial z},$$

falls man

$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}$$

setzt, wonach man p als den an der betreffenden Stelle herrschenden Flüssigkeitsdruck betrachten kann. Der soeben berechnete Wert von p_x ist ein durchschnittlicher und gilt nur für den Mittelpunkt des Teilchens

$p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} - 2\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{2}\right)$

dx

$p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} - 2\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{2}\right)$

genau, während für die beiden $dy\,dz$-Flächen, auf welche Normaldrucke in der x-Richtung wirken, an seine Stelle die Drucke

$$p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} - 2\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{2}\right) \quad \text{bzw.} \quad p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} - 2\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{2}\right)$$

treten, deren

$$\text{(13b)} \qquad \text{Mittelkraft} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx\,dy\,dz$$

ist. Die Addition von (13), (13a) und (13b) zeigt in Verbindung mit der Raumgleichung (9)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

schließlich, daß durch die Formänderung Außenkräfte in der x-Richtung hervorgerufen werden, die zusammen die Größe

$$-\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz$$

besitzen. Analoge Kräfte treten offenbar in der y- und in der z-Richtung auf. Ist also eine zähe Flüssigkeit in Bewegung, so sind außer den von *Euler* berücksichtigten beschleunigenden Kräften noch Reibungen, Dehnungen und Pressungen wirksam, die zusammen an Stelle der *Euler*schen Gleichungen die folgenden[1]) treten lassen, welche die *Navier*schen heißen:

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} \frac{\gamma}{g}X - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\gamma}{g}Y - \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\gamma}{g}Z - \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right). \end{cases}$$

1) *L. Navier*, Paris, Mém. de l'académie 1823 = 6 (1827), S. 414.

Die Richtigkeit der *Navier*schen Gleichungen wird durch die Beobachtung nämlich durch das Verhalten der Flüssigkeiten in Haarröhrchen bestätigt. Für jede Flüssigkeit besitzt η einen bestimmten Wert, der sich allerdings mit der Temperatur ändert. Für Wasser ist z. B. nach *J. L. Poiseuille*[1]) dieser innerer Reibungskoeffizient (Zähigkeit, Viskosität) genannte Wert

$$\eta = \frac{0{,}000\,018\,14}{1 + 0{,}0337\,T + 0{,}000\,22\,T^2}\,\mathrm{g\,sec\,cm^{-2}}, \tag{14a}$$

worin T die Temperatur in Celsiusgraden bezeichnet.

Bisher wurde die Reibungsziffer η von der Gleitrichtung unabhängig angenommen. Bei den „amorphen" Flüssigkeiten, mit denen man gewöhnlich zu tun hat, ist dies der Fall; Flüssigkeiten können aber auch, wie *O. Lehmann*[2]) entdeckt hat, kristallisiert sein und zwar entweder mit vollkommener Raumgitterstruktur oder halbisotropisch, wobei die als Blätter gedachten Moleküle zwar ihre Breitflächen, aber nicht ihre Kanten parallel stellen[3]). In beiden Fällen ist η vermutlich von der Gleitrichtung abhängig und nimmt mit zunehmender Fließgeschwindigkeit plötzlich ab, sobald das auf die Moleküle ausgeübte Drehmoment die molekulare Richtkraft übersteigt. Man kann sich vorstellen, daß die Moleküle sich dann wie Lenkrollen von Karren parallel zur Verschieberichtung stellen. Ähnliches in schwächerem Maß mag nach *O. Lehmanns* Ansicht sogar in zähen amorphen Flüssigkeiten (Schmiermitteln) stattfinden, dafür spreche das optische Verhalten. Im folgenden, wo nur an amorphe Flüssigkeiten gedacht werden wird, soll η stets als unabhängig von der Gleitrichtung und -geschwindigkeit gelten.

11. Bewegung in Haarröhrchen. Aus (14) gehen Gesetze für die Bewegung des Wassers in engen Rohren — sogenannten Haarröhrchen — hervor. Liegt eine solche Röhre überall gleichen Querschnitts wagrecht

---

1) Paris, Mém. prés. par div. sav. 19 (1846), Ann. chim. phys. (3) 7 (1843), S. 62. *E. Hagenbach* berechnet dies aus *Poiseuilles* Versuchen, Ann. Phys. Chem. (4) 19 (1860), S. 385f.; s. *Landolt-Börnstein,* Tabellen, 4. Aufl. 1912, S. 31g.

2) In der Z. f. Krystallographie 1 (1877), S. 120 erklärte *O. Lehmann* Jodsilber zwischen 146 und 150° für zähflüssig, ebenda S. 492 für kristallisiert. Eine ihm von *F. Reinitzer* ihres merkwürdigen Verhaltens wegen zugesandte Substanz erkannte er als flüssig und kristallisiert (Zeitsch. f. physikalische Chemie 4 (1889), S. 462). Den sicheren Nachweis flüssiger Kristalle lieferte er später durch die Beobachtung, daß Kristalle von neutralem Ammoniumoleathydrat, wenn sie sich berühren, wie Flüssigkeiten zusammenfließen und einheitlich werden.

3) *O. Lehmann,* Die neue Welt der flüssigen Kristalle, Leipz. 1911; *Ders.*, Verhdlgn. der Deutsch. Physikal. Gesellsch. 15 (1913), S. 413; *Ders.,* Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, Abt. A (1913), 13. Abhandl. Seine älteren Arbeiten sind zusammengefaßt in *O. Lehmann,* Flüssige Kristalle, Leipz. 1904.

und strömt das Wasser *gleichförmig* in geraden (also nicht in schraubenartig gewundenen) Fäden durch, so müssen, wenn man die x in der Achsenrichtung des Rohres, die y quer zu ihnen wagrecht und die z senkrecht mißt, die Geschwindigkeiten v und w, die Ableitungen von v und w, die Ableitungen nach t, ferner $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ endlich die Gewichtskomponenten X und Y zu Null werden, wodurch die Ausdrücke (14) sich zu[1])

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{14b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{14c}$$

$$\frac{\gamma}{g} Z = \frac{\partial p}{\partial z} \tag{14d}$$

vereinfachen. Aus der Unveränderlichkeit aller Bewegungsvorgänge längs der Stromfäden folgt, daß die rechte Seite von (14b) sich nicht mit x ändert und daher auch nicht das Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial x}$. Daneben lehrt (14d), daß der Druck mit der Tiefe so zunimmt wie im ruhenden Wasser.

In einem Kreisquerschnitt müssen sich die Geschwindigkeiten u in konzentrische Kreise ordnen. Es geht daraus hervor, daß, wenn die Halbmesser mit r bezeichnet werden, sich (siehe Figur)

$$\frac{\partial u}{\partial r} : \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{AB} : \frac{1}{AC} = AC : AB = r : y$$

verhält, also

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r}{y} \frac{\partial u}{\partial y}$$



oder, weil bei Änderung von r das Verhältnis $r : y$ das alte bleibt,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{r}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial r} = \frac{r}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ und ebenso } = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

daher zufolge (14b)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\eta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

und weiter, falls die Flüssigkeit an der Rohrwand haftet und das Rohr den Halbmesser $\mathfrak{r}$ besitzt,

$$u = \frac{\mathfrak{r}^2 - r^2}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{14e}$$

ist. Die Durchflußmenge in der Zeiteinheit berechnet sich aus (14e) zu

1) *A. G. Greenhill*, Lond. Math. Soc. Proc. 13 (1881), S. 43.

$$Q = 2\pi \int_0^{\mathfrak{r}} u r\, dr = \frac{\pi \mathfrak{r}^4}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$

und hieraus folgt bei Ersatz des Halbmessers $\mathfrak{r}$ durch den Durchmesser D und bei Einführung des Eigengewichtes γ der Flüssigkeit und des Gefälles

$$J = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x}$$

für die mittlere Geschwindigkeit U der Ausdruck

$$U = \frac{\gamma D^2 J}{32\eta} \tag{14f}$$

oder bei Wasser, wenn U in m sec^{-1}, D in m bzw. U in cm sec^{-1}, D in cm ausgedrückt wird, und T die Temperatur in 0^0 C bedeutet,

$$U = \frac{1 + 0{,}033\,T + 0{,}000\,22\,T^2}{0{,}000\,005\,805} D^2 J \quad \text{bzw.} \quad \frac{1 + 0{,}033\,T + 0{,}000\,22\,T^2}{0{,}000\,5805} D^2 J .$$

Für einen zylindrischen Spalt vom Außenhalbmesser $\mathfrak{r}_1$ und Innenhalbmesser $\mathfrak{r}_2$ leitet *W. Wien*[1]) ähnlich ab:

$$Q = \frac{\pi \gamma J}{8\eta} \left\{ \mathfrak{r}_1^4 - \mathfrak{r}_2^4 - \frac{(\mathfrak{r}_1^2 - \mathfrak{r}_2^2)^2}{\log \text{nat} \frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{r}_2}} \right\} .$$

Erwähnenswert ist, daß *H. Lang* aus eigenen Versuchen und solchen von *Darcy, Hagen, Reynolds, Saph* u. *Schoder* und *Blasius* schließt, daß für ein und dasselbe Rohr $J : U$ nicht konstant sei, sondern etwas mit U wachse[2]). *R. Camerer*[3]) fand hingegen bei Maschinenschmieröl für $U = 0{,}9$ bis $4{,}2$ m sec^{-1} die Formel (14f) zutreffend, und bei Übergang zu einem engeren Rohr die Steigerung von J etwas kleiner als nach (14f).

12. Die Turbulenz. Wenn sich Wasser langsam in Haarröhrchen bewegt, so geschieht dies in übereinander weggleitenden Schichten und kann ganz stationär (von der Zeit unabhängig) vor sich gehen; in größeren Röhren, sowie in offenen Läufen bewegt sich das Wasser aber stets in Wirbeln, die jenen gleichen, die man in Rauchsäulen gewahrt. Man muß also zwischen *geschichteter* (laminarer) und *wirbelnder* (turbulenter) Bewegung (Bewegung in Schlieren) unterscheiden[4]). Die *Navier*schen Gleichungen können übrigens auch für die turbulente Bewegung beibehalten werden, wenn man unter u, v und w nur mehr die mittleren Geschwindigkeiten am betreffenden Punkte versteht und mit *Boussinesq*[5])

---

1) *W. Wien*, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1900, S. 274.

2) „Hütte“, 21. Aufl., 1. Bd. 1911, S. 293 und briefl. Mitteilung.

3) Zeitsch. f. d. gesamte Turbinenwesen 4 (1907), S. 461.

4) Im Sinne der Gleichungen (8) ist übrigens auch die Haarröhrchenbewegung nicht wirbelfrei; das wird durch die Zähigkeit verhindert.

5) *Boussinesq* beweist, daß ε für Geschwindigkeitsunterschiede in der x-, y- und z-Richtung denselben Wert haben muß.

die Reibungsziffer η durch eine andere, weitaus größere ε ersetzt, welch letztere aber dann nicht mehr einen unveränderlichen Wert für eine bestimmte Flüssigkeit bei gegebener Temperatur besitzt, sondern selbst wieder von der Bewegungsweise abhängt. Je heftiger die neben der gleichmäßigen Strömung auftretende Wirbelbewegung ist, desto größer ist ε, weswegen für ε der Name „Turbulenz" vorgeschlagen worden ist. Für wirbelnde Strömungen gelten also die *Navier*schen Gleichungen mit dem *Boussinesq*schen Zeichen

$$(14g)\quad \begin{cases} \frac{\gamma}{g} X - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\gamma}{g} Y - \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\gamma}{g} Z - \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right). \end{cases}$$

Bei Bewegung in Schichten findet ein Verlust an kinetischer Energie, also eine Verminderung von

$$(14h)\qquad \frac{\gamma}{g}\iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz$$

durch Verwandlung von Bewegung in Wärme statt, welche sich nicht wieder in lebendige Kraft rückwandeln kann. Bei der Bewegung in Schlieren bedeutet aber (14h) nur die Energie der mittleren Geschwindigkeit u, v, w und gilt für die wahre kinetische Energie, falls u', v' w' die zusätzlichen Wirbelgeschwindigkeiten im gegebenen Augenblick bedeuten,

$$(14i)\qquad \frac{\gamma}{g}\iiint [(u+u')^2 + (v+v')^2 + (w+w')^2]\, dx\, dy\, dz.$$

In (14i) können u', v' und w' auf Kosten von u, v und w zunehmen, d. h. es kann bei wirbelnder Bewegung sich die mittlere Strömung nicht nur in Wärme, sondern auch in Wirbel umwandeln und vielleicht kann auch umgekehrt eine Beschleunigung der mittleren Bewegung durch Abnahme der Wirbel eintreten; doch liegen diesbezüglich keine Erfahrungen vor.

Übrigens ist ε nicht eine eigentliche Reibungsziffer im Sinne von η, denn sein großer Wert kommt wesentlich, wie *H. A. Lorentz*[1]) gezeigt hat, durch Transport und Umtausch von Bewegungsgrößen zustande. Auch ist ε ganz bedeutend größer als η, würde doch nach den für Haarröhren geltenden Formeln (14e u. f) der mittlere Faden in einem Rohr

1) Amsterdam, Verschlagen der Akad. von Wetenschapen 6 (1897), S. 28 = *Lorentz*, Abhandlungen üb. theoretische Physik, 1. Bd. Leipzig 1907, S. 43. *H. Hahn*, *G. Herglotz* u. *K. Schwarzschild*, Zeitsch. Math. Phys. 51 (1904), S. 411.

von 1 m Halbmesser und daher in einem Gerinne von halbkreisförmigen Querschnitt bei nur 0,0001 Neigung eine Geschwindigkeit von 187 m sec^{-1} annehmen[1]).

13. Das Bernoullische Theorem. Die *Euler*schen Gleichungen (7) vereinfachen sich, wenn man sich auf stationäre, d. h. von der Zeit unabhängige Bewegungen beschränkt und nur die Schwere — welche der z-Richtung entgegenwirke — als Massenkraft beibehält, zu

$$(15)\qquad \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\gamma}{g}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ -\gamma-\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\gamma}{g}\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Setzt man weiter Wirbelfreiheit voraus, so kann man, weil dann die Beziehungen (8) bestehen, die Ausdrücke (15) auch in der Form

$$(15\,\mathrm{a})\qquad \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\gamma}{g}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial y}\right),\\ -\gamma-\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\gamma}{g}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

wiedergeben. Führt man nunmehr die Geschwindigkeit V statt ihrer Komponenten u, v und w ein, so sind, wie die Differentiation von

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

ergibt, die Klammerausdrücke in (15a) nichts anderes wie die partiellen Differentialquotienten von $\frac{1}{2}V^2$, so daß (15a) mit

$$(15\,\mathrm{b})\qquad \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g}\,V\frac{\partial V}{\partial x},\\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\gamma}{g}\,V\frac{\partial V}{\partial y},\\ -\gamma-\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\gamma}{g}\,V\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

identisch ist. Ersetzt man andererseits die Teilwege dx, dy und dz eines Teilchens durch seinen wahren Weg ds, bezeichnet man also die Weglänge mit s, so gilt, wenn man den Druck p und die Geschwindigkeit V als Funktionen von s auffaßt,

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}ds,\\ dV &= \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}ds, \end{aligned}$$

1) *J. J. Boussinesq*, Journ. de math. (2) 13 (1868), S. 402.

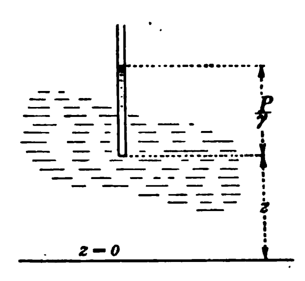
so daß durch Multiplikation der drei Gleichungen (15b) mit $\frac{\partial x}{\partial s} ds$ bzw. $\frac{\partial y}{\partial s} ds$ und $\frac{\partial z}{\partial s} ds$ und Addition der multiplizierten Gleichungen die neue

$$-\gamma \frac{\partial z}{\partial s} ds - dp = \frac{\gamma}{g} V dV$$

oder

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} = \text{konst.} \tag{16}$$

entsteht, worin z lotrecht von unten nach oben zu messen ist. Man nennt (16) nach seinem Entdecker das *Bernoulli*sche Theorem[1]) und bezeichnet $\frac{V^2}{2g}$ als *Geschwindigkeitshöhe*, $\frac{p}{\gamma}$ als Druckhöhe. Betont sei, daß es unrichtig wäre, V als absolute Geschwindigkeit im Weltraum aufzufassen, denn diese kennt man nie. Unter V verstehe man vielmehr die Bewegung relativ zu den Grenzen, welche gemeinschaftlich fortschreiten, ohne sich zu drehen. Man kann sich die Druckhöhe verdeutlichen, indem man sich bis zum betreffenden Teilchen ein Rohr eingetaucht denkt, welches derart geformt und gestellt ist, daß die Flüssigkeit in ihm weder eine Stoß-, noch eine Saugwirkung erfährt. In diesem Rohr wird die Flüssigkeit einen bestimmten Spiegel erreichen, dessen Höhe über dem Teilchen die Druckhöhe $\frac{p}{\gamma}$ darstellt. Die Summe $\frac{p}{\gamma} + z$ gibt dann an, wie hoch sich der Tauchrohrspiegel über der Ebene $z = 0$ einstellt, als welche man z. B. den Meeresspiegel betrachten kann. Entschließt man sich, p neben der kinetischen Energie $\frac{\gamma V^2}{2g}$ und der potentiellen Energie γz als besondere Energieform aufzufassen, so läßt sich das *Bernoulli*sche Theorem in der Form aussprechen: *daß für das einzelne Flüssigkeitsteilchen* (bei stationärer Bewegung) *die Gesamtenergie konstant ist.*



Die Gleichungen (15a) wurden für stationäre, wirbelfreie Bewegung und die Schwere als einzige Massenkraft abgeleitet. Behält man letztere Annahme und die Wirbelfreiheit bei und läßt man die Forderung stationären Verhaltens fallen, so erhält man für die veränderliche Bewegung bei genauer Wiederholung des Vorganges, der zu (15a) führte, statt dessen für eine Veränderung des Druckes p

1) *D. Bernoulli*, Hydrodynamica, Argentorati 1738, S. 11. Schon *Huyghens* hatte bemerkt, daß sich sein Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft auf Flüssigkeiten übertragen lasse (*E. Dühring*, Krit. Geschichte d. allg. Prinzipien der Mechanik, Berlin 1873, S. 228).

$$\text{(16a)} \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}\right), \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial y}\right), \\ -\gamma - \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial z}\right). \end{aligned} \right.$$

Bei Wirbelfreiheit ist hier bei Einführung der Potentialfunktion Φ

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

und lautet die allgemeine gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen (16a)

$$\text{(16b)} \qquad p + \gamma z + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\gamma}{2g} V^2 = 0.$$

Daß die Differentiation von (16b) in der Tat die Gleichungen (16a) liefert, erkennt man leicht, wenn man bedenkt, daß z. B.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

ist. Gelingt es nun eine Funktion Φ zu finden, für die p längs einer bestimmten Fläche konstant wird, so kann man diese Fläche als freie Oberfläche unter unveränderlichem Luftdruck ansehen, wenn zugleich die Teilchen, die ihr einmal angehören, Oberflächenteilchen bleiben. Das ist der Fall, wenn jedes Oberflächenteilchen, während es seinen Weg u, v, w zurücklegt, nicht von Wasser bedeckt wird und daher unter konstantem Luftdruck p bleibt, wenn also für die Oberflächenteilchen

$$\text{(16c)} \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

gilt. Als dritte Bedingungsgleichung der veränderlichen wirbelfreien Bewegung bleibt endlich die Kontinuitätsbedingung

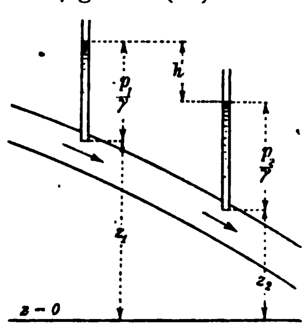
$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Das *Bernoulli*sche Theorem bezieht sich strenggenommen nur auf den einzelnen Flüssigkeitsfaden, es läßt sich aber noch auf eine Flüssigkeitsmasse von endlichem Querschnitte anwenden, wenn die Fäden im selben Querschnitte nur geringe Geschwindigkeitsunterschiede aufweisen, also wenn sie nur wenig gegeneinander geneigt und nicht so stark gekrümmt sind, daß man die Druckveränderung durch die Fliehkraft nicht mehr vernachlässigen darf; es gilt also z. B. noch recht gut für schwach gebogene Rohre, aber nicht mehr für Kniee. Unter den genannten Voraussetzungen kann man sich begnügen, in (16) unter V die mittlere Geschwindigkeit zu verstehen, also, wenn Q den Durchfluß und F den Querschnitt bedeutet,

$$V = \frac{Q}{F}$$

zu berechnen und für den Lauf zwischen zwei Querschnitten, die durch die Kennziffern 1 und 2 unterschieden werden sollen, gemäß (16)

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$



und daher

$$(17)\quad \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) = h$$

zu setzen, wobei h den Höhenunterschied der Tauchrohrspiegel bezeichnet. Ist die Geschwindigkeit benachbarter Fäden ungleich, so gilt aber eigentlich für jeden Faden ein anderes h. Die Unveränderlichkeit der Energie verlangt dann, wenn man die Geschwindigkeit $V + v$ des Einzelfadens von der mittleren Geschwindigkeit V unterscheidet, daß

$$Qh = \int \frac{(V_2 + v_2)^2}{2g} dQ - \int \frac{(V_1 + v_1)^2}{2g} dQ$$
$$= \int \frac{(V_2 + v_2)^3}{2g} dF_2 - \int \frac{(V_1 + v_1)^3}{2g} dF_1$$

sei. Der zur Erhöhung der mittleren Geschwindigkeit V_1 auf V_2 nötige Spiegelunterschied wächst also gegen früher ungefähr im Verhältnis von

$$(18)\qquad \alpha = \int \left(\frac{V + v}{V}\right)^3 dF = \int \frac{V^3 + 3V^2 v + 3Vv^2 + v^3}{V^3} dF,$$

worin das Integral über die ganze Querschnittsfläche zu erstrecken ist, und gemäß der Bedeutung von v

$$\int 3V^2 v\, dF = 3V^2 \int v\, dF = 0$$

sein muß, so daß sich

$$(19)\qquad \alpha = 1 + 3\int \frac{v^2}{V^2} dF + \int \frac{v^3}{V^3} dF$$

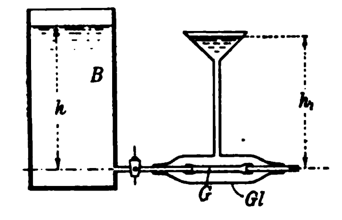
findet und stets positiv zeigt. In strömendem Wasser ermittelte *H. Bazin*[1]) bei glatter Wand $\alpha = 1{,}0318$, bei rauher Wand $= 1{,}122$; man pflegt im Mittel $\alpha = 1{,}11$ anzunehmen, falls man sich nicht, wie schon gesagt, mit $\alpha = 1$ begnügen will.

Beispiel: Zur Erläuterung der *Bernoulli*schen Theorems kann folgendes überraschende Experiment von *D. Bánki*[2]) dienen. Derselbe schaltete in ein starres Rohr, das von einem Behälter B gespeist wurde, ein sehr dünnwandiges Gummirohr G ein, das er mit einem Glasrohr Gl größeren Durchmessers um-

1) *H. Bazin*, Paris, Mém. prés. par div. sav. 19 (1865), S. 262.

2) Z. d. V. deutsch. Ing. 53 (1909), S. 1495; der Koeffizient 0,64 würde einer nicht ganz vollkommenen Einschnürung entsprechen.

schloß. Bei der geringen Rohrreibung mußte bei ungehindertem Ausfluß aus dem Behälter (bei offenem Hahn) im starren Rohr ungefähr Atmosphärendruck herrschen. War daselbst die Geschwindigkeit U, so galt $\frac{U^2}{2g} = h$, worin h die Tiefenlage unter dem Behälterspiegel bedeutet. Wenn *Bánki* dann aus dem Raum zwischen Gummirohr G und Hüllrohr Gl mittels Ejektor Luft aussog, also Unterdruck erzeugte, bewirkte dies rascheres Fließen im Gummirohr und dadurch dessen Verengerung, während ein stärkerer Druck auf das Gummirohr unruhigen Ausfluß, Schwingungen und dessen Erweiterung hervorrief.



Bei der Geschwindigkeit U im starren Rohr konnte sich nämlich im Gummirohr zufolge des Einschnürungskoeffizienten 0,64 keine größere Geschwindigkeit als 0,64 U bilden; im Gummirohr konnte also der Druck über den Druck Null des starren Rohres auf

$$h_1 = \frac{U^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = \frac{U^2}{2g}(1 - 0{,}64^2) = 0{,}59\,\frac{U^2}{2g} = 0{,}59\,h$$

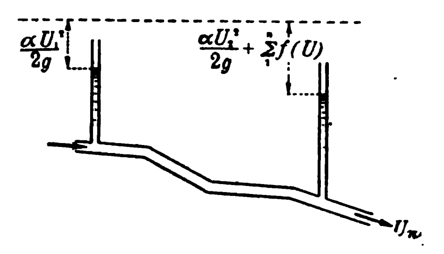
ansteigen. In der Tat trat die Erweiterung immer bei einer Druckhöhe, die größer als 0,59 h war, ein.

14. Der Druckhöhenverlust. Nach dem *Bernoulli*schen Theorem bleibt in vollkommenen Flüssigkeiten für jedes Teilchen die Summe aus Druckhöhe, Meereshöhe und Geschwindigkeitshöhe unveränderlich; bei der Strömung zäher Flüssigkeiten ist das aber nicht mehr der Fall. Bei ihnen nimmt vielmehr diese Summe ab, indem zur Formänderung der Teilchen Arbeit verbraucht wird. Es findet also dadurch, daß mechanische Energie in Wärme umgewandelt wird, ein *Druckhöhenverlust* (Druckverlust, Reibungshöhe, perte de charge, loss of head, perdita di carico) statt. Dieser Druckverlust — der ein für allemal verloren geht — ist von der Geschwindigkeitshöhe, welche wieder in Druck zurückverwandelt werden kann, strenge zu unterscheiden; wenn im folgenden von einem Verlust gesprochen werden wird, wird niemals die Geschwindigkeitshöhe mit als solcher betrachtet werden. Das Kriterium für den Verlust bildet eben, wie gesagt, die Umwandlung in Wärme. *J. Weisbach* fand es zweckmäßig, den Druckhöhenverlust in der Form $\zeta\frac{U^2}{2g}$ zu geben, worin ζ eine unbenannte Zahl, der Widerstandskoeffizient, ist. Das *Bernoulli*sche Theorem erhält damit bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Ungleichmäßigkeit der Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt die Gestalt

$$\alpha\frac{U^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} + \zeta\frac{U^2}{2g} = \text{konst.} \tag{20}$$

Wenn an verschiedenen Stellen, an denen auch die Geschwindigkeiten nicht übereinstimmen, allerlei Druckverluste, z. B. Rohrreibungen,

Eckwiderstände, Stöße, auftreten, wird der Druckverlust zu einer Summe, deren Glieder man am besten in der Reihenfolge angibt, in welcher die Strömung die Hindernisse trifft. Kommen auch Widerstände vor, die nicht dem Quadrate, sondern anderen Potenzen ihres zugehörigen U proportional sind, so geht (20) in den allgemeinen Ausdruck



$$(21)\quad \alpha\frac{U^2}{2g}+z+\frac{p}{\gamma}+\sum_1^n f(U)=\text{konst.}$$

über, in dem f Funktion bedeutet und die Summe $\sum$ über alle n Einzelwiderstände zwischen dem Anfangspunkte und der betreffenden Stelle zu erstrecken ist. Übrigens sind es weniger theoretische Erwägungen als Versuche, welche lehren, in welchen Fällen ein Koeffizient ζ als genug unveränderlich gelten darf und in welchen ein solcher zu stark schwanken würde, um seine Einführung zu rechtfertigen.

15. Das Ähnlichkeitsgesetz. Ersetzt man in den *Navier*schen Gleichungen (14) die Drücke p durch Druckhöhen γh und die Reibungsziffer η durch den sogenannten „kinematischen Reibungskoeffizienten"

$$\nu=\frac{g\eta}{\gamma},$$

von der Dimension Fläche durch Zeit, so nehmen sie die Form

$$\frac{\gamma}{g}X-\gamma\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\cdots\right)+\frac{\gamma\nu}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cdots\right)=0$$

an. Sieht man der Übersichtlichkeit wegen vom ersten Glied ab, so hat man zu unterscheiden

das Druckgefälle $\gamma\frac{\partial h}{\partial x}$,

Trägheitskräfte vom Typus $\frac{\gamma}{g}u\frac{\partial u}{\partial x}$,

Reibungskräfte vom Typus $\frac{\gamma}{g}\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Die Geschwindigkeiten u, v, w und die Druckhöhe sind hierbei als Funktionen der Koordinaten x, y, z gedacht. Wenn man nun einen Vorgang 1 im Modell kennt, bei dem die aufgezählten Kräfte im Gleichgewichte stehen, und man zu einem *ähnlichen* Vorgang 2 übergeht, indem man alle Längen, also im besonderen die Koordinaten im Verhältnis f_l, die Druckhöhen im Verhältnis f_h, die Geschwindigkeiten im Verhältnis f_u, die Eigengewichte im Verhältnis f_γ, die Größen ν im Verhältnis f_ν vergrößert, so bleibt das Gleichgewicht beim Vorgang 2 nur dann ge-

wahrt, wenn alle drei Kraftgattungen gleich stark vergrößert werden, oder wenn

$$\frac{f_\gamma f_h}{f_l} = \frac{f_\gamma f_u^2}{f_l} = \frac{f_\gamma f_\nu f_u}{f_l^2}$$

ist. (Erinnert werde, daß z. B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ die Dimension von $u : x^2$ hat.) Aus der doppelten Gleichheit folgen die Gleichgewichtsbedingungen[1])

(22) $$\frac{f_u f_l}{f_\nu} = 1,$$

(22a) $$f_h = f_u^2.$$

Hier wurde von der Massenkraft X abgesehen. Ist dieselbe die Schwere, so kann man sie (ebenso wie g) als unveränderlich betrachten, und sieht man zugleich von der Reibung ab, so liefert eine ähnliche Betrachtung wie die eben durchgeführte, wenn X sich nicht ändern darf,

(22b) $$1 = \frac{f_h}{f_l} = \frac{f_u^2}{f_l}.$$

Ist keine freie Oberfläche vorhanden, übt also die Schwere keine Wirkung aus und haftet die Flüssigkeit an der Wandung, so tritt das Gesetz (22) in Kraft. Es gilt also z. B. für den Druckverlust in glatten Röhren, für die Oberflächenreibung an Platten, für die Drücke und Kräfte, die Körper in tiefem Wasser ohne freie Oberfläche erfahren, während in bewegtem Wasser bei freier Oberfläche (22b) zur Geltung gelangt. Während bei fehlender Schwerewirkung nach (22) bei ungeänderter Reibungsziffer ($f_\nu = 1$) im Modell die Geschwindigkeiten im *umgekehrten* Verhältnis der Längen zu wählen sind, hat man sie bei Wirkung der Schwere und vernachlässigbarer Reibung nach (22b) *proportional* der *Längenwurzel* anzuordnen.

Für Vorgänge, bei denen sowohl Schwerkraft wie Reibung eine Rolle spielen, ist ein Modellversuch nur richtig, wenn man

$$\frac{f_h}{f_l} = \frac{f_u f_l}{f_\nu} = \frac{f_l}{f_u^2} = 1$$

oder

(22c) $$f_h = f_l, \quad f_u = f_\nu^{1/3}, \quad f_l = f_\nu^{2/3}$$

macht. Nimmt man auch die Schwere als veränderlich an, so hat man statt dessen

(22d) $$\frac{f_h}{f_l} = \frac{f_u f_l}{f_\nu} = \frac{f_g f_l}{f_u^2} = 1.$$

Dies steht in enger Beziehung mit der Forderung gleicher Dimension.

---

1) *H. Blasius*, Z. d. V. deutsch. Ing. 56 (1912), S. 639. Dessen Ableitung schließt an *O. Reynolds*, Papers 2, S. 55 an.

Jede hydraulische Gleichung, welche das Ähnlichkeitsgesetz erfüllt, läßt sich nämlich in der Form

$$F\left[\left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{u l \gamma}{g \eta}\right)\left(\frac{g l}{u^2}\right)\right] = \text{konst.} \tag{22e}$$

anschreiben, oder wenigstens in ihr denken, denn durch (22d) sind h, l usw. derart miteinander verknüpft, daß die Klammerwerte von (22e) konstant bleiben, also auch deren Funktion F. Dabei sind die drei Klammerwerte, wie man sich überzeugen kann, unbenannte Zahlen, haben also gleiche Dimension. Von der Form (22e) ist es dann möglich, zu anderen hydraulischen Gleichungen überzugehen, deren Glieder untereinander dimensionsgleich bleiben. Das Ähnlichkeitsgesetz spricht also nur das allgemeine Gesetz, daß alle Glieder einer Gleichung von mechanischer Bedeutung dimensionsgleich sein müssen, in besonderer Form aus, indem es einen Körper gewisser Gestalt ein Urbild, die übrigen dessen Abbilder nennt.

III. Gleichförmige (von Zeit und Ort unabhängige) Strömung in Röhren.

16. Allgemeines. Die einfachste Art der Wasserbewegung ist die gleichförmige (mouvement uniforme, moto uniforme). Sie erfordert, daß alle Querschnitte untereinander gleich sind, und erfolgt, wenn auch die Geschwindigkeitsverteilung in allen Querschnitten dieselbe ist und sich nicht mit der Zeit ändert. Als einfachste Querschnittsform kann der von Wasser erfüllte Kreis gelten, welcher insofern alle Querschnitte offener Gerinne an Einfachheit übertrifft, als bei ihm der Unterschied zwischen Wandung und Spiegel entfällt. Bei der gleichförmigen Bewegung in Röhren ist die kinetische Energie offenbar in allen Querschnitten die gleiche und unabhängig von der Zeit. Es ist daher die genannte beschleunigende Kraft dem verzögernden Reibungswiderstand der Rohrwand und der Höhenunterschied der Spiegel, bis zu welcher das Wasser in Standröhren aufsteigen würde, dem Druckverluste gleich. Die zwischen den Stellen z und $z + dz$ der Leitungsachse genommene Druckgleichung (20) bzw. (21) nimmt danach bei Einführung eines auf die Längeneinheit bezogenen Widerstandskoeffizienten ζ_1 bei entsprechender Wahl der Vorzeichen die einfache Form

$$\frac{dp}{\gamma} + dz = \zeta_1 \frac{U^2}{2g} ds = f(U)\, ds \tag{23}$$

an, worin ds das Bogenelement der Rohrachse bedeutet. Man nennt den Quotienten

$$\frac{d\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)}{ds},$$

das Gefälle J (relative Gefälle, Druckgefälle, Gefälleverlust der Längeneinheit, perte de charge par unitè de longueur, hydraulic grade)[1]) und hat dann

$$J = \zeta_1 \frac{U^2}{2g} \quad \text{bzw.} \quad = f(U). \tag{23a}$$

Über die Größe des Koeffizienten ζ_1 und seine Abhängigkeit vom Rohrdurchmesser, der Beschaffenheit der Wand und der Flüssigkeit, sowie der Geschwindigkeit U selbst, bzw. über den Bau der Funktion f können nur Versuche Aufschlüsse geben.

Besonders betont werde, daß das Gefälle J der Formeln nicht mit dem Gefälle verwechselt werden darf, in welchem die Röhren selbst liegen. Bei schwacher Rohrneigung stimmt hingegen J mit dem Gefälle der Linie überein, bis zu der das Wasser in offenen Standröhren längs der Leitung ansteigen würde.

Stets ist im nachfolgenden, wenn nichts anderes bemerkt wird, U in m sec^{-1} und der Durchmesser D in m verstanden.

17. Ältere Formeln über das Strömen in Röhren. Das Problem des Ausflusses aus Gefäßen läßt sich experimentell einfacher behandeln als das des Druckverlustes in Röhren. Die Beobachtungen über das Strömen in letzteren gliederte man daher zunächst an jene über den Ausfluß an, indem man die Ausflußmenge für den Fall bestimmte, daß sich an die Öffnung der Gefäßwand ein Rohr anschließt. Bei dieser Versuchsanordnung setzt sich die gesamte Druckhöhe zwischen Gefäßspiegel und freiem Rohrende in die Geschwindigkeitshöhe, den Eintrittswiderstand ins Rohr und den bei kurzem Auslaufstutzen geringfügigen Druckverlust im Rohr selbst um. Zu einem Einblick über diesen konnte man also erst gelangen, nachdem man Beobachtungen an längeren Leitungen angestellt hatte. Der erste, der dies tat, war *C. A. Couplet*[2]) und zwar bei Versailles an fünf, allerdings zum Teil in schlechtem Zustande befindlichen Strängen von 0,11 bis 0,49 m Durchmesser und 580 bis 3000 m Länge. Ihm folgte *Ch. Bossut*[3]), der an Weißblechleitungen von 36 und 54 mm Weite

---

1) Oft bezeichnet man auch das Verhältnis $\frac{d\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)}{dx}$, wo dx die Projektion von ds auf die wagrechte x-Achse, als Gefälle, ebenso wie man auch zuweilen (im Falle stationärer Bewegung) $\frac{d\left(\frac{p}{\gamma} + z + \frac{U^2}{2g}\right)}{ds}$ oder $\frac{d\left(\frac{p}{\gamma} + z + \frac{U^2}{2g}\right)}{dx}$ Gefälle nennt.

2) *P. Couplet des Tartreaux*, Paris, Mém. de l'académie für 1732 (1735), S. 143.

3) *Bossut*, Traité élément. d'hydrodynamique, Paris 1772 und ders. übersetzt von *K. Chr. Langsdorf*, Lehrbegriff der Hydrodynamik 2, Frankfurt a. M. 1792, S. 129.

und bis 58 m Länge beobachtete, daß die Ausflußmengen sich ungefähr umgekehrt wie die Wurzeln aus den Längen verhalten, also die Geschwindigkeiten U wie die Wurzeln aus den Gefällen J wachsen. *Graf L. G. Dubuat*[1]) unternahm neue Versuche und stellte auch eine Formel auf, welche jedoch für die praktische Verwendung zu verwickelt ausfiel. Einfacher ging *R. Woltmann*[2]) vor, der 87 Versuche *Couplets*, *Bossuts* und *Dubuats* heranzog und dessen Ausdruck, soweit er sich nur auf die Rohrreibung bezog, sich als

$$(24)\qquad DJ = 0{,}00124\, U^{1,75} \quad \text{oder} \quad U = 45{,}8(DJ)^{4/7}$$

wiedergeben läßt, während *J. A. Eytelwein*[3]) aus 51 Beobachtungen der drei Genannten

$$(24\text{a})\qquad DJ = 0{,}00159\, U^2 \quad \text{oder} \quad U = 25{,}1(DJ)^{1/2}$$

ableitete, übrigens die Beziehung

$$DJ = 0{,}001303\, U^{35/18} \quad \text{oder} \quad U = 30{,}5(DJ)^{18/35}$$

für noch zutreffender hielt. *R. de Prony*[4]) stellte hingegen auf Grund der nämlichen 51 Versuche von *Couplet*, *Bossut* und *Dubuat*, die schon *Eytelwein* bevorzugt hatte, die Formel

$$(25)\qquad DJ = aU + bU^2 = 0{,}00006933\, U + 0{,}00139304\, U^2$$

auf, welche in Frankreich lange Zeit die maßgebende blieb. Andere Werte von a und b empfahlen *Eytelwein*[5]), *J. F. d'Aubuisson de Voisins*[6]) und *J. Weisbach*[7]), der die Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung von a und b anwandte und außer den genannten 51 Beobachtungen noch eine von *Gueymard*[8]) heranzog. Von der Bauweise von (25)

---

1) *Dubuat,* Principes d'hydraulique, Paris 1779 (Nouv. ed. 1816).

2) *Woltmann,* Beiträge zur hydraulischen Architektur 1, Göttingen 1791, S. 165, 169.

3) *Dubuats* Prinzipien der Hydraulik, deutsch von *Kosmann*, mit Zusätzen von *Eytelwein*, Berlin 1796, S. 86.

4) *R. de Prony*, Recherches physico-mathématiques sur la théorie du mouvement des eaux courantes, 1804, S. 70, 84, auch deutsch von *Langsdorf*, Gießen 1812. Verzeichnis der 51 Versuche auch in *G. Meißner*, Hydraulik, Jena 1878, S. 298. Ähnlich gebaut, aber mit längeren Ausdrücken für a und b ist die Formel von *Th. Young*, Phil. Trans. 1808. Nach *Prony* findet sich der Durchfluß $Q = 0{,}01955\, D^2(-1 + 1077\sqrt{DJ})\ \text{m}^3\,\text{sec}^{-1}$.

5) Berlin, Abhandlungen d. math. Klasse d. Akademie d. Wissenschaften aus den Jahren 1814—15 (1818).

6) *J. F. d'Aubuisson de Voisins,* Traité d'hydraulique, Paris 1834, S. 172; 2. éd., Strasbourg 1840, S. 224.

7) Polytechn. Centralblatt 2 (1840), S. 363.

8) Annales des mines (2) 5 (1829), S. 442.

ging zunächst *G. Hagen*[1]) und später *J. Weisbach*[2]) ab, der nunmehr 11 eigene Versuche den früheren 52 beifügen konnte und die Gleichung

$$(25\text{a})\qquad DJ = \frac{U^2}{2g}\left(0{,}014\,39 + \frac{0{,}009\,4711}{\sqrt{U}}\right) = 0{,}000\,73334\,U^2 + 0{,}000\,4827\,U^{3/2}$$

aufstellte, welche auch gegenwärtig noch stark in Gebrauch steht, während *B. de Saint-Venant*[3])

$$DJ = 0{,}001\,182\,U^{12/7}\quad \text{oder}\quad U = 51{,}00\,(DJ)^{7/12}$$

setzte.

18. Formeln über das Strömen in Röhren von Darcy bis Lang. Schon 1829 hatte *J. F. d'Aubuisson*[4]) gefunden, daß nach *R. de Prony* berechnete Rohre viel zu wenig Wasser lieferten, ohne jedoch die wahre Ursache dieser Erscheinung zu erkennen. Dies blieb *H. Darcy* vorbehalten, welcher bemerkte, daß außer der Lichtweite und dem Gefälle auch die Beschaffenheit der Rohrwandung für den Durchfluß maßgebend sei. Früher hatte man diesen für gleichgültig gehalten und auch die Versuche *Couplets*, *Bossuts* und *Dubuats* hatten nicht das Gegenteil gelehrt, weil der erstere an weiten und rauhen, die beiden letzteren an engen und glatten Rohren maßen. Noch 1869 sagte *G. Hagen*[5]), daß zwar wahrscheinlich an der Röhrenwand eine Wasserschicht hafte, daß deren Dicke aber sehr klein bleibe und über sie hinaus eine Einwirkung auf die Wasserbewegung undenkbar sei. *H. Darcy*[6]) führte seine Versuche mit großer Sorgfalt an 21 Röhren aus Schmiedeisen, Blei, Gußeisen, asphaltierten Guß- und einem Glasrohr aus, deren Weiten von 0,012 bis 0,5 m wechselten, während die beobachtete Strecke — das Glasrohr ausgenommen — stets 100 m lang war. In der Mitte der Strecke wurden nebeneinander drei Wasser- oder (bei größerem Druck) Quecksilber-Piëzometer aufgestellt und durch Leitungen mit der jeweilig zu untersuchenden Röhrenfahrt derart verbunden, daß man den Druck in der Streckenmitte und den beiden Streckenenden ablesen konnte. Der Einlauf erfolgte durch ein Kopfstück, das eine gelochte Platte enthielt,

---

1) Handbuch der Wasserbaukunst, 2. Aufl., S. 186. Üb. d. Einfluß d. Temperatur auf die Bewegung des Wassers, Berlin, Abhandlungen d. Akademie d Wissenschaften 1854, S. 1, Berlin 1853, S 220.

2) *J. Weisbach*, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik 1, Braunschweig 1845, S. 434. Andere Zahlenwerte glaubte *G. Zeuner* empfehlen zu müssen, Civilingenieur (2) 1 (1854), S. 84.

3) *B. de Saint-Venant,* Formules et tables nouvelles, Paris 1851, S. 71.

4) *Darcy* zitiert Annales de physique et de chimie.

5) Berlin, Abhandlungen d. k. Akademie d. Wissenschaften (1869).

6) Paris, Mém. prés. par div. sav. 15 (1858), S. 176 = S. A. S. 36.

und der Ablauf je nach der Durchflußmenge in ein Eichbecken oder in eine der verschiedenen Eichtrommeln. So fand *Darcy*, daß in neuen Gußrohren[1])

$$DJ = \left(0{,}001014 + \frac{0{,}00002588}{D}\right) U^2 \tag{26}$$

oder bei Einführung des Durchflusses Q in $m^3 sec^{-1}$

$$J = \left(0{,}001644 + \frac{0{,}0000420}{D}\right) \frac{Q^2}{D^5}$$

und in gebrauchten doppelt so groß sei; überdies habe man bei Entwurf von Leitungen den Durchmesser um die zu erwartenden Ablagerungen größer als das D der Formel (26) zu machen. Da D ungefähr $\sqrt[5]{J}$ proportional ist, führt die Verdoppelung des Widerstandskoeffizienten nicht auf so bedeutende Vergrößerungen der Rohrweite, als es zunächst den Anschein haben könnte, sondern nur auf ungefähr die 1,15fache Weite. Von den Formeln, die der heute noch, namentlich in Frankreich, stark in Benutzung stehenden *Darcy*schen nachfolgten, ist zunächst die sich durch Einfachheit auszeichnende *P. Dupuits*[2]) anzuführen. Derselbe gab an, daß man bei Berechnung der üblichen Leitungen die Krümmer, Formstücke usw. nicht weiter zu beachten brauche, falls man $Q = 20\sqrt{D^5 J}$ annimmt. *Dupuits* Angabe läßt sich zu folgender kleinen Tabelle ergänzen:

$$\left\{\begin{aligned} Q &= 20\sqrt{D^5 J} = 0{,}785\, D^2 U = 0{,}00000187\, \frac{U^5}{J^2}, \\ D &= 0{,}302\sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}} = 0{,}00154\, \frac{U^2}{J} = 1{,}128\sqrt{\frac{Q}{U}}, \\ J &= 0{,}0025\, \frac{Q^2}{D^5} = 0{,}00154\, \frac{U^2}{D} = 0{,}00137\sqrt{\frac{U^5}{Q}}, \\ U &= 25{,}5\sqrt{DJ} = 1{,}27\, \frac{Q}{D^2} = 14{,}0\sqrt[5]{QJ^2}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Statt der ersten senkrechten Zahlenreihe wendet man zuweilen auch 20,3, 0,3, 0,00243 und 25,8 an.

Umständlicher gebaute Formeln stellten *M. Lévy*[3]) und *Ph. Gauckler*[4]) auf, welche die Formen:

---

1) Ebenda S. 368, 254 — S. A. S. 228, 114.

2) *J. Dupuit*, Traité théorique et pratique de la conduite des eaux, 2. éd., Paris 1865, S. 149. Die in England sehr gebräuchliche Formel von *Th. Box* in seinen Practical Hydraulics, 1. Aufl., London 1867 bis 15. Aufl. 1909 lautet in metrischem Maß $Q = 19{,}89\sqrt{D^5 J}$. Für Drainleitungen benutzt man zuweilen die sogen. *Gieseler*sche Formel $U = 20\sqrt{DJ}$ oder $D = 0{,}332\sqrt[5]{Q^2 J^{-1}}$, welche der Unregelmäßigkeit dieser Leitungen Rechnung trägt.

3) Ann. d. ponts et chauss. (4) 13 (1867[1]), S. 250. Für neue Gußrohre sei $a = 18{,}2$, $b = 0{,}5$, für alte $a = 10{,}25$, $b = 1{,}5$.

4) Ann. d. ponts et chauss. (4) 15 (1868[1]), S. 229.

(28) $U = a\sqrt{DJ}(1 + b\sqrt{D})$ bzw. $\sqrt{U} + \frac{D}{4}\sqrt[4]{U} = a\sqrt[3]{D}\sqrt[4]{J}$

wählten. *C. I. N. Lampe*[1]) sprach sich 1873 auf Grund der alten und eigener Messungen an einer 14140 m langen, 418 mm weiten Leitung für eine Gleichung von der Form

(29) $$U = \lambda D^{\mu} J^{\nu},$$

nämlich für

(29a) $$J = 0{,}0007555 \frac{U^{1,802}}{D^{1,25}}$$

aus. *J. T. Fanning*[2]), dem auch einige amerikanische Erfahrungen zu Gebote standen, blieb bei dem einfachen Ansatz

$$U = \lambda\sqrt{DJ}$$

und stellte zur Ausgleichung seiner Ungenauigkeit eine Tabelle zusammen, die für die in Rohrnetzen häufige Geschwindigkeit von 0,9 m sec^{-1} zutreffen soll, und auf Metermaß umgerechnet für die Werte von $JD^5 Q^{-2}$ nachstehende Zahlen[3]) enthält:

Rohrdurchmesser mm	Wandung rein	Wandung angegriffen	Wandung sehr rauh
254	0,00193	0,00235	0,00287
508	168	198	235
762	149	173	199
1016	134	154	173

Die große Meinungsverschiedenheit, die nach dem Angeführten zurzeit unter den Hydraulikern herrschte, bewog den Verband deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine zur Angabe von Erfahrungen bezüglich der Druckverluste und ihres Wachstums während langer Betriebe aufzufordern. Aus mehreren Städten langten Daten ein, deren Ergebnis *O. Iben*[4]) dahin zusammenfaßte, daß für reine Leitungen die Formel von *Darcy* noch am besten mit der Erfahrung stimme und, wie eine 1,219 m weite Leitung zeige, auch bei größtem Durchmesser noch anwendbar bleibe. Ein Gesetz für die fortschreitende Zunahme des Widerstandes finden zu wollen, sei jedoch bei der Mannigfaltigkeit und Un-

1) Civilingenieur (2) 19 (1873), S. 82.

2) *J. T. Fanning*, A practical treatise on Water-Supply-Engineering, 2. ed., New-York 1878, S. 249.

3) Messungen in Wien an einem Strang von 948 und 869 mm Dmr. reihen sich obige Zahlen gut ein: *E. Bodenseher*, Z. d. öst. I. u. A.V. 59 (1907), S. 461. Formeln von *Neville* und *Hawksley* gibt *W. Humber*, A comprehensive treatise on water-supply, Lond. 1876, S. 80; s. auch *J. Neville*, Hydraulic Tables, London 1860—61.

4) *O. Iben*, Druckhöhenverlust in geschlossenen eisernen Rohrleitungen, Hamburg 1880, S. 60.

regelmäßigkeit der Ablagerungen (Rost, Schlamm, Muscheln), vergebliches Bemühen. Immerhin stellte *A. Frank*[1]) unter Heranziehung der neuen Daten für reine bzw. mit Niederschlägen bedeckte gußeiserne Leitungen

$$(30)\qquad \begin{aligned} DJ &= \left(0{,}000512 + \frac{0{,}0003847}{\sqrt{D}}\right)\cdot U^2, \\ DJ &= \left(0{,}000495 + \frac{0{,}000652}{\sqrt{D}}\right)\cdot U^2 \end{aligned}$$

als neue Formeln auf, deren Anwendung er durch Anfertigung graphischer Tabellen[2]) erleichterte.

Im Jahre 1883 veröffentlichte *Hamilton Smith jun.*[3]) 88 mit glatten Rohren von 13 bis 32 und genieteten von 277 bis 656 mm sorgfältig durchgeführte Versuche, auf Grund welcher *Wehage*[4])

$$(30\text{a})\qquad DJ = 0{,}000673\, U^2 + \left(0{,}00046 + \frac{0{,}0000071}{D}\right) U^{3/2}$$

berechnete.

Dann folgte *H. Lang*[5]), der „mit Berücksichtigung aller bis 1887 veröffentlichter" und 300 eigener Versuche, die Geschwindigkeiten U von 0,004 bis 53 $\mathrm{m\,sec^{-1}}$ umfaßten (falls nur, wie das bei den praktischen Aufgaben der Technik fast stets zutrifft, U größer als eine gewisse Grenzgeschwindigkeit oder kritische Geschwindigkeit ist), sagt, es sei für glatte Rohre (über den Dorn gepreßt oder gezogen, von Glas oder Zinkblech oder innen asphaltiert oder glasiert)

$$(30\text{b})\qquad DJ = \left(0{,}012 + \frac{0{,}0018}{DU}\right)\frac{U^2}{2g} = \left(0{,}000612 + \frac{0{,}0000917}{DU}\right) U^2,$$

für so geringe Unebenheiten und an den Verbindungsstellen, daß der Durchmesser des freibleibenden Querschnittes von D nicht verschieden ist,

$$(30\text{c})\qquad DJ = \left(0{,}020 + \frac{0{,}0018}{DU}\right)\frac{U^2}{2g} = \left(0{,}00102 + \frac{0{,}0000917}{DU}\right) U^2,$$

für wesentlich rauhe oder im Wasser aufquellende Innenfläche, sowie bei mineralischen, pflanzlichen oder tierischen Ablagerungen, welche den Durchmesser von D auf D_1 verringern, angenähert

$$DJ = \left(\frac{D}{D_1}\right)^5 \left(0{,}00102 + \frac{0{,}000917}{DU}\right) U^2,$$

---

1) Civilingenieur (2) 27 (1881), S. 209, 215.

2) *A. Frank*, Die Berechnung der Kanäle u. Rohrleitungen, München und Leipzig 1886.

3) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 12 (1883), S. 119; *Ham.-Smith jr.*, Hydraulics, Lond.-N.York 1886, S 237, 241, 265.

4) *Dinglers* Polytechnisches Journal (6) 2 (1884), S. 89.

5) Des Ingenieurs Taschenbuch 1, herausg. v. akad. Ver. Hütte, 14. Aufl., Berlin 1889, sowie die folgenden Auflagen. Siehe auch unten S. 55.

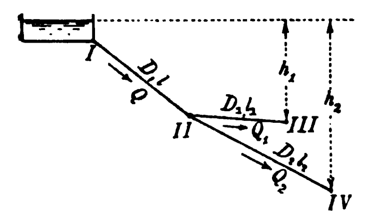
wobei man U so zu rechnen habe, als ob der Querschnitt noch der alte geblieben wäre. Neuerdings fügte *Lang* hinzu, daß seine Aufstellung nur für $D > 0{,}05$ gelte; auch unterschied er schärfer die Grade der Glätte und berücksichtigte die Wassertemperatur, indem er 0,0018

bei	0°	10°	20°	100° C
durch	0,0023	0,0020	0,0018	0,0004

ersetzte[1]).

Beispiele. Zur Lösung der zahlreichen Aufgaben aus der Praxis, bei welchen mehrere Gleichungen gleichzeitig zu erfüllen sind, eignet sich *Dupuits* Ansatz (27), weil der einfachste, am besten. Nachstehende Beispiele[2]) mögen dies erläutern.

1. Der Rohrstrang I II gabelt sich in II in die beiden Zweigleitungen II III und II IV. Bei bekannten Druckhöhen (s. Abb.) h_1 und h_2, Leitungslängen l, l_1 und l_2, Durchmesser D und Durchflüssen Q_1 und Q_2 möge man die Rohrdurchmesser D_1 und D_2 ermitteln. Aus Gl. (27) folgt, allgemein, daß der Druckhöhenverlust $= 0{,}0025$ oder $0{,}00248 \frac{Q^2}{D^5}$ · Rohrlänge ist, und daher hier



$$h_1 = 0{,}0025 \left[\frac{l Q^2}{D^5} + \frac{l_1 Q_1^2}{D_1^5}\right],$$

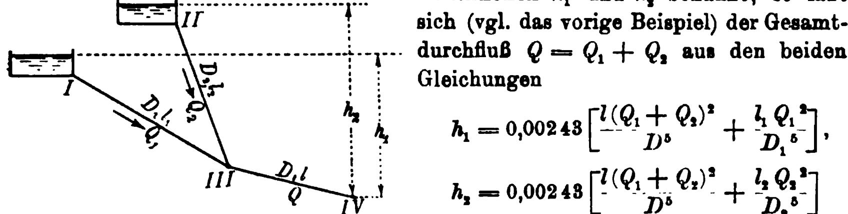
$$h_2 = 0{,}0025 \left[\frac{l Q^2}{D^5} + \frac{l_2 Q_2^2}{D_2^5}\right]$$

sein muß, woraus sich die beiden Durchmesser

$$D_1 = \sqrt[5]{\frac{l_1 Q_1^2}{400 h_1 - \frac{l Q^2}{D^5}}}, \quad D_2 = \sqrt[5]{\frac{l_2 Q_2^2}{400 h_2 - \frac{l Q^2}{D^5}}}$$

ergeben.

2. Wird der Strang III IV aus zwei Hochbehältern gespeist und sind (s. Abb.) die Leitungslängen l, l_1 und l_2, die Durchmesser D, D_1 und D_2, sowie die Druckhöhen h_1 und h_2 bekannt, so läßt sich (vgl. das vorige Beispiel) der Gesamtdurchfluß $Q = Q_1 + Q_2$ aus den beiden Gleichungen



$$h_1 = 0{,}00243 \left[\frac{l(Q_1 + Q_2)^2}{D^5} + \frac{l_1 Q_1^2}{D_1^5}\right],$$

$$h_2 = 0{,}00243 \left[\frac{l(Q_1 + Q_2)^2}{D^5} + \frac{l_2 Q_2^2}{D_2^5}\right]$$

rechnen. Ist beispielsweise $l = 800$ m, $l_1 = 500$ m, $l_2 = 300$ m, $D = 0{,}25$ m, $D_1 = 0{,}15$ m, $D_2 = 0{,}10$ m, $h_1 = 25$ m, $h_2 = 30$ m, so hat man

$$(Q_1 + Q_2)^2 + 8{,}04\, Q_1^2 = 0{,}0126 \quad \text{und} \quad (Q_1 + Q_2)^2 + 36{,}62\, Q_2^2 = 0{,}0151,$$

daher $Q_1 = 0{,}0348\ \text{m}^3\ \text{sec}^{-1}$, $Q_2 = 0{,}0183\ \text{m}^3\ \text{sec}^{-1}$ und $Q = 0{,}0531\ \text{m}\ \text{sec}^{-1}$.

---

1) Ebenda, 21. Aufl. 1911, S. 296.

2) *F. Wittenbauer,* Aufgaben aus der technischen Mechanik 3, Berlin 1911, S. 40.

3. Sind die Durchmesser von Rohrsträngen derart zu wählen, daß die Kosten möglichst klein werden [1]), so verfahre man nach folgendem Muster, bei welchem angenommen wird, daß zwei wagrechte Stränge von den Längen l_1 und l_2 von einem gemeinsamen Pumpwerk unter Aufwendung der Druckhöhe h mit den Durchflußmengen Q_1 und Q_2 versorgt werde. Die Herstellungskosten der beiden Stränge und die Anlage- und kapitalisierten Betriebskosten des Pumpwerkes können dann ungefähr auf $S = k_1(D_1 l_1 + D_2 l_2) + k_2 h(Q_1 + Q_2)$ geschätzt werden, worin k_1 und k_2 konstante Größen bedeuten. Aus Gl. (27) folgt

$$h = 0{,}0025 \frac{l_1 Q_1^2}{D_1^5} = 0{,}0025 \frac{l_2 Q_2^2}{D_2^5}$$

und daher

$$S = k_1 D_1 \left[l_1 + l_2 \sqrt[5]{\frac{l_2 Q_2^2}{l_1 Q_1^2}} \right] + k_2 (Q_1 + Q_2) \cdot 0{,}0025 \frac{l_1 Q_1^2}{D_1^5}.$$

Für $\frac{dS}{dD_1} = 0$ erhält man das Kostenminimum und somit die gesuchten Durchmesser, nämlich

$$D_1 = \sqrt[5]{l_1 Q_1^2} \sqrt[6]{\frac{0{,}0125 k_2 (Q_1 + Q_2)}{k_1 (l_1^{6/5} Q_1^{2/5} + l_2^{6/5} Q_2^{2/5})}}.$$

19. Formeln über das Strömen in Röhren seit Reynolds. Bis vor kurzem schien es, als ob *Lang* der letzte bliebe, der *mehrere* Potenzen der Geschwindigkeiten in den Ausdruck für die Beziehung zwischen ihr, dem Durchmesser D und dem Druckgefälle J einführte, denn schon gelangte ein Nachweis von *O. Reynolds* [2]) zur Geltung, daß J einer Potenz von U proportional sei. Dieser hatte Versuche mit Bleiröhren von 0,615 und 1,27 cm Durchmesser vorgenommen, die weil (im Gegensatz zu Gußeisensträngen) fugenlos sich für Forschungen besonders eignen. Abweichend von den früheren Beobachtern hatte er Strecken von nur 1,5 m Länge, die tadellos runden Querschnitt hatten, untersucht und war bei seinen Messungen bis zu Geschwindigkeiten von 4,7 bzw. 7 m sec^{-1} vorgeschritten. Vor den Beobachtungsstrecken hatte er noch 3 bis 3,3 m Rohr angeordnet, welche die Regelmäßigkeit der Strömung sichern sollten. Sobald U die kritische Geschwindigkeit, von der noch unten die Rede sein wird, übertraf, erhielt er bei Auftragung der Logarithmen von J und U gerade Linien, welche zeigten, daß U proportional einer Potenz von J anwuchs. Aus der Neigung der Geraden ging des Näheren in Formel (28) der Zahlenwert

$$\frac{1}{\nu} = 1{,}723 \tag{31}$$

---

1) Das günstigste Rohrnetz behandelt *Ph. Forchheimer,* Z. d. V. deutsch. Ing. 33 (1889), S. 365, 411; 34 (1890), S. 679; 50 (1906), S. 1954; Z. d. öst. I. u. A.V. 47 (1895), S. 34. Ein Verfahren zur Nachrechnung bei starker Verzweigung gibt *V. Blaeß,* Die Strömung in Röhren usw., Münch.-Berl. 1911.

2) London Phil. Trans. 174 (1883), S. 975 = *O. Reynolds,* Papers on mechanical and physical subjects 2, Cambridge 1900, S. 64.

hervor. *O. Reynolds*[1]) hatte sich ferner überzeugt, daß auch die *Darcy*-schen Versuche gerade Linien ergaben und zwar lieferten sie für

	Glasrohr	Durch Lötung verbundene Bleirohre	Asphaltierte Schweißeisenrohre	Neue Gußrohre	Röhren mit Sinterabsatz	Wieder gereinigte Röhren
$\frac{1}{\nu} =$	1,79	1,79	1,82	1,88	2,0	1,91.

Ähnlich ergaben später Messungen von *D. Fitz Gerald*[2]) an zwei benachbarten, mit Ansätzen bedeckten Gußeisensträngen von 1,219 m Durchmesser im

	Nordstrang	Südstrang	gereinigten Nordstrang
$U =$	$30{,}3\, J^{\frac{1}{2{,}03}}$	$32{,}1\, J^{\frac{1}{2{,}02}}$	$50{,}6\, J^{\frac{1}{1{,}91}}$.

O. Reynolds schloß auch auf den Zusammenhang zwischen U und D, kam zur Ansicht, daß sich deren Exponenten zur Zahl 3 ergänzen und gab als allgemeine Formel[3]), die sowohl für Haarröhrchen als für weite Rohre gelte,

$$J = \frac{B^n}{A(1 + 0{,}0336\,t + 0{,}000\,2212\,t^2)^{2-n}} \, \frac{U^n}{D^{3-n}}, \tag{31a}$$

worin $A = 67\,700\,000$ und $B = 396{,}3$, ferner für Haarröhrchen $n = 1$, für weite Rohre $n = 1{,}7$ bis 2 sei, daher für letztere genügend genau

$$J = \frac{B^{1,7 \text{ bis } 2}}{A} \cdot \frac{U^{1,7 \text{ bis } 2}}{D^{1,3 \text{ bis } 1}} = 0{,}000385 \text{ bis } 0{,}00232 \, \frac{U^{1,7 \text{ bis } 2}}{D^{1,3 \text{ bis } 1}} \tag{31b}$$

zutreffen müßte.

Zunächst versuchte *E. Thrupp*[4]) die Betrachtung *Reynolds'* einer für die Rohrsorten der Praxis passenden Formel zugrunde zu legen. Auf metrisches Maß umgerechnet lautet sie für

	Bleirohr	Glattes Schweißeisenrohr	Genietetes Schweißeisenrohr	Neues Gußeisenrohr	Altes Gußeisenrohr
$1000\,J =$	$1{,}01\,\frac{U^{1,75}}{D^{1,085}}$	$0{,}715\,\frac{U^{1,50}}{D^{1,17}}$	$0{,}888\,\frac{U^{1,825}}{D^{1,285}}$	$0{,}722\,\frac{U^{1,85}}{D^{1,24}}$	$0{,}630\,\frac{U^{2}}{D^{1,26}}$

und zeigt in dieser Form die Ungereimtheit, daß sie für $U = 1$ und $D = 1$ bei neuem Gußrohr J größer als bei altem ergibt.

Eine große Anzahl Versuche stellte *C. H. Tutton*[5]) zusammen, nach dessen Meinung die Formel *Reynolds'* insofern einer Änderung bedürfe, als

$$\mu + \nu = 1{,}17 \tag{31c}$$

1) London Phil. Trans. 174 (1883), S. 981 = Papers 2, S. 104.

2) Amer. Soc. Civ. Eng. Trans. 35 (1896), S. 258.

3) London Phil. Trans. 174 (1883) = Papers 2, S. 97.

4) *A. H. Gibson*, Hydraulics and its applications, Lond. 1911 nach Society of Engineers Transactions for 1887 (1888), S. 231, 262.

5) Journal of the Association of Engineering Societies 18 (1889), S. 191, zi-

sei, während diese Summe nach *Reynolds* zwischen 1 und 1,35 schwanken würde. Aus Auftragungen leitete er schließlich ab, es sei im allgemeinen U für

Zinnröhren	51,25	$D^{0,59}\ J^{0,58}$
Bleiröhren	45,6	„ „
Messing-, Zink- und Glasröhren	44,6	$D^{0,61}\ J^{0,56}$
Gußeisenröhren	43,1	$D^{0,62}\ J^{0,55}$
Holzdaubenröhren	33,4	$D^{0,66}\ J^{0,51}$
Neue gußeiserne oder geteerte Röhren	34,8	„ „
In Gebrauch stehende Röhren	27,8	„ „
Angegriffene Röhren	8,0 bis 21,4	„ „
Aus Schüssen zusammengenietete Röhren	30,8	„ „
Leder- und Gummischläuche	42,8	„ „
Asphaltierte Schweißeisenröhren	45,8	$D^{0,62}\ J^{0,55}$
Große Ziegeldohlen	24,4 bis 34,5	$D^{0,65}\ J^{0,52}$

Enge an *Reynolds* schloß sich *A. Flamant*[1]) an, der, gestützt auf Versuche von *Couplet, Jardine*[2]), *Bossut, Dubuat, J. Leslie*[3]), *J. Simpson*[6]), *H. Darcy, G. H. Bailey*[4]), *G. S. Greene*[4]), *J. M. Gale*[5]), *C. J. N. Lampe, C. G. Darrach*[6]), *v. Ehmann*[7]), *O. Iben*[7]), *Hamilton Smith, F. P. Stearns*[8]), *C. Herschel, C. B. Brush*[9]), *E. C. Clarke*[10]), *Humblot*[11]) und *Meunier*[11]),

tiert nach Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 51 (1903), S. 320; vgl. *H. T. Bovey*, Treatise on Hydraulics, S. 153. Messungen an Holzdaubenröhren machten *C. D. Marx, C. B. Wing* und *L. M. Hoskins* und zwar bei 1,829 m Lichtweite, Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 40 (1898), S. 471, 41 (1899), S. 55, 44 (1900), S. 34; ferner *Th. A. Noble* bei 1,372 m Weite, ebenda 49 (1902), S. 112. Daten über genietete Stränge gibt *R. Weyrauch*, Hydraulisches Rechnen, 2. Aufl., Stuttgart 1912, S. 96 wieder.

1) Ann. d. ponts et chauss. (7) 4 (1892²), S. 301 u. 345. Die amerikanischen Daten entnahm *Flamant: Hamilton Smith jun.*, Hydraulics, London New-York 1886; *E. Ganguillet* und *R. Kutter*, A general formula for the uniform flow of Water translated by *R. Hering* and *C. Trautwine jr.*, New-York London 1889. Eine recht vollständige Zusammenstellung älterer Versuche, denen er einige eigene beifügte, gab *E B. Weston*, Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 22 (1890), S. 28, der ebenda eine Formel für glatte Rohre von $D < 0,09$ aufstellte.

2) *Brewsters* Encyclopaedia (nach *Weston*).

3) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 14.

4) *J. P. Kirkwood*, The Brooklyn Water Works and Sewers, New-York 1867 (nach *Weston*).

5) Trans. Instit. of Eng. in Scotland 12 (1869) (nach *Weston*).

6) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 7 (1878), S. 122.

7) *O. Iben*, Druckhöhenverluste, Hamburg 1880.

8) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 14 (1885), S. 1.

9) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 19 (1888), S. 92.

10) *Eliot-C. Clarke*, Main Drainage Works of the City of Boston, 3. ed., 1888 (nach *Weston*).

11) Erst von *Flamant* veröffentlicht.

$$(32) \qquad U = \lambda D^{\mu} J^{\nu} = \lambda D^{5/7} J^{4/7} \quad \text{oder} \quad DJ = \frac{a_1}{\sqrt[4]{DU}} U^2$$

oder auch

$$(32\text{a, b, c}) \quad D^{5/4} J = a_1 U^{7/4}, \quad Q = a_2 D^{19/7} J^{4/7}, \quad DJ^{4/19} = a_3 Q^{7/19}$$

setzte, wobei er für

	Blei-, Glas-, Weißblechröhren			neue Gußröhren	gebrauchte Röhren
$\lambda =$	75,8	bis	68,1	61,5	54,3
$a_1 =$	0,000 52	„	0,000 62	0,000 74	0,000 92
$a_2 =$	59,1	„	53,5	48,3	42,7
$a_3 =$	0,223	„	0,231	0,240	0,251

angab. Während nach *Tutton* ν abnimmt, wenn μ wächst, stehen nach *A. V. Saph* und *E. W. Schoder* μ und ν in festem Verhältnis. Sie wiesen durch genaue Messungen an sehr glatten Messingrohren von 2,5 bis 52 mm nach, daß auch bei scheinbar gleicher Beschaffenheit zweier Rohre, deren Ergiebigkeit verschieden sein kann und brachten dies durch die Formel[1])

$$(33) \qquad U = 74{,}0\, D^{0,71} J^{0,57} \pm 4\,\%$$

oder

$$J = 0{,}000536 \frac{U^{1,75}}{D^{1,25}} \pm 7\,\%$$

zum Ausdruck. Ähnlich gelte für Röhren mit einigen Ansätzen, wie die Verfasser wesentlich aus fremden Arbeiten schließen,

$$(33\text{a}) \qquad \begin{cases} U = 37{,}7\, D^{0,69} J^{0,55} \text{ bis } 25{,}1\, D^{0,63} J^{0,50}, \\ J = 0{,}001\,35 \dfrac{U^{1,82}}{D^{1,25}} \text{ bis } 0{,}001\,59 \dfrac{U^2}{D^{1,25}} \end{cases}$$

und für die Röhren, mit denen der Ingenieur meist zu tun hat, also als praktische Regel:

$$(33\text{b}) \qquad J = 0{,}000\,53 \text{ bis } 0{,}001\,14 \frac{U^{1,74 \text{ bis } 2,0}}{D^{1,25}}.$$

Die Übereinstimmung von (33b) mit *Flamants* Gleichung (32a), so weit sie sich auf Gußröhren bezieht, also mit

$$J = 0{,}000\,74 \text{ bis } 0{,}000\,92 \frac{U^{1,75}}{D^{1,25}}$$

ist außerordentlich groß, nur verabsäumt *Flamant* für große Rauhigkeit $U^{1,75}$ in U^2 übergehen zu lassen.

Daß ferner der Koeffizient 0,00092 für viele Leitungen zu gering ist, haben Beobachtungen von *U. Masoni*[2]) an der Hauptzuleitung von

---

1) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 51 (1903), S. 306.

2) Bolletino del Collegio degli Ingegneri e Architetti di Napoli 19 (1901).

Neapel ergeben. Derselbe will ihn daher für $D \gtrless 0{,}7$ m durch 0,00138 ersetzt wissen. Andererseits gewährt *Flamants* Formel bei engen Gußrohren keine genügende Sicherheit gegen die nachteiligen Folgen von Ablagerungen, so daß sich *P. Alibrandi*[1]) auf Grund des von *Flamant* zusammengestellten Stoffes veranlaßt fand, statt dessen Gleichung den Ansatz

$$(33\text{c})\quad U = \left(47 - \frac{3}{0{,}07 + 0{,}5\,D}\right)\sqrt{\frac{DJ}{2}} = \left(33{,}23 - \frac{4{,}242}{0{,}14 + D}\right)\sqrt{DJ}$$

zu empfehlen. Bei Bleirohren sind Ablagerungen weniger zu befürchten, aber ausgedehnte Versuche der Stadt Paris lehrten[2]), wie nachstehende Zusammenstellung erläutert, daß die Gl. (32a) mit $a_1 = 0{,}0056$ im allgemeinen etwas zu große Durchflüsse ergibt:

Gefälle	Verhältnis der gemessenen zur berechneten Menge					
J	0,01	0,013	0,016	0,02	0,03	0,04
0,01	1,17	1,13	1,04	0,97	1,07	1,00
0,05	0,95	0,92	0,95	0,94	0,94	0,81
0,125	1,03	0,91	0,97	0,94	1,00	—
0,35	0,91	0,86	0,88	0,83	0,87	—
1,60	0,96	0,89	0,90	0,88	0,90	0,96
2,50	0,97	0,90	0,91	0,93	0,92	0,94

Als einen Sonderfall von (33b) kann man die von *E. Foß*[3]) gegebene Gleichung

$$(33\text{d})\qquad J = 0{,}000758\,\frac{U^{11/6}}{D^{4/3}} = \frac{0{,}000758}{D^{1/12}}\,\frac{U^{11/6}}{D^{5/4}} = 0{,}0011773\,\frac{Q^{11/6}}{D^5}$$

auffassen, weil sie z. B. für $D = 0{,}02$ bzw. 2 m in

$$J = 0{,}00105\,\frac{U^{11/6}}{D^{5/4}} \quad \text{bzw.} \quad 0{,}000715\,\frac{U^{11/6}}{D^{5/4}}$$

übergeht.

Eine andere amerikanische Formel ist die von *W. Cox*, welche in Metermaß[4]) umgerechnet

---

Nr. 8, 9. — Die logarithmische Auftragung einer von *H. B. W. Stent* mitgeteilten, bisher unveröffentlichten Messung an einem 1,067 m weiten, 20,9 km langen Gußrohrstrang der Londoner Wasserwerke, der 19 Monate in Betrieb gestanden war, gab $J = 0{,}00100\,U^{1,7} = 0{,}00105\,U^{1,7} D^{-1,25}$ oder $0{,}00109\,U^{1,7} D^{-1,3}$, also einen auffallend niedrigen Exponenten von U.

1) Ingegneria Civile 1895.

2) *Dariès*, Revue de mécanique 22 (1908¹), S. 525.

3) Journal of the Association of Engineering Societies, Philadelphia, Juni 1894, zititiert nach *H. Hederich* = *G. Meißner*, Hydraulik, 2. Aufl., Jena, S. 360, woselbst auch zugehörige Tafeln.

4) *Hederich*, ebenda S. 359 nach American Machinist, Dez. 1893.

$$J = (0{,}91136\,U^2 + 0{,}34722\,U - 0{,}042333)\,\frac{1}{1000\,D}$$

lautet.

Der Zeit nach folgt nun die von *H. Bazin* für *offene* Läufe aufgestellte, später näher zu besprechende Formel (45)

$$U = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}\sqrt{RJ},$$

welche *G. Fantoli*[1]) mit $R = \frac{1}{4}D$ und $\gamma = 0{,}23$ für die 0,1 bis 1,2 m weiten Gußröhren und mit $\gamma = 0{,}20$ für die 0,4 bis 1,2 m weiten Betonröhren der Apulischen Versorgung empfahl. (Tabelle IV des Anhanges gibt für verschiedene γ und R die Werte des hier einen Bruch bildenden Koeffizienten von $\sqrt{RJ}$.)

Hier möge auch der Ansatz von *T. Christen*[2]) erwähnt werden, der sich zu

(33e) $$U = \lambda D^{0{,}625} J^{0{,}5}$$

umwandeln läßt, also mit (33a) fast übereinstimmt; als Werte von λ gibt *Christen* 31,7 für neue, geteerte Gußrohre, 27,2 für schwache Knollenbildung usw.

Als letzte hierher gehörige Äußerung sei die von *W. C. Unwin* angeführt, der Tabellen ausrechnet[3]), nach welchen für

neue Gußrohre $J = 0{,}000846\,\frac{U^{1{,}95}}{D^{1{,}168}}$ oder $U = 37{,}6\,D^{0{,}599}\,J^{0{,}51}$,

alte „ $J = 0{,}00186\,\frac{U^2}{D^{1{,}16}}$ „ $U = 23{,}2\,D^{0{,}58}\,J^{0{,}50}$,

und für reine, aber nicht ganz neue Rohre J etwa 1,10 bis 1,15mal so groß wie für neue sein soll.

Während *Reynolds* in glatten Bleiröhren auch noch bei 7 m Geschwindigkeit J proportional $U^{1{,}723}$ gefunden hatte, beobachteten *Vidal* und *Kauffmann*[4]), welche bis zu 5 m Geschwindigkeit vorschritten, in einer 0,475 m weiten Leitung, die alle 6 m Flanschenverbindung und dazwischen alle 2 m Nietverbindung mit Überlappung aufwies, eine Zunahme des Exponenten mit der Geschwindigkeit und zwar in auffallend hohem Grade. Sie ermittelten nämlich für den Durchlauf von reinem Wasser in der neuen Leitung

$$J = 0{,}00224\,U^{1{,}5} + 0{,}0003\,U^4$$

1) Relazione di Giudizio ... dell' Acquedotto Pugliese, Genua 1910, S. 6, 31.
2) *T. Christen,* Das Gesetz der Tanslation des Wassers. Leipzig 1903, S. 149.
3) *W. C. Unwin,* A Treatise on Hydraulics, London 1907, S. 323.
4) Ann. d. ponts et chauss. (8) 30 (1907[6]), S. 72.

und ein Jahr später, nachdem der Durchgang von hunderttausend Kubikmetern Baggergut die Innenleibung abgeschliffen hatte,

$$J = 0{,}00215\, U^{1,5} + 0{,}000021\, U^4.$$

Hierzu sei bemerkt[1]), daß den Messungen im neuen Rohr ebenso gut

$$\text{für } U < 0{,}41 \quad J = 0{,}00234\, U^{1,55} = 0{,}00092 \frac{U^{1,55}}{D^{1,25}},$$

$$\text{„} \; U > 0{,}41 \quad J = 0{,}00127\, U^{2,19} = 0{,}00050 \frac{U^{2,19}}{D^{1,25}},$$

und im geglätteten

$$\text{für } U < 0{,}47 \quad J = 0{,}00200\, U^{1,71} = 0{,}00079 \frac{U^{1,71}}{D^{1,25}},$$

$$\text{„} \; U > 0{,}47 \quad J = 0{,}00140\, U^{2,04} = 0{,}00055 \frac{U^{2,04}}{D^{1,25}}$$

entspricht, worin die Einführung von $D^{1,25}$ den Vergleich mit den Formeln von *Flamant*, sowie von *Saph* und *Schoder* erleichtern soll.

E. Sonne[2]) ist der nicht unberechtigten Ansicht, daß sich nur für reine Leitungen eine Formel aufstellen lasse. Er bemerkt, daß bei 0,1 und 0,15 m Durchmesser die von *Iben* mitgeteilten Reibungshöhen durchweg größer als die nach *Darcy* für neue Leitungen berechneten waren, daß bei $D = 0{,}3$ m die Versuche teils größere, teils kleinere Druckverluste als *Darcys* Formel ergaben, und daß bei $D = 0{,}5$ m kein nennenswerter Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnungsergebnis herrschte. Er betont unter anderem, daß nach *Lang* für enge Rohre die J noch kleiner als nach *Darcy* wären und gibt schließlich die eigene Formel

$$DJ = \left(0{,}00087 + \frac{0{,}00012\sqrt{D} + 0{,}00008}{D}\right) U^2 = b\,U^2,$$

die für $U = c\sqrt{\frac{DJ}{4}}$ bei genauerem Rechnen als in der Quelle für

$D =$	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6,
$c =$	44,6	50,8	55,7	59,4	61,0	62,0	62,6	63,1	63,8

ergibt, während die entsprechenden Werte nach *Darcy*

51,1 56,0 59,2 60,9 61,4 61,8 62,0 62,2 62,3

wären. Die Reibungshöhen gebrauchter Leitungen lassen sich nach *Sonne* finden, indem man diejenigen der neuen Leitungen mit einem „Gebrauchsbeiwert" multipliziert und zwar sei im Mittel für

$D =$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0 m
der Gebrauchsbeiwert $=$	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1.

1) Bisher unveröffentlicht.

2) Z. d. V. deutsch. Ing. 51 (1907), S. 1615.

20. Die kritische Geschwindigkeit. Formeln von Biel und Blasius. Es war schon von der Bewegung in Haarröhrchen und von der in weiten Röhren die Rede, aber noch nicht in dem Übergang der einen Bewegungsweise in die andere. *G. Hagen*[1]) hat ihn zuerst beobachtet, indem er bemerkte, daß dem Wasser beigemengte Bernsteinspäne bis zu einer gewissen Geschwindigkeit parallel der Wand durch eine Glasröhre schwammen, bei Überschreiten dieser Geschwindigkeit aber plötzlich in heftig wirbelnde Bewegung gerieten. Der austretende Strahl hatte vorher das Aussehen eines glatten Glasstabes, nachher infolge kleiner Wellen auf seiner Oberfläche das matten Glases; außerdem wurde er während des Überganges zuckend und unruhig.

O. Reynolds[2]) hat die Vorgänge genauer untersucht. Er ließ durch ein Glasrohr mit allmählich verjüngter Öffnung Wasser fließen und führte in die Mitte einen gefärbten Flüssigkeitsfaden. Bei möglichster Ruhe im Speisegefäß strömte das Wasser in Schichten (parallel motion) durch das Rohr, wenn die Geschwindigkeit unterhalb der „kritischen" lag. Nach Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit trat „Wirbelung" (Turbulenz, sinuous motion) ein, welche sich bei gewöhnlicher Beleuchtung durch Färbung des ganzen Wassers zu erkennen gab. Im verdunkelten Raum konnte man beim Lichtblitz elektrischer Funken die einzelnen Wirbelfäden wahrnehmen. Der Wirbel begann nie am Einlauf, näherte sich ihm aber bei Vergrößerung der Geschwindigkeit. Die Wirbel wuchsen nicht allmählich an, sondern traten plötzlich in aller Stärke auf, und *Reynolds* schließt daraus, daß bereits vorher der Zustand sehr labil gewesen sein müsse. Da hiernach für die kritische Geschwindigkeit sowohl die Gleichung der Kapillarbewegung

$$U = \frac{\gamma D^2 J}{32\eta}, \tag{14f}$$

als auch gemäß (27) oder (29) die der turbulenten Bewegung

$$U = \lambda \sqrt{DJ},$$

also

$$\frac{32\eta U}{\gamma D^2} = \frac{U^2}{\lambda^2 D}$$

gelten müßte, war als Form des Ausdruckes für die kritische Geschwindigkeit

$$U_{\text{krit}} = \text{konst.}\ \frac{\eta}{\gamma D}$$

---

1) Berlin, Sitzungsberichte d. preuß. Akademie d. Wiss. 1854. Die erste einschlägige Bemerkung machte *G. Hagen* in Ann. Phys. Chem. (2) 16 (1839), S. 442.

2) London Phil. Trans. 174 (1883), S. 935 = *O. Reynolds*, Papers **2**, S. 71. Proc. of the Royal Institution of Great Britain 1884 = Papers **2**, S. 153.

zu erwarten und zwar fand *Reynolds*[1]):

$$(34)\qquad U_{\text{krit}} = \frac{1}{43{,}79\,(1 + 0{,}0337\,T + 0{,}000\,221\,T^2)\,D}\ \text{m sec}^{-1}.$$

Hier stammt der Nenner vom inneren Reibungskoeffizienten (siehe oben 14a) *Poiseuilles* und bedeutet T wieder die Temperatur in °C, ferner D den Rohrdurchmesser in m. Das gibt z. B. für Wasser von 10 bzw. 12 und 21° C

$$U_{\text{krit}} = \frac{0{,}0168}{D}\quad\text{bzw.}\quad\frac{0{,}0159}{D}\quad\text{bzw.}\quad\frac{0{,}0127}{D}.$$

Eine plötzliche Änderung des Widerstandsgesetzes hat auch *M. Couette*[2]) bei dem Strömen durch Röhren und bei Umlauf einer Trommel unter Wasser in einem nur wenig größeren Gefäße erhoben.

H. T. Barnes und *E. G. Coker*[3]) haben später gefunden, daß die Geschwindigkeit U_{krit} von der ursprünglichen Ruhe des Wassers abhängt und sie vermochten U_{krit} auf etwa den anderthalbfachen Wert von (34) zu steigern; auch nimmt nach ihnen U_{krit} nicht so rasch ab wie $1 : D$. Sie erkannten das Wirbeln, indem sie das Durchflußrohr von außen erwärmten und am Rohrende das Wasser einen in der Rohrachse liegenden Thermometer umfließen ließen. Dessen Temperatur steigerte sich jäh, wenn die Wirbel begannen. Unveränderlich ist nach *Barnes* und *Coker* die „untere Grenzgeschwindigkeit" (wie sie später *Biel* nannte) U_{01}, bei deren Unterschreitung sich anfängliche Wirbel nach längerer gerader Rohrstrecke wieder schlichten. Für sie fand das genannte Forscherpaar denselben Wert

$$(34\text{a})\qquad U_{01} = \frac{1}{278}\cdot\frac{1}{1 + 0{,}0337\,T + 0{,}000\,22\,T^2}\cdot\frac{1}{D}\ \text{m sec}^{-1},$$

den schon *Reynolds* ermittelt hatte. Die sichtbare Änderung der Bewegungsweise stimmt nach letzterem[4]) mit der Änderung des Druckverlustgesetzes überein und zwar gelte unterhalb U_{01} das *Poiscuille*sche Gesetz, dann folge eine Übergangsphase bis zur Geschwindigkeit $1{,}2\,U_{01}$ oder $1{,}325\,U_{01}$, nach welcher J proportional mit $U^{1{,}723}$ wachse. Hiernach ist es für den Eintritt der Turbulenz nicht gleichgültig, wie warm die betreffende Flüssigkeit ist, während, wenn diese einmal wirbelt, wie *Reynolds* betont[5]), der Reibungswiderstand fast nur von ihrer Dichte

1) Papers 2, S. 77.

2) *M. Couette,* Thèse: Études sur le frottement des liquides, Paris 1890 = Ann. Chim. Phys. (6) 21 (1890), S. 433.

3) London, Proc. Roy. Soc. 74 (1905), S. 341 u. f.

4) *O. Reynolds,* Papers 2, Cambridge, S. 64, 66.

5) Ebenda S. 237. *C. A. Coulomb,* der den Widerstand gegen die Bewegung eines Körpers $= au + bu^2$ setzte, hatte bereits gefunden (Paris, Mémoires de

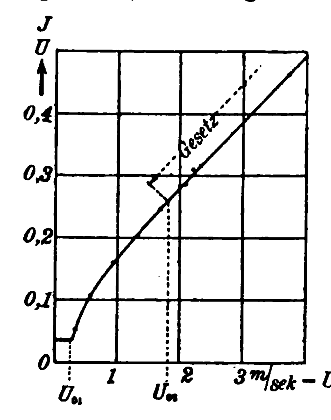
und nicht von ihrer sonstigen Beschaffenheit, also kaum mehr von ihrer Temperatur abhängen soll. *O. Reynolds* hat die Bauweise seines Ausdruckes durch die Forderung dimensionsgleicher Glieder begründet, ferner berechnet, daß bei Strömung zwischen zwei parallelen Wänden im Abstand b das kritische Verhältnis (also die unbenannte Zahl)

$$\text{(34b)} \qquad \frac{Ub\gamma}{\eta g} > 517$$

sein müsse, worin U die mittlere Geschwindigkeit, $\gamma : g$ die Dichte bedeutet und natürlich alle Größen im selben Maßsystem auszudrücken sind[1]).

Ein Ringspalt verhält sich nach Versuchen von *E. Becker*[2]) in bezug auf die Grenzgeschwindigkeit ungefähr so wie ein Rohr mit vollem Kreisquerschnitt vom Durchmesser der Spaltbreite.

R. Biel[3]) schaltet zwischen der „unteren Grenzgeschwindigkeit“ und der „kritischen“ eine „obere Grenzgeschwindigkeit“ U_{02} ein. Die Gültigkeit des *Poiseuille*schen Gesetzes schließe mit der unteren Grenzgeschwindigkeit ab, dann folge ein Übergangszustand für U zwischen U_{01} und U_{02} und für noch größere Geschwindigkeit herrsche ein Gesetz von der schon oben erwähnten Form



$$\text{(25)} \qquad J = aU + bU^2,$$

welches besser als die *Lampe*sche Form

$$\text{(28)} \qquad U = \lambda D^{\mu} J^{\nu}$$

passe, sobald man eben den Übergangszustand aus dem Geltungsbereich ausscheidet. *Biel* trägt zur Erläuterung die Versuchswerte des Bruches $J : U$ auf und zeigt an einer Versuchsreihe von *Saph* und *Schoder*, daß in der Tat die entstehende Linie zunächst parallel zur Abszissenachse verläuft (zwischen O und U_{01}), dann

---

l'Instit. 3, Jahr XI d. Rep.), daß, obwohl a für Öl 17 mal so groß als für Wasser sei, b für beide denselben Wert habe.

1) London, Phil. Trans. Roy. Soc., A. 186 (1894), S. 123 = Papers 2, S. 535; klarer dargestellt in *H. Lamb*, Lehrbuch d. Hydrodynamik, deutsch von *Friedel*, Leipz. Berl. 1907, S. 743. *Lorentz*, Amst. Verh. 6 (1897), S. 28 = *Lorentz*, Abhandlgn. üb. theoretische Physik 1. Leipzig 1906, S. 43. *A. Sommerfeld*, Roma, atti del 4. congresso internazionale dei matematici 3 (1909), S. 116. Diesem gegenüber weist *R. v. Mises* im Jahresber. d. deutsch. Math.-Vereinig. 21 (1912), S. 248 nach, daß Laminarströmung zwischen absolut glatten Wänden immer stabil ist.

2) Mitteilungen üb. Forschungsarbeiten, Heft 48, Berlin 1907, S. 16.

3) *R. Biel*, Üb. den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten, Mitteilungen üb. Forschungsarbeiten, Heft 44, Berlin 1907.

eine Kurve bildet (zwischen U_{01} und U_{02}) und schließlich geradlinig ansteigt. Auch weist er darauf hin, daß bei Auftragung zweier Versuchsreihen mit demselben Rohr, jedoch bei verschiedener Temperatur, die schrägen Geraden parallel sind, also in (25) zwar der Koeffizient a, nicht aber b von der Zähigkeit abhängig sei. Er stellt schließlich für *alle* Flüssigkeiten und sogar Gase die einheitliche Formel

$$1000\,J = \frac{U^2}{R}\left(a + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{b}{U\sqrt{R}}\,\frac{[\eta]}{\gamma}\right) \tag{34c}$$

auf, worin $\frac{[\eta]}{\gamma}$ den Zähigkeitskoeffizienten, dividiert durch das Eigengewicht, beide in absolutem Maß, bedeuten, während der Durchmesser D und der Profilradius[1]) R in m, U in m sec^{-1} auszudrücken sind. Für Rohre nimmt (34c) die Form

$$1000\,J = \frac{4\,U^2}{D}\left(a + \frac{2f}{\sqrt{D}} + \frac{2}{U\sqrt{D}}\,\frac{b[\eta]}{\gamma}\right) \tag{34d}$$

an. Das Übrige besagt nachstehende Zahlentafel

Rauhheitsgrad	I	II	III	IV	V
Grundfaktor a	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
Rauhheitsfaktor f	0,0064	0,018	0,036	0,054	0,072
Zähigkeitsfaktor b	0,95	0,71	0,46	0,27	0,27
$b\frac{[\eta]}{\gamma}$ für Wasser v. 12°	0,0118	0,0088	0,0057	0,0032	0,0032
$b\frac{[\eta]}{\gamma}$ für Wasser v. 100°	0,00294	0,0022	0,00142	0,00084	0,00084
obere Grenzgeschw. U_{02}	$\frac{17[\eta]}{\gamma\sqrt{D}}$	$\frac{11,2[\eta]}{\gamma\sqrt{D}}$	$\frac{5,6[\eta]}{\gamma\sqrt{D}}$	sehr klein.	

Dabei betrifft die Rauhigkeit I gezogenes Messing- und blankes, nicht verdrücktes Bleirohr, II schmiedeisernes Gasrohr, III neue Gußrohre, gestampften Beton, IV rauhe Bretter, gewöhnlichen Beton, V gewöhnliches Ziegelmauerwerk, Quader[2]).

Für Rüböl[3]) ist bei	0°	5°	10°	20°	30°
$[\eta] =$	25,3	rd. 6,27	3,7	1,8	0,99
$[\eta] : \gamma =$	27,7	rd. 6,8	4,07	1,98	1,1 ,

während a und b, wie gesagt, die nämlichen Werte wie für Wasser haben.

Für nicht vollkommen glatte Rohre kann man *Biels* Aufstellung gelten lassen, für vollständig glatte aber widerspricht sie dem Ähnlich-

1) Die Bedeutung des Profilradius siehe unten S. 62; für η wie oben in (14a) in g sec cm^{-2} ist $[\eta] = 981\,\eta$.

2) *Biel*, S. 17.

3) *Biel*, S. 6.

keitsgesetz. Es ist oben S. 34 gezeigt worden, daß bei einer rings eingeschlossenen Flüssigkeit, welche an der Wandung haftet, bei einer Vergrößerung ohne Formänderung, falls

(22) $$\frac{f_u f_l}{f_\nu} = 1,$$

(22a) $$\frac{f_h}{f_u^2} = 1$$

ist, die Vorgänge in den beiden ähnlichen Hohlräumen ähnlich verlaufen. Für zwei Rohre (1 und 2) ohne Rauhigkeitsvorsprünge muß mit h als Druckhöhenverlust, l als Länge und $\nu = g\eta : \gamma$, demnach

$$F\left[\left(\frac{U_1 l_1}{\nu_1}\right), \left(\frac{h_1}{U_1^2}\right)\right] = F\left[\left(\frac{U_2 l_2}{\nu_2}\right), \left(\frac{h_2}{U_2^2}\right)\right]$$

sein, worin F eine vorläufig unbekannte Funktion der beiden Variabeln $\frac{Ul}{\nu}$ und $\frac{h}{U^2}$ bedeutet. Es bleibt also F konstant. Bedenkt man die räumliche Ähnlichkeit, so kann man mit geringer Änderung der Bedeutung von F dies in der Form aussprechen, daß

$$F\left[\left(\frac{UD}{\nu}\right), \left(\frac{hD}{lU^2}\right)\right] = \text{konst.}$$

sei. Das Weitere mußte die Erfahrung lehren und *H. Blasius*, von dem diese Ableitung stammt[1]), fand durch Nachrechnung und Auftragung der Ergebnisse aus eigenen Versuchen an gezogenen Blei-, Messing- und Kupferrohren, die sich hiermit als „vollkommen glatt" erwiesen, sowie solchen von *Saph* und *Schoder*, *Reynolds* und *Lang*, es sei

$$F = \frac{hD}{lU^2} \cdot \left(\frac{DU}{\nu}\right)^{1/4} = 0{,}01613\,.$$

Bei Einführung des Gefälles $J = h : l$ und des Wertes

$$\nu = 0{,}00000115 \text{ m}^2 \sec^{-1},$$

der für 15° C warmes Wasser gilt, stellte sich nämlich mit U in m sec^{-1}, D in m,

(34e) $$J = 0{,}000528 \frac{U^{7/4}}{D^{5/4}}$$

als zutreffend heraus. Daß aber auch der allgemeine Ausdruck

(34f) $$J = 0{,}01613 \frac{\nu^{1/4} U^{7/4}}{D^{5/4}} = 0{,}02855 \frac{\eta^{1/4} U^{7/4}}{\gamma^{1/4} D^{5/4}}$$

der richtige sei, konnte *Blasius* durch Messungen an Wasser von 80° C, sowie durch eine kurze Versuchsreihe belegen, die *Nußelt* mit Druckluft erhoben hat. Die Gleichung (34e) zeigt außerordentliche Ähnlichkeit, mit denen von *Flamant* (32) und *Saph* und *Schoder* (33) für glatte

1) Z. d. V. deutsch. Ing. 56 (1912), S. 639.

Rohre, denn der ganze Unterschied besteht darin, daß bei *Flamant* der Koeffizient zu 0,00052 bis 0,00062 und bei *Saph* und *Schoder* zu 0,000536 ± 7 % angegeben ist. Endlich stimmt (34e) in der Bauweise mit *Reynolds* Gl. (31a) überein, falls man in letzterer $n = {}^7/_4$ setzt. Nur der Zahlenwert ist ein anderer, da für $t = 15^\circ$ C *Reynolds* 0,000466 (statt 0,000528) hätte. In alledem liegt eine Bestätigung, daß *Blasius* tatsächlich das Gesetz für die turbulente Bewegung in glatten Rohren gefunden hat. Mit dimensionsloser Konstanten lautet sie

$$J = 0{,}1582\,\frac{\eta^{1/4}\,U^{7/4}}{g^{3/4}\,\gamma^{1/4}\,D^{5/4}}\,.$$

Die obere Grenzgeschwindigkeit U_{02} *Biels* leugnet *Blasius*; sie komme nur daher, daß die Formel (34c), auf die sie sich bezieht, die Abhängigkeit des Gefälles von der Geschwindigkeit nicht richtig ausdrücke.

Hier möge abermals *H. Lang*[1]) erwähnt werden, der für $D < 0{,}05$ m und Strömen in Schlieren seine oben unter (30b) und (30c) angeführten Gleichungen für nicht genug genau hält und durch eine vollkommenere Formel ersetzt. In ihr kommen Größen $2b$, c und γ_0 vor, und, wie die Nachrechnung zeigt, ist[2])

$$2b = 1{,}76\left(\frac{\eta g}{\gamma}\right)^{1/3} \text{m sec}^{-1/3},\quad c = 10000\,\frac{\eta g}{\gamma}\,\text{m}^2\,\text{sec}^{-1},\quad \gamma_0 = 64\,\frac{\eta g}{\gamma D}\,\text{m sec}^{-1}$$

und müßte sie bei Forderung dimensionsloser Konstanten

$$(34\text{g})\quad J = 0{,}0045 \text{ bis } 0{,}01\,\frac{U(U-U_{01})}{gD} + 0{,}88\,\frac{\eta^{1/3}\,U(U-U_{01})^{2/3}}{g^{2/3}\,\gamma^{1/3}\,D^{4/3}} + 32\,\frac{\eta\,U}{\gamma D^2}$$

$$+ \text{ etwa } 0{,}000025\,\frac{\gamma^{2/3}}{\eta^{2/3}\,g^{4/3}}\,U\,U_{01}$$

geschrieben werden, worin nach der „Hütte"

$$U_{01} = 2040\,\frac{\eta g}{\gamma D}$$

wäre. Nach neueren Auftragungen wachse $U_{01}D$ aber, wenn D zunimmt.

Indem man die Zähigkeit η nach Gl. (14a), das Eigengewicht γ und die Beschleunigung g der Schwere einführt, verwandelt man den Ausdruck (34a) in[3])

$$(34\text{h})\qquad \frac{U_{01}\,D\gamma}{\eta g} = \text{rund } 2000,$$

---

1) „Hütte", 21. Aufl. (1911), S. 293; Neues wird die 22. Aufl. bringen.

2) Die Erklärung von $2b$ gab *Blasius* in den Mitteilungen üb. Forschungsarbeiten, Heft 131 (1913), S. 14, Fußnote. Nach dieser Deutung, welcher *H. Lang* nach brieflicher Mitteilung zustimmt, hat $2b$ für 100° C den Wert 0,0009 oder 0,001. Die übrigen Werte von $2b$ stimmen mit den oben S. 42 angegebenen. Neuerdings machte *Lang* brieflich aufmerksam, daß $2b = \sqrt{\pi\eta g : \gamma}$ ist.

3) *O. Reynolds*, Papers 2, S. 585. Derselbe schreibt übrigens 1900 statt 2000. *Couette* fand im Mittel 2150.

worin 2000 eine unbenannte Zahl ist und nach dem Ähnlichkeitsgesetz für alle Flüssigkeiten gelten soll. *W. M'F. Orr* hat die theoretische Untersuchung wieder aufgenommen, sie auf verschiedenartige Störungsweisen erstreckt und dadurch eine viel niedrigere untere Grenzgeschwindigkeit nämlich[1])

$$\text{(34i)} \qquad \frac{U_{01}\, D\gamma}{\eta g} = 180$$

erhalten. Für viel größere Zähigkeit als die des Wassers fand *S. D. Carothers*[2]) dies bestätigt, indem er bei Druckverlustversuchen mit Texasöl in Röhren von 0,05 bis 0,25 m Durchmesser fand, daß die Geschwindigkeit, bei welcher eine Änderung des Druckverlustgesetzes eintrat, dem U_{01} von (34i) entsprach. Für ein größeres U schien mit dem engl. Fuß und der Sekunde als Grundmaße

$$J = 0{,}4017\, \frac{U^{1,5}}{D^{1,2}} \left(\frac{\eta g}{\gamma}\right)^{0,75}$$

oder bei Vertauschung des Fuß mit dem Meter

$$J = 3{,}409\, \frac{U^{1,5}}{D^{1,2}} \left(\frac{\eta g}{\gamma}\right)^{0,75}$$

zu gelten. Die Nachmessung zweier seiner Figuren liefert in Verbindung mit seinen Zahlenangaben als mittleren Wert des kinematischen Reibungskoeffizienten

$$\nu = \frac{\eta g}{\gamma} = 0{,}004\,112\, \frac{\text{Quadratfuß}}{\text{Sekunde}} = 0{,}000\,382\ \text{m}^2\,\text{sec}^{-1},$$

wonach für das untersuchte zähe Erdöl

$$J = 0{,}009\,32\, \frac{U^{1,5}}{D^{1,2}}$$

sein müßte. Für dieses ν hätte nach *Blasius'* Gl. (34f) $J = 0{,}00226\, \frac{U^{1,75}}{D^{1,25}}$ zu sein.

Das Verfahren von *J. D. Isaacs* und *B. Speed* gab zu Messungen über den Druckverlust in Erdölleitungen Anlaß[3]). Diese Erfinder versehen die Röhren innen mit schraubenförmigen Rillen und setzen dem Petroleum Wasser zu. Sie erzielen dadurch, daß infolge der Fliehkraft das Wasser sich an die Wandung drängt und daß bei dem besten Mengenverhältnis (von 1 : 9) die Geschwindigkeit auf das zehnfache steigt. In

1) Dublin, Proceedings of the Royal Irish Academy, 27. A., 1907/9, S. 138.

2) London, Proc. Roy. Soc. 87 (1912), S. 158. Über Zähigkeit des Erdöles siehe *C. Engler* u. *H. v. Höfer*, Das Erdöl, Bd. 1, Leipz. 1913, S. 49: Benzin ist leichtflüssiger, Brennpetroleum (Leuchtöl) zäher als Wasser; $\eta : \gamma$ ist bei Spindelölen (bei 20° C) 20 bis 50mal, bei sogen. Maschinenölen 50 bis 100mal, bei Zylinderölen 160 bis 250mal zäher als Wasser.

3) Engineering News 55 (1906), S. 641.

der Formel $J = b\,U^2 : D$ zeigte sich für 8 bzw. 3 Zoll Durchmesser also $D = 0{,}203$ bzw. $0{,}076$ für

glattes Rohr,	reines Öl	$b = 0{,}44$ bzw. $0{,}98$,
„ „	1 T. Wasser auf 9 T. Öl	$b = 0{,}26$ bzw. ? ,
Rohr mit Zügen,	1 „ „ „ 9 „ „	b mindestens $= 0{,}0023$ bzw. $0{,}0016$,
		im Mittel $= 0{,}0031$ bzw. $0{,}0021$.

Die Erklärung der Erscheinung wird in § 42 gegeben.

21. Folgerung. Bemerkung zu den Tabellen. Es sind nunmehr zahlreiche Formeln für die Strömung in Röhren mitgeteilt worden und so drängt sich die Frage auf, welche gegebenenfalls den Vorzug verdient. Die Beurteilung wird dadurch etwas erleichtert, daß für ganz glatte Rohre das Bewegungsgesetz hinreichend genau bekannt ist. Zum Zwecke des Vergleiches seien daher die sekundlichen Durchflußmengen in Litern nach einigen der wichtigsten Formeln nachstehend[1]) neben die nach *Blasius* (34e) gültigen gesetzt.

Gefälle J ‰	Dmr. D m	de Prony	Weisb.	Neue Leitung			Dauerbetrieb			Ganz glatt
				Lang	Darcy	Kutter	Darcy	Kutter	Biel	Blasius
0,1	0,04	0,043	0,044	0,041	0,062	0,050	0,044	0,028	—	0,049
	0,1	0,50	0,48	0,52	0,70	0,64	0,49	0,39	—	0,59
	1	192	190	226	244	302	172	231	231	304
2,154	0,04	0,283	0,278	0,251	0,286	0,283	0,202	0,130	0,176	0,282
	0,1	2,90	2,96	2,93	3,23	2,96	2,28	1,79	2,26	3,39
	1	957	1080	1100	1130	1400	799	1070	1110	1750
46,42	0,04	1,42	1,59	1,39	1,33	1,08	0,94	0,60	0,91	1,62
	0,1	14,1	16,4	15,1	15,0	13,7	10,6	8,3	11,0	19,6
	1	4510	5600	5200	5250	6510	2950	4980	5200	10140
1000	0,04	6,70	8,28	7,16	6,17	5,03	4,36	2,79	4,31	9,40
	0,1	66,3	83,7	74,1	69,6	63,7	49,2	38,6	50,7	113,1
	1	21000	27500	24000	24400	30200	13700	23100	24200	58600

Der Durchfluß nach *Flamants* Ausdruck für Dauerbetrieb steht zu dem nach *Blasius* im festen Verhältnis von 0,728 : 1.

Wie zu vermuten, zeigen sich die älteren Ansätze, welche vor Kenntnis der Wichtigkeit der Rauhigkeit entstanden, als unrichtig, das gilt sowohl für die in Frankreich noch beliebte Formel *de Pronys*, wie für die bei uns noch nicht aufgegebene *Weisbachs*, denn für kleine Rohrweiten D nähern sich bei gegebenem J und D ihre Durchflußmengen Q bedenklich denen, die nach *Blasius* nur glatte Rohre liefern, während sie für größere Durchmesser allerdings zutreffendere Q angeben.

---

1) Eine vollständige, von *J. Röbbelen* berechnete bisher unveröffentlichte Tabelle ist im Anhang beigefügt.

Bei den späteren Formeln muß man unterscheiden, ob sie den hydraulischen Vorgang theoretisch richtig darstellen oder dem praktischen Bedürfnis dienen sollen. Beiden Zwecken kann ein und dieselbe Gleichung nicht entsprechen, weil der Techniker bei seinem Entwurfe gewärtigen muß, daß spätere Absätze den Durchlauf verringern, während der Theoretiker sich durch solche Rücksichten nicht beirren lassen darf. Da nun enge Leitungen viel empfindlicher als weite sind, empfehlen sich für den Gebrauch Formeln, die den Forscher nicht befriedigen können, weil sie die engen Leitungen „rauher" als die weiten voraussetzen. Der Mißstand läßt sich vermeiden, wenn man mit *Sonne* und *Lang* erst das theoretische Rohr berechnet und dann zum praktischen übergeht. Damit verzichtet man aber auf eine Tafel, welche für die gebräuchlichen, also nicht beliebig wählbaren Durchmesser sofort den jedem Gefälle entsprechenden Durchfluß angibt. — Als theoretische Formel dachte wohl *Darcy* seine Formel für neue Leitungen, als praktische seine für Leitungen in Dauerbetrieb, kommt aber für neue Röhren bei kleinem J und D auf Mengen Q, die auch ein geschliffener fugenloser Strang nicht durchzulassen vermöchte und für alte Röhren bei großem J und D auf Mengen, die im allgemeinen viel zu klein sind[1]). Theoretisch richtig erscheint, wie schon erwähnt, der Ausdruck *Flamants*; aber gerade darum verleitet er bei großen Geschwindigkeiten in rauhen Röhren zu etwas zu geringen Durchmessern und nimmt er bei engen Röhren auf die Möglichkeit von Ablagerungen keine Rücksicht. Als rein praktische Formeln sind die noch nicht erwähnten von *W. R. Kutter* zu betrachten, die er ursprünglich nur für offene Gerinne empfahl. Aber sie erfüllen am besten die Forderung gleichmäßiger Sicherheit bei Entwurf enger und weiter Stränge bei einfacher Bauweise und so hat die Praxis aus sich heraus nach ihnen gegriffen. Sie lauten[2]) mit $R = \frac{1}{4}D$ für

$$(34\text{j})\qquad \text{neue Rohre}\quad U = \frac{100\,R}{0{,}15 + \sqrt{R}}\sqrt{J} = \frac{100\sqrt{D}}{0{,}3 + \sqrt{D}}\sqrt{\frac{DJ}{4}},$$

$$(34\text{k})\qquad \text{alte}\quad ,,\quad U = \frac{100\,R}{0{,}35 + \sqrt{R}}\sqrt{J} = \frac{100\sqrt{D}}{0{,}7 + \sqrt{D}}\sqrt{\frac{DJ}{4}}.$$

Letztere Formel, die wichtigere der beiden, denn meistens muß man voraussetzen, daß die Leitung einmal „alt" wird, stimmt mit der Angabe *Biels* für Dauerbetrieb überein, was um so mehr hervorzuheben ist, als *Biel* einer der letzten Ingenieure ist, der gestützt auf alle ihm bekannten

1) Die Verwendbarkeit in anderen Fällen bestätigt *O. Iben*, Druckhöhenverlust in geschlossenen eisernen Rohrleitungen, Denkschrift d. Verbandes deutsch. Archit.- u. Ingenieur-Vereine, Hamburg 1880.

2) Siehe unten Formel (41a).

Messungen eine Formel abzuleiten versuchte. Die Gleichung (34 k) wurde denn auch der Tabelle II zugrunde gelegt[1]), welche zum Ermitteln von Rohrweiten dienen soll. Die in ihr verzeichneten Durchmesser sind die vom Vereine deutscher Gas- und Wasserfachmänner festgesetzten und die in ihr aufeinanderfolgenden Gefälle stehen je im *gleichen Verhältnis* 1,0975 zueinander, welches von 1 so wenig abweicht, daß beim Gebrauch der Tabelle *keine Schaltrechnung* nötig ist. Abweichend von Q in den bisher gebrachten Formeln bezeichnet Q (stehend gedruckt) in der Tabelle die tägliche Durchflußmenge in m^3 und q den Durchfluß in $l\,sec^{-1}$. Die Bedeutung von c erhellt aus dem Ausdruck (35) und seine Angabe soll den Vergleich mit der Bewegung in offenen Läufen vermitteln.

Da für weite Stränge ihrer Kostspieligkeit wegen zuweilen gesonderte Erwägungen angestellt werden und für sie nicht allzuviele Messungen vorliegen, so daß dem eigenen Urteil ziemlich viel Spielraum bleibt, sei das vorliegende Beobachtungsmaterial[2]), welches offenbar Röhren verschiedener Rauhigkeit umfaßt, nachstehend zusammengestellt und durch Beifügung von Durchflüssen Q erläutert, welche nach verschiedenen Formeln zu erwarten gewesen wären.

	Sevilla	Cancello Neapel		Buenos-Ayres	St. Paul, Kanal v. Verdon
Durchmesser . . . . mm	533	700	800	1220	1750
Gefälle . . . . ‰	1,513	1,074	2,196	2,0	1,0
Durchfluß, gemessen, ... $l\,sec^{-1}$	201	340	587	1533	3000
Durchfluß berechnet nach					
de Prony . . . . „	164	273	552	1518	2634
Weisbach . . . . „	178	294	616	1716	2942
Darcy (neue Rohre) . . . . „	194	325	651	1794	3137
„ (alte „) . . . . „	137	230	460	1268	2318
Flamant . . . . „	189	326	704	2102	3765
Kutters Gl. (34k) . . . . . „	162	287	591	1767	3290

Beispiel. Es ist eine Quelleitung ABC mit der Höhenkote 390 m üb. M. des Quellstubenspiegels A, der Kote 375 in B, der Kote 330 in C und den Streckenlängen $AB = BC = 1000$ m derart zu entwerfen, daß bei Förderung von $0{,}02\,m^3\,sec^{-1}$ die Druckhöhe in C noch 20 m bleibt. Von A nach B und von B nach C falle das Gelände gleichmäßig. Nach diesen Daten soll der Druckhöhenverlust zwischen A und C $390 - (330 + 20) = 40$ m betragen, so daß bei durch-

1) Ausgerechnet von *J. Röbbelen*, bisher unveröffentlicht.

2) *Dariès*, Nouvelles annales de la construction (6) 1 (1904), S. 182; *F. C.*, Eau et hygiène 1 (1909), S. 53. *C. A. Friend*, Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 119 (1895), S. 271. *U. Masoni*, Bolletino del Collegio degli Ingegneri e Architetti di Napoli 19 (1901), N. 8, 9.

aus gleicher Rohrweite in B der freie Spiegel auf 390 — 20 = 370 m üb. M. sinken oder hier 5 m Unterdruck herrschen würde. Ein solcher wird meist schon deswegen tunlichst vermieden, weil er ein Entweichen der gelösten Gase verursacht und diese dann den Querschnitt verengen. Man nehme daher den freien Spiegel in A 390 m üb. M., in B etwa 377 m üb. M., in C 350 m üb. M. an, hat $Q = 0{,}02\,m^3 sec^{-1}$, $J = 0{,}013$ bzw. 0,027 und bestimmt nach der eben erwähnten Tabelle den Rohrdmr. D für AB zu 0,175, für BC zu 0,150 m.

22. Die Anrostung der Röhren. Praktisch wichtig ist die Frage, wie rasch die Verwandlung eines „neuen" Rohres in ein „gebrauchtes" vor sich geht und was für eine Abnahme der Durchlässigkeit eintreten kann. Sicher ist es, daß diese Abnahme in ungeschützten Rohren stets erheblich ist. *J. Duane*[1]) fand, daß diese sich in sieben Jahren oder weniger mit Knollen (tubercles) bedecken und daß, nachdem die Verkrustung eine bestimmte Stärke erreicht hat, sie nicht weiter schreitet. In einem 1,2 m weiten Rohr sank der Durchfluß auf diese Weise auf 0,7 des ursprünglichen.

Heute wendet man fast ausschließlich mit Asphalt, auch wohl anderen Stoffen ausgekleidete Rohre an. Bezüglich ihrer drückt sich *H. Lang*[2]) wie folgt aus. „Nach wenig Betriebstagen setzt das Wasser eine Schleimschicht ab, die den Nutzdurchmesser um 2 bis 3 mm verringert. Anrostungen (Korrosionen) der inneren Wandung eiserner Rohre treten bei Luftmangel, also bei dauernd gefüllten Druckrohren nicht auf, soweit nicht sauere oder salzige Beschaffenheit des Wassers das Eisen löst; die dennoch oft vorkommenden, bis 60 mm starken Krustenbildungen sind daher auf Ablagerungen aus dem Wasser zurückzuführen. Die Ablagerungsmengen entsprechen der durchflossenen Wassermenge; Sackrohre bleiben krustenfrei; vergrößerte Durchflußgeschwindigkeit hindert die Ablagerung nicht. Die Ablagerungen bestehen aus unregelmäßig auftretenden Knollen, die sich schließlich zu höckeriger Auskleidung der Wandung vereinigen und stellenweise faltenartige Gebilde zeigen. Die Masse besteht aus Brauneisenstein, je nach Herkunft des Wassers vermengt mit Kalk, Muscheln, Algen." Nach Beobachtungen in Frankfurt a. M.[3]) scheint wesentlich die freie Kohlensäure die Knollenbildung zu veranlassen, und zwar, wenn ihr Säurewert den Alkaliwert überragt, d. h. wenn das Wasser sauer reagiert. Es sind daher auch viele Fälle bekannt, in denen gut ausgekleidete Gußrohre 40 bis 50 Jahre so gut wie unverändert in Gebrauch standen[4]). Übrigens ist zwischen den rost-

1) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 28 (1893), S. 1.

2) Hütte, 20. Aufl. 1. Abt. 1908, S. 273.

3) *Schellhase,* Journ. f. Gasb. u. Wass. 1909, S. 823.

4) *F. E. Turneaure* u. *L. H. Russell,* Public Water-Supplies, New-York 1901, S. 510. — In Versailles ist man nach Mitteilung an den Verfasser noch mit

braunen Knollen und dem weißlichen oder gelblichen Sinter zu unterscheiden, den sehr hartes Wasser absetzt und der Rohre ganz zu verstopfen vermag. Daß nach Reinigung der angerosteten Rohre[1]) dieselbe Reibung wiederkehrte, die 15 Jahre früher *F. P. Stearns*[2]) in ihnen gemessen hatte, beobachtete *D. FitzGerald*.

23. Strömen in Schläuchen. Schläuche, wie sie die Feuerwehr benutzt, zeigen recht verschiedene Rauheit. Auch hängt der Widerstand etwas vom absoluten Druck ab, weil sich manche Schläuche unter dem Druck merklich weiten, wodurch sich bei gegebenem Durchfluß Q und Anfangsdurchmesser D, der Gefällsaufwand J vermindert. *J. R. Freeman*[3]) hat für einige Schlauchsorten das c der Formel (35) und die Änderung ΔD des Durchmessers bestimmt, mit welcher, da es sich um kleine Bruchteile handelt, die Veränderung $-\Delta J$ des Gefälles in der Beziehung

$$\frac{\Delta J}{J} = -5\frac{\Delta D}{D}$$

steht. Nachstehend seine Zahlen:

	c $m^{1/2} sec^{-1}$	$\frac{DJ}{U^2}$	Für Drucksteigerung 1 kg cm⁻¹ $\Delta D : D$	$-\Delta J : J$
Glattester Gummischlauch	68,2	0,000860	0,0041	0,020
Gewöhnlicher „	66,7	0,000899	0,0034	0,017
Glattester, innen gummierter Baumwollschlauch	66,5	0,000884	0	0
Sehr rauher, innen gummierter Baumwollschlauch	49,5	0,00163	0,0018	0,009
Gewöhnlicher, nicht gummierter Flachs- oder Hanfschlauch . . .	43,3	0,00213	0,0006	0,003
Bester Lederschlauch	53,9	0,00137	0,0061	0,031

Auch *Weigand*[4]) fand, daß roher Hanfschlauch viel größeren Reibungswiderstand als gummierter leistet, ferner daß eine Fernleitung mit weitem Schlauch und schließlicher Gabelung in zwei engere der Anwendung zweier engen Leitungen beträchtlich vorzuziehen ist, wie dies ja auch Gl. (24) und alle folgenden lehren.

Gußeisensträngen von 500, 325 und weniger mm Weite aus der Zeit Ludwigs XIV. zufrieden.

1) Siehe oben Anm. S. 45; Q war auf 0,78 bis 0,8 des ehemaligen Wertes gesunken.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 14 (1885), S. 1; 35 (1896), S. 258.

3) Ebenda 21 (1889), S. 358, 459; 354.

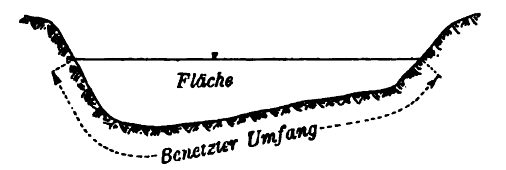
4) Feuerspritze (1905), Nr. 8; Bandaus Feuerwehr-Kalender seit 1906.

IV. Gleichförmige Strömung in offenen Läufen.

24. Ältere Formeln. Während bei Röhren das für die Bewegung maßgebende Gefälle von der Rohrneigung verschieden, nämlich gleich dem Verhältnis des Höhenunterschiedes von Standrohrspiegeln zur Rohrlänge ist, stimmt bei offenen Gerinnen der freie Spiegel mit dem etwa in den Wasserlauf eingetauchter Standrohre überein; in den Ausdrücken für die Wasserbewegung erscheint daher nur mehr das Spiegelgefälle oder die Rösche, also der Sinus des Neigungswinkels des Spiegels gegen die Wagrechte, welcher Sinus, wo nicht Wellungen oder gar Sprünge auftreten, zumeist bei der Kleinheit des Neigungswinkels mit der Tangente vertauscht werden darf. *A. Brahms*[1]) hat es zuerst ausgesprochen, daß das Gefälle dadurch bestimmt wird, daß die beschleunigende Kraft der Schwere dem verzögernden Reibungswiderstande des Bettes gleich sein muß, aber *de Chézy*[2]) scheint der erste gewesen zu sein, der eine brauchbare Formel für die Wasserbewegung in Kanälen aufstellte. Man schreibt sie heute meist in der Gestalt

$$U = c\sqrt{RJ}, \tag{35}$$

worin wieder U die mittlere Geschwindigkeit des Querschnittes bedeutet, also jene Zahl, welche mit der Querschnittfläche multipliziert die Durchflußmenge in der Zeiteinheit liefert, c als Konstante gilt und R den sogenannten Profilradius (rayon moyen, mean hydraulic depth, raggio medio), das ist den Bruch



$$\frac{\text{durchflossener Querschnitt}}{\text{benetzter Umfang}}$$

ausdrückt; bei einem Kreisquerschnitt vom Durchmesser D wäre daher z. B. $R = \frac{1}{4}D$. Es kommt diese Annahme darauf hinaus, in (23) $\zeta_1 = \frac{2g}{c^2 R}$ zu setzen, womit c die Dimension der Wurzel aus der Beschleunigung erhält. **Stets sei im nachfolgenden, wenn nichts anderes bemerkt wird, U in m sec^{-1}, R in m und c in m$^{1/2}$sec^{-1} ausgedrückt.** — Auf Grund genauer eigener Versuche setzte *L. G. Dubuat*[3]) an die Stelle von (35) den Ausdruck

1) *A. Brahms,* Anfangsgründe der Deich- u. Wasserbaukunst, 2 Teile, Aurich 1754 u. 1757, in Teil I, S. 105.

2) In den Mém. de la classe des sciences de l'Inst. de Paris 1813/15 (1818) S. 251 zitiert *P. S. Girard* die Mémoires manuscrits de l'école d. ponts et chaussées mit den Worten: „Il parait que vers l'année 1775 *M. Chézy* recherche le premier . . ."

3) Principes d'hydraulique 1, n. éd., Paris 1816, S. 56, 60.

$$U = \frac{48{,}85\sqrt{R} - 0{,}80}{\sqrt{1:J} - \log\text{nat}\sqrt{(1:J)} + 1{,}6} - 0{,}05\sqrt{R},$$

dessen Anwendung schon an seiner Kompliziertheit scheiterte, während *J. A. Eytelwein*[1]) zur einfachen *Chézy*schen Bezeichnung zurückgriff, sämtliche 36 Versuche *Dubuats* benutzte und auf die einfache Formel

(36) $$U = 50{,}9\sqrt{RJ}$$

kam, die lange in ausgedehntem Gebrauch stand und später von *Courtois*[2]) noch etwas einfacher, als

(36a) $$U = 50\sqrt{RJ} \quad \text{oder} \quad RJ = 0{,}0004\,U^2$$

wiederholt und so in Italien unter dem Namen *Tadinis* besonders bekannt wurde.

Beispiel: Die Geschwindigkeitsformel von *Chézy* gewährt gegenüber anderen den Vorteil, daß ihre Variablen sich in einfacher Weise explizit darstellen lassen. Sie eignet sich daher ebenso zu rein numerischem wie zu algebraischem Rechnen. So kann man aus ihr leicht jenen Bettumriß ableiten, welcher bei gegebener Querschnittsfläche F und gegebenem Gefälle J das Maximum des Durchflusses gewährt.

Nach *Chézy* gilt, wenn p den benetzten Umfang (Perimeter) bezeichnet, für den Durchfluß $Q = Fc\sqrt{FJ:p}$. Hiernach wird Q ein Maximum, wenn p ein Minimum darstellt. Dieser Bedingung entspricht der Kreis oder der Halbkreis.[3]) Für offene Gerinne käme nur das Halbkreisprofil in Betracht, doch wird dieses seiner schwierigen (kostspieligen) Herstellung wegen seltener ausgeführt als das gleichschenklige Trapez. Allgemein ist für ein Trapez von der Seitenneigung α und der Tiefe h der benetzte Umfang

$$p = \frac{F}{h} - h\,\text{ctg}\,\alpha + \frac{2h}{\sin\alpha}.$$

Aus $\frac{\partial p}{\partial h} = -\frac{F}{h^2} - \text{ctg}\,\alpha + \frac{2}{\sin\alpha}$ und $\frac{\partial p}{\partial \alpha} = h\left[\frac{1}{\sin\alpha} - 2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]$ folgt durch Nullsetzung, daß p sein Minimum hat für $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ oder $\alpha = 60^\circ$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $F = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)h^2 = \sqrt{3}\,h^2$. Dann ist die mittlere Breite $\sqrt{3}\,h$, die Sohlenbreite $b = \sqrt{3}\,h - h\,\text{tang}\,30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}h$ und die Böschungslänge auch $= \frac{2}{\sqrt{3}}h$. Von allen Trapezen gleicher Fläche gibt also jenes das Maximum des Durchflusses, welches ein halbes regelmäßiges Sechseck bildet.

In einem Rohr wird nach *Chézy* U bzw. Q bei einer Füllhöhe von $0{,}83\,D$ bzw. $0{,}91\,D$ am größten (vgl. S. 336).

1) *J. A. Eytelwein*, Handbuch der Mechanik fester Körper, Berlin 1801, S. 181.

2) Traité des Moteurs inanimés, 1850, zitiert nach *Darcy-Bazin*, Recherches S. 5. Englische Annahmen, die von $c = 37{,}4$ bis $c = 55$ gehen, führt *G. Meißner* in seiner Hydraulik, 1878, S. 206 an.

3) Vgl. *C. Culmann*, Graphische Statik, 2. Aufl., 1. Bd., Zürich 1875, S. 114.

Um das Jahr 1800 zeigte *C. A. Coulomb*[1]), daß der Widerstand, den langsam bewegte Körper im Wasser erleiden, sich aus zwei Ausdrücken zusammensetzt, von denen der eine der Geschwindigkeit, der andere ihrem Quadrate proportional ist. Dies veranlaßte *P. S. Girard*,[2]) einen Ausdruck für das Gefälle J abzuleiten, nach welchem dasselbe der Summe $U + U^2$ proportional wäre. Gegen den bei Fußmaß gemeinschaftlichen Koeffizienten von U und U^2 hatte *R. de Prony*[3]) Bedenken und er folgerte aus 30 Versuchen *Dubuats* und einem *Chézys*, es sei

$$(37) \qquad JR = 0{,}000\,044\,U + 0{,}000\,309\,U^2,$$

während *Eytelwein* aus den 36 Versuchen von *Dubuat*, 16 von *Brünings*, 4 von *Woltmann* und 35 von *Funk*

$$(37\,\text{b}) \qquad JR = 0{,}000\,024\,U + 0{,}000\,366\,U^2$$

ermittelte,[4]) und auch *G. Hagen*[5]) der Gestalt von (37), wenn auch nicht den Zahlenwerten beipflichtete. Dann aber trat *J. W. Lahmeyer*[6]), der zuerst die alte Form beibehalten hatte, mit einer Untersuchung hervor, in der er sich auf 616 Messungen, darunter auf viele hundert eigene, stützte und für gerade Flußstrecken

$$(38) \qquad U = 49{,}87\,\sqrt[4]{U}\,\sqrt{JR} \quad \text{oder} \quad U = 183{,}56\,\sqrt[3]{J^2R^2}$$

erklärte. Etwas später gab *B. de Saint-Venant*[7])

$$(38\,\text{a}) \qquad JR = 0{,}00040\,U^{21/11} \quad \text{oder} \quad U = 60(JR)^{11/21}$$

an und arbeitete entsprechende Rechentafeln aus, trotz welcher die Formel (38 a) außer Gebrauch kam. *P. v. Rittinger*[8]) glaubte auf Grund vieler Messungen in Gräben und Gerinnen, in denen $U = 0{,}06$ bis 4,4 war,

$$U = 112\,J + 1{,}318\,T$$

---

1) Paris, Mém. de l'Institut national, an IX (1800), S. 246.

2) Rapport etc. sur le canal de l'Ourq, Paris an XII, S. 36, 42.

3) *R. de Prony*, Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes, Paris 1804. Später betrachtete auch *Girard* die beiden Koeffizienten als ungleich, Paris, Mém. de la classe des sciences de l'Institut 1813/15 (1818), S. 256.

4) Berlin, Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften a. d. Jahren 1814—1815 (1818), mathemat. Klasse, S. 172.

5) *G. Hagen*, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1837, S. 129.

6) *J. W. Lahmeyer*, Erfahrungsresultate üb. d. gleichförmige Bewegung des Wassers in Flußbetten u. Kanälen, Braunschweig 1845; Allgem. Bauzeitung 17 (1852), S. 153.

7) Annales des mines (4) 20 (1851), S. 183.

8) Z. d. öst. I. u. A.V. 7 (1855), S. 73.

setzen zu dürfen, worin T die mittlere Tiefe in m bezeichnet. Endlich hat *J. Neville*[1]) eine Beziehung aufgestellt, die in metrischem Maß

$$U = 77{,}3\sqrt{RJ} - 49{,}8\sqrt[3]{RJ} \tag{38b}$$

lauten würde.

25. Formeln über das Strömen in offenen Läufen nach Darcy. Mit der letztgenannten Formel war das Bestreben, eine einheitliche für alle Flußgattungen aufzustellen, zunächst zum Abschluß gelangt, denn durch *Darcys* 1857 veröffentlichte Beobachtungen an Röhren war nachgewiesen, daß die Beschaffenheit der Wandungen von großer Bedeutung für die Geschwindigkeit ist. Wieder war es *H. Darcy* der im Verein mit *H. Bazin* die grundlegenden Versuche durchführte.[2]) Hierzu diente ein 596,5 m langer, 2 m breiter und 1 m tiefer Graben, der vom Kanal von Burgund gespeist wurde und dessen Querschnitt man verschiedentlich durch Einbauten umgestaltete und auf vierfache Weise auskleidete. Es zeigte sich,[3]) daß die mittlere Geschwindigkeit des Wassers bei gleichem Profilradius R und Gefälle J bei rechteckigem, trapezförmigem und dreieckigem Umriß gleich groß ausfiel, während durch einen halbkreisförmigen Querschnitt das Wasser etwa um $^1/_{10}$ schneller als durch einen rechteckigen von gleichem R floß. Diese Erscheinung, auf welche später zurückgekommen werden wird, hat bis jetzt wenig Beachtung gefunden, zum Teil, weil ein halbkreisförmiger oder auch ein ähnlicher Querschnitt bei natürlichen Gerinnen gar nicht und bei künstlichen nur ausnahmsweise vorkommt. *Darcy* starb, ehe er zur Veröffentlichung schreiten konnte, so daß diese *Bazin* allein vornahm, welcher[4]) in *Chézys* Ausdruck $U = c\sqrt{RJ}$ unter Berücksichtigung sonstigen damals vorliegenden Beobachtungsmateriales für

I. glatten Putz, gehobeltes Holz . . $1 : c^2 = 0{,}00015\left(1 + \frac{0{,}03}{R}\right)$,

II. ungehobelte Bretter, sandigen Putz, Quader, Ziegel . . . . $1 : c^2 = 0{,}00019\left(1 + \frac{0{,}07}{R}\right)$,

III. rauhe Wände, Bruchstein . . . . $1 : c^2 = 0{,}00024\left(1 + \frac{0{,}25}{R}\right)$,

IV. Erde . . . . $1 : c^2 = 0{,}00028\left(1 + \frac{1{,}25}{R}\right)$

bestimmte, wozu *Ganguillet* und *Kutter*[5]) noch für

Kies . . . . $1 : c^2 = 0{,}00040\left(1 + \frac{1{,}75}{R}\right)$

1) *J. Neville,* Hydraulic Tables, Coëfficients and Formulae, 3. éd., London 1875

2) Paris, Mém. prés. par div. sav. 19 (1865), S. 162 u. f. = *H. Darcy* u. *H. Bazin*, Recherches hydrauliques 1, Paris 1865.

3) Recherches, S. 17.

4) Recherches hydrauliques 1, S. 130, 134, 135, 142.

5) Z. d. öst. I. u. A. V. 21 (1869), S. 11.

hinzufügten. Etwa um dieselbe Zeit wie *Bazins* Abhandlung erschien der Bericht über großartige Messungen, welche *A. A. Humphreys* und *L. H. Abbot*[1]) am Mississippi vorgenommen hatten und aus denen sie

$$(39)\qquad U = \left\{\sqrt{\frac{0{,}002\,338}{\sqrt{R}+0{,}457}} + \sqrt{68{,}72\,R_1\sqrt{J}} - \sqrt{\frac{0.002\,383}{\sqrt{R}+0{,}457}}\right\}^2$$

ableiteten, worin R_1 den Bruch, Querschnitt durch Summe von benetztem Umfang und Spiegelbreite bedeutet, also bei breiten Strömen zu 0,5 R wird. Da das letzte Glied recht klein ist, läßt sich (39) zu

$$(39\,\mathrm{a})\qquad U = 5{,}0 \text{ bis } 5{,}7\,\sqrt{R}\sqrt[4]{J}$$

kürzen, wobei 5,0 für kleine R, 5,7 für große R gilt. Die Messungen, welche, mit Doppelschwimmer vorgenommen und daher ungenau, damals für sehr genau galten, erweckten den Wunsch, einen Ausdruck zu finden, der sowohl für kleine Rinnsale als auch für gewaltige Ströme passe. Dies taten, jedoch ohne Rücksicht auf den Umstand, daß sich am Mississippi c anscheinend im entgegengesetzten Sinn von J änderte, *Ph. Gauckler*,[2]) der für

$$(40)\qquad \begin{array}{lll} J > 0{,}0007, & U = \lambda_1 R^{4/3} J & (\text{oder } c = \lambda_1 R^{5/6} J^{1/2}), \\ J < 0{,}0007, & U = \lambda_2 R^{2/3} J^{1/2} & (\text{oder } c = \lambda_2 R^{1/6}), \end{array}$$

worin λ_1 und λ_2 von der Rauhigkeit abhängen, und *K. R. Bornemann*,[3]) der für nicht zu kleine Gefälle

$$(40\,\mathrm{a})\qquad U = \lambda_3 R^{4/3} J^{4/5} \quad (\text{oder } c = \lambda_3 R^{5/6} J^{3/10})$$

mit λ_3 in Abhängigkeit von der Rauhigkeit setzte, aber beide hatten wenig Erfolg. Um so häufiger wurde und wird von der Formel der schweizerischen Ingenieure *E. Ganguillet* und *W. R. Kutter*[4]) Gebrauch gemacht, welche von der Ansicht[5]) ausgingen, daß in

$$(35)\qquad U = c\sqrt{RJ}$$

---

1) *A. A. Humphreys* und *H. L. Abbot*, Report upon the physics and hydraulics of the Mississippi River, Philadelphia 1861, auch deutsch von *H. Grebenau*, Theorie der Bewegung usw., München 1867.

2) Ann. d. ponts et chauss. (4) 15 (1868), S. 229.

3) Zivilingenieur (2) 15 (1869), Sp. 42.

4) Z. d. öst. I. u. A. V. 21 (1869), S. 6 u. 46 = *E. Ganguillet* u. *W. R. Kutter*, Versuch zur Aufstellung einer .... Formel für die gleichförmige Bewegung des Wassers, Bern 1877. — Die Formel, welche *P. J. Flynn* seinen Tafeln (Flow of Water in Open Channels etc., New-York 1886) zugrunde legt, weicht von (41) nur dadurch ab, daß er J im Ausdruck für c immer = 0,001 setzt. Andere Abweichungen machten nach *T. C. Elkin* (Water Pipe and Sewer Discharge Diagrams, London 1908, S. 4), *Jackson* und *Moore*.

5) *W. R. Kutter*, in Allgem. Bauzeitung 35 (1870), S. 239.

c stets von der Rauheit abhänge, aber um so weniger, je größer R ist, c bei Zunahme von R wachse und zwar um so langsamer, je größer R ist, c mit der Zunahme des Gefälles J bei glatten, rechteckigen, nicht sehr großen Gerinnen und Erdkanälen zunehme, dagegen bei rauheren, rechteckigen Gerinnen und in Bächen, Flüssen oder gar Strömen, den amerikanischen Messungen gemäß, abnehme. Dementsprechend stellten sie die Gleichung

$$U = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{J}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{J}\right)\frac{n}{\sqrt{R}}} \sqrt{RJ} \tag{41}$$

auf, welche sie an 210 Messungen (darunter 16 von *Humphreys* und *Abbot*, 97 von *Bazin*) prüften, die an allen Arten Wasserläufe vom Mississippi bis zu einer Wildbachschale (6 Messungen von Kutter) vorgenommen waren. Mit Rücksicht auf die Rauhigkeitsziffer n teilten *Ganguillet* und *Kutter* die Wasserläufe in folgende sechs Kategorien

		n	$1:n$
I.	Kanäle, sorgsam gehobeltes Holz oder glatter Zementputz	0,01	100
II.	Kanäle, Bretter	0,012	83,33
III.	Kanäle, Quader oder gut gefügte Ziegel . . .	0,013	76,91
IV.	Kanäle, Bruchsteine	0,017	58,82
V.	Kanäle in Erde, Bäche und Flüsse	0,025	40,00
VI.	Gewässer mit gröberem Geschiebe und Pflanzen	0,030	33,33.

Für halbkreisförmigen Querschnitt sei dann noch, was meistens übersehen wird, c um fünf bis sechs Einheiten zu erhöhen.[1]) Für $R = 1$ m wird nach (41) stets $c = 1 : n$, womit n definiert erscheint. Die Verfasser erleichterten die Anwendung von (41) durch eine graphische Darstellung[2]), welche darauf beruht, daß, wenn man

$$z = 23 + \frac{1}{n} + \frac{0{,}00155}{J},$$

$$x = \left(23 + \frac{0{,}00155}{J}\right) n$$

setzt,

$$c = \frac{z\sqrt{R}}{\sqrt{R} + x}$$

wird, und dann bei Auftragung von x und z als Abszissen und Ordinaten, die Linien von konstantem J Hyperbeln, die von konstantem n gerade Strahlen geben. Verbindet man bei bekanntem J und n den Schnittpunkt der betreffenden J-Hyperbel mit dem betreffenden n-Strahl mit

1) Ebenda S. 239.

2) Nebst der Zahlentafel III im Anhang beigefügt.

dem auf der Abszissenachse gelegenen Punkte von der Abszisse $-\sqrt{R}$, so schneidet die neue Gerade die Ordinatenachse in der Entfernung c vom Ursprung. Der Wert der graphischen Darstellung liegt neben der Wegschaffung der Rechnung darin, daß man sofort erkennt, mit welch großer Ungenauigkeit man arbeitet, wenn man die Rauhigkeitsziffer n nur angenähert kennt. In der Tat kommt es praktisch wesentlich auf die richtige Wahl der Ziffer n an, zu deren Schätzung weiter die Angabe zahlreicher Messungen folgen wird. Eine meist als *Kutter*sche Formel bezeichnete Abkürzung von (41), nämlich

$$U = \frac{100\sqrt{R}}{b+\sqrt{R}}\sqrt{RJ} = \frac{100\,R}{b+\sqrt{R}}\sqrt{J}, \tag{41a}$$

ist besonders für die Berechnung städtischer Siele (Unratskanäle) beliebt, wobei nach *K. Baumeister*[1]) für glasierten Ton und unverrostetes Eisen $b = 0{,}27$, für unreines Wasser und älteres ausgefugtes Ziegelmauerwerk $b = 0{,}45$ zu nehmen sei. *M. Knauff*[2]) berechnete ein gemauertes Sielnetz nach der Formel

$$U = \frac{103{,}7\sqrt{R}}{0{,}3+\sqrt{R}}\sqrt{RJ}, \tag{41b}$$

ein Tonröhrennetz hingegen nach

$$U = \frac{114\sqrt{R}}{0{,}26+\sqrt{R}}\sqrt{RJ}. \tag{41c}$$

Die Messungen von *Humphreys* und *Abbot* veranlaßten auch *G. Hagen*[3]), nachzusehen, ob sie nicht einer einfachen Beziehung entsprächen, und er fand in der Tat als solche

$$U = 2{,}425\,R^{1/2}J^{1/4} \quad \left(\text{oder } c = \frac{2{,}425}{J^{1/4}}\right). \tag{42}$$

Später[4]) ersetzte er unter Heranziehung von Beobachtungen an anderen Strömen und Flüssen (42) durch

1) Zeitschr. f. Baukunde 7 (1884), Sp. 61, Handb. d. Baukunde, 3. Abt., 3. Heft, Berlin 1890 = *K. Baumeister*, Städtisches Straßenwesen, S. 250. Gl. (41a) für Wasserrohre siehe oben S. 58.

2) Gesundheitsingenieur 10 (1887), S. 15; 19 (1896), S. 400. *Th. Hennell* (Hydraulic and other tables, 2. ed., London u. New-York 1901, S. 6) fand bei Messungen in langen glasierten Tonrohrleitungen, welche viertel- bis drittelvoll liefen, daß bei den verschiedensten Neigungen die Gl. (41) mit $n = 0{,}013$ gut entsprach; bei einem Siel von 1,52 m Höhe übertraf die Geschwindigkeit aber beträchtlich das U der Formel.

3) Berlin, Abhandlungen der k. Akademie d. Wissenschaften, Jahrg. 1868.

4) *G. Hagen*, Untersuchungen üb. die gleichförmige Bewegung des Wassers, Berlin 1876, S. 79, 63.

(42 a) $$U = 3{,}34\, R^{1/2} J^{1/4} \quad \left(\text{oder } c = \frac{3{,}34}{J^{0,5}}\right)$$

und fügte für kleine Gerinne

(42 b) $$U = 4{,}9\, R J^{1/4} \quad \left(\text{oder } c = \frac{4{,}9\, R^{0,5}}{J^{0,3}}\right)$$

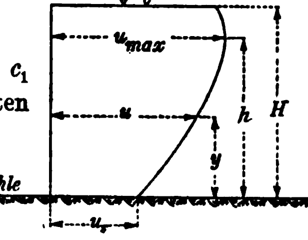
hinzu, wobei er trotz der Arbeiten von *Darcy* und *Bazin* nicht einmal zwischen Holz und Erde bei künstlichen Gerinnen unterscheiden zu sollen glaubte. Endlich bewogen ihn Messungen von *A. Cunningham*[1]) am Gangeskanal (derselbe ist 30 m breit, 3 m tief und fällt 1 : 40000 bis 1 : 3165) für so große und dabei regelmäßige Läufe

(42 c) $$U = 43{,}7\, R^{2/3} J^{1/2} \quad (\text{oder } c = 43{,}7\, R^{1/6})$$

zu bewerten.

Eine ziemlich willkürliche Ableitung unternahm *P. E. Harder*. Derselbe schloß zunächst, daß mit der Entfernung y von der Sohle die Geschwindigkeit u nach dem Gesetze

$$u = u_s + \sqrt{c_1 J(hy - \tfrac{1}{2} y^2)}$$



zunehme, wobei u_s die Sohlengeschwindigkeit, c_1 eine Konstante und h die Höhe des schnellsten Fadens über der Sohle bedeutet. Zwischen der Sohle und der Stelle h läuft dann sekundlich pro Meter Flußbreite die Wassermenge

$$\int_0^h u\,dy = u_s y + \sqrt{\frac{c_1 J}{2}} \left\{\frac{y-h}{2}\sqrt{2hy - y^2} + \frac{h^2}{2} \arcsin \frac{y-h}{h}\right\}_0^h$$
$$= h u_s + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \sqrt{c_1}\, h^2 \sqrt{J},$$

so daß für den betreffenden Streifen die mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{1}{h}\int_0^h u\,dy = u_s + \frac{\pi\sqrt{c_1}}{4\sqrt{2}} h \sqrt{J}$$

wäre. Einen ähnlichen Ausdruck findet *Harder*[2]) für den ganzen Querschnitt bis zum Spiegel, der die Höhe H über der Sohle habe, nämlich

(43) $$\frac{1}{H}\int_0^H u\,dy = u_s + c_2 H \sqrt{J},$$

---

1) *A. Cunningham*, Hydraulic experiments at Roorkee 1874/5, Roorkee 1881; gekürzt in Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 71 (1883), S. 1.

2) *Harder*, Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen, Hamburg 1878, S. 46, 93.

worin c_2 eine Konstante. Da nun der Sohlenwiderstand proportional u_s^2 vorausgesetzt werden darf, so gilt neben (43), weil der Sohlenwiderstand bei gleichförmiger Bewegung der Gewichtskomponente HJ gleich sein muß, mit c_3 als neue Konstante

(43a) $$c_3 u_s^2 = HJ \quad \text{oder} \quad u_s = \sqrt{HJ} : c_3$$

und daher nach Vereinigung von (43) mit (43a) bei Übergang zum ganzen Querschnitt

(43b) $$U = c_4 \sqrt{RJ} + c_5 R \sqrt{J}.$$

Die Konstante c_5, welche *Harder* als gleichbleibend betrachtet, ermittelte er zu 7,254, während für Zement $c_4 = 70{,}5$, für Quader und Ziegel $c_4 = 56$ und für Erde und Bruchstein $c_4 = 36{,}27$ sein soll.

G. Lavale[1]) führte die mittlere Tiefe T und in eigentümlicher Weise die Breite B des Spiegels in seine Formel ein und setzte die

größte Geschwindigkeit $\sqrt[36]{T^{17}} = 23 \sqrt[9]{B} \sqrt[36]{T^7} \sqrt[9]{J^4}.$

R. Manning[2]) wiederholte 1890 die zweite *Gauckler*sche Gleichung (40), wobei er aber λ_2 mit den *Ganguillet-Kutter*schen Zahlen $\frac{1}{n}$ vertauschte, so daß er

(44) $$U = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} \quad \left(\text{oder } c = \frac{1}{n} R^{1/6}\right)$$

erhielt und beispielsweise für Werksgräben mit Bruchsteinverkleidung $58{,}82\, R^{2/3} J^{1/2}$ hat. Er gibt an, daß seine Formel, nach welcher c vom Gefälle unabhängig wäre, sich ebensogut wie die von *Ganguillet* und *Kutter* den von letzteren benutzten Messungen anschließe; ihrer größeren Einfachheit wegen wird daher (44) auch vielfach empfohlen. Für Ströme gibt *Manning*

(44a) $$c = 34\left(1 + \frac{\sqrt{R}}{4} - \frac{0{,}03}{\sqrt{R}}\right),$$

womit er ausspricht, daß ihre Rauhigkeit nur von der Tiefe abhänge.

H. Bazin[3]) tadelte später an seinen ersten Formeln, daß sie für verschiedene Rauheit bei wachsendem Profilradius R auf verschiedene Koeffizienten c der Gleichung (35) führen, während doch bei wachsender Tiefe die Beschaffenheit der Oberfläche an Bedeutung verlieren müsse. Indem er den Zuwachs berücksichtigte, welchen der Bestand an brauch-

1) *J. Rapp*, Unsere natürlichen Wasserläufe. Weilheim 1883.

2) Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland 12 (1890), S. 68. Dementsprechend nimmt (nach *K. Thumm*, Sonderkatalog f. d. Sädtereinigung, ... Hygiene-Ausstellung Dresden 1911, S. 137) *W. Lindley* für Eiformsiele verschiedener Füllhöhe $1000\,J = 0{,}25\, U^{1,8} : R^{1,25}$ an oder umgerechnet $U = 100{,}3\, R^{0,094} J^{0,556}$. *C. Lundgren* (Teknisk Tidskrift 1904) weicht von Gl. (44) nur ab, indem er R den Exponenten $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log (1000\, n)$ erteilt.

3) Ann. d. ponts et chauss. (7) 7[4] (1897), S. 55.

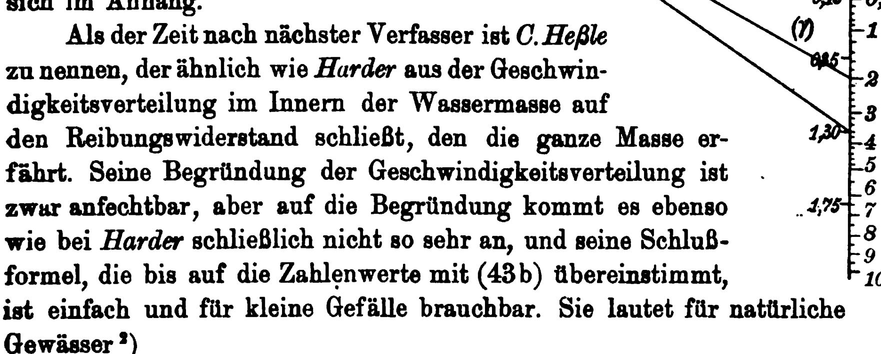
baren Messungen seit seiner ersten Veröffentlichung erfahren hatte, entschied er sich nunmehr für den neuen Ausdruck, der eigentlich die vereinfachte *Kutter*sche Formel (41 a) mit 87 statt 100 im Zähler ist,

$$U = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \sqrt{RJ}, \tag{45}$$

in welchem γ von der Rauheit abhängt und für

glatten Putz, gehobeltes Holz	0,06
Holz, Quader, Ziegel	0,16
Bruchsteinmauerwerk	0,46
Pflaster, regelmäßiges Erdbett	0,85
Erdkanäle üblichen Zustands	1,30
Erdkanäle mit besonderem Reibungswiderstand	1,75

ist. Die Berechnung nach (45) wird wesentlich durch Benutzung des beistehend wiedergegebenen Abakus von *M. d'Ocagne*[1]) erleichtert. Eine Gerade, welche die jeweiligen Punkte der (lotrechten) Geraden γ und der Kurve R verbindet, schneidet die (zweite lotrechte) Gerade S in einem Punkte, der mit dem betreffenden Punkte der (wagrechten) Geraden U verbunden, einen Strahl liefert, der auf der Skala J (sie ist auf derselben Geraden wie die γ aufgetragen) das dem R und U entsprechende J trifft. Die beiden schrägen Geraden der Figur deuten beispielsweise an, wie man für $\gamma = 1{,}30$, $R = 1{,}60$ m $J = 0{,}002$ die zugehörige Lösung $U = 2{,}40$ findet. Eine Tabelle (IV) befindet sich im Anhang.



Als der Zeit nach nächster Verfasser ist *C. Heßle* zu nennen, der ähnlich wie *Harder* aus der Geschwindigkeitsverteilung im Innern der Wassermasse auf den Reibungswiderstand schließt, den die ganze Masse erfährt. Seine Begründung der Geschwindigkeitsverteilung ist zwar anfechtbar, aber auf die Begründung kommt es ebenso wie bei *Harder* schließlich nicht so sehr an, und seine Schlußformel, die bis auf die Zahlenwerte mit (43b) übereinstimmt, ist einfach und für kleine Gefälle brauchbar. Sie lautet für natürliche Gewässer[2])

$$U = 25(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{R})\sqrt{RJ} = 25\sqrt{RJ} + 12{,}5R\sqrt{J}. \tag{46}$$

---

1) Ann. d. ponts et chauss. (7) 8¹ (1898), S. 307.

2) Z. f. Gewässerkunde 2 (1899), S. 31.

Beispiel. Der benetzte Umfang eines Gerinnes vom Querschnitt F besteht aus den aufeinanderfolgenden Längen l_1 und l_2, für welche *Bazins* $\gamma = \gamma_1$ und γ_2 ist. Es ist die Geschwindigkeit U für ein Gefälle J zu berechnen. Da man bei gleichmäßig rauhem Umfang nach *de Chézy* $J = \frac{U^2(l_1+l_2)}{Fc^2}$ hätte, gilt hier mit den Koeffizienten c_1 und c_2 folgerichtig $J = \frac{U^2}{F}\left(\frac{l_1}{c_1^2} + \frac{l_2}{c_2^2}\right)$ oder

$$U = 87\sqrt{FJ} : \sqrt{l_1\left(1+\frac{\gamma_1}{\sqrt{R}}\right)^2 + l_2\left(1+\frac{\gamma_2}{\sqrt{R}}\right)^2}.$$

Diese Annäherungsformel wird unanwendbar, wenn man keine einheitliche Geschwindigkeitsverteilung voraussetzen darf.

26. Neuere Formeln ohne Rauhigkeitsziffer. Viele der bisher genannten Forscher waren bestrebt, für natürliche Wasserläufe eine einzige Formel mit unveränderlichem Koeffizienten aufzustellen, und zeigten hiermit, daß sie diese Aufgabe für lösbar hielten, es hat aber erst *R. Siedek*[1]) ausgesprochen, daß in einem natürlichen Lauf die Rauhigkeit von seinem Charakter abhänge, also durch seine Breite, Tiefe und Neigung bereits bestimmt und daher eine Rauhigkeitsziffer in der Geschwindigkeitsformel entbehrlich sei. Zu dieser Erwägung kam die weitere, daß erfahrungsgemäß die Rauhigkeit, soweit sie in der *Ganguillet-Kutter*schen Gleichung als Zahl n erscheint, auch im selben Fluß — wie oben erwähnt — mit dem Wasserstande stark schwankt, man sie also nicht einmal von vornherein angeben kann. In der Tat verändert ja ein Fluß die Oberfläche seines Bettes fortwährend, welchem daher nicht wie vielen künstlichen Gerinnen eine bestimmte Rauhigkeit ein für allemal zukommt. *Siedek*, der auch darin von seinen Vorgängern abweicht, daß er statt des Profilradius die mittlere Tiefe in Betracht zieht, geht vom sogenannten normalen Fluß aus, in welchem, wenn er die Wasserspiegelbreite B hat, die mittlere Tiefe $= T_n$, das Gefälle $= J_n$ und die Geschwindigkeit $= U_n$ sein müsse. Dabei gelte

$$T_n = \sqrt{0{,}0175\,B - 0{,}0125}, \tag{47}$$

ferner nach *Siedeks* letzter Veröffentlichung[2]) für

$$\begin{aligned} &B < 10\text{ m}, && 1000\,J_n = 11{,}65 - \sqrt{58{,}2 + 5{,}52\,B},\\ &10\text{ m} < B < 415\text{ m}, && 1000\,J_n = 1{,}0222 + 0{,}00222\,B,\\ &B > 415\text{ m}, && 1000\,J_n = 0{,}1, \end{aligned} \tag{47a}$$

$$U_n = \frac{T_n\sqrt{1000\,J_n}}{\sqrt[20]{B}}. \tag{47b}$$

---

1) Z. d. öst. I. u. A.V. 53 (1901), S. 397, 409, 445; 55 (1903), S. 99; 57 (1905), S. 61, 77, 216. Zusammenstellung der benützten 537 Messungen 53 (1901), S. 446.

2) Hydrographischer Dienst in Österr. Grundsätzliche Bestimmungen f. d. Durchführung hydrometrischer Erhebungen herausgegeben vom k. k. hydrograph. Zentralbureau (*E. Lauda*), 3. Aufl. Wien 1908.

Im gegebenen Fluß sind nun die mittlere Tiefe T, also der Bruch Querschnittsfläche durch Spiegelbreite, und das Gefälle J abnormal, und daher sei auch die Geschwindigkeit nicht die der Gleichung (47 b), sondern $= U_1$, U_2 oder U_3, wie nachstehende Formeln es festsetzen:

$$U_1 = \frac{T\sqrt{1000\,J}}{\sqrt[20]{B}}; \quad U_2 = U_1 + \frac{T - T_n}{\alpha} + \frac{J - J_n}{\beta(J + J_n)} + U_1 \frac{T_n - T}{\gamma};$$

$$U_3 = U_2 + \frac{T_n - T}{\sqrt{B}};$$

hierbei ist für

$$1\text{ m} < B < 3\text{ m}, \qquad 3\text{ m} < B > 15\,T, \qquad 3\text{ m} < B < 15\,T,$$

$$U = U_1, \qquad\qquad U = U_2, \qquad\qquad U = U_3$$

und hat man α, β und γ nachstehender Tabelle zu entnehmen:

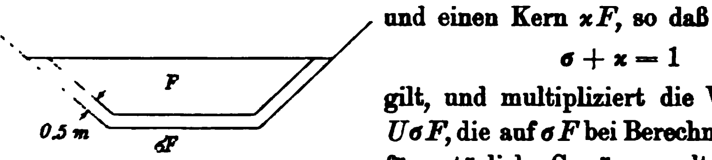
Bei einer Tiefe T, wenn $T > T_n$ oder T_n, wenn $T_n > T$ ist, von m	α	Bei einem Gefälle J von	β		Bei der Differenz $T_n - T$ m	γ	
			$J > J_n$	$J < J_n$		$J > J_n$ $J < J_n$ $> 0{,}001$	$J < J_n$ $< 0{,}001$
0,0—0,3	1	0,006 —0,005	6—5				
0,3—0,5	1,5	0,005 —0,004	5—4				
0,5—1,0	2	0,004 —0,003	4—3	5			
1,0—1,5	3	0,003 —0,002	3—2	5	+ 1,0 bis + 0,7	2	1
1,5—2,0	4	0,002 —0,001	2—1	5	+ 0,7 „ + 0,5	2	0,75
2,0—2,5	6	0,001 —0,0009	1	5	+ 0,5 „ 0,0	1	0,5
2,5—3,0	10	0,0009—0,0008	1,5	5	0,0 „ — 1,0	10	10
3,0—3,5	15	0,0008—0,0007	2,0	5	— 1,0 „ — 2,0	15	15
3,5—4,0	20	0,0007—0,0006	2,5	5	unter — 2,0	20	20
4,0—4,5	30	0,0006—0,0005	3,5	10			
4,5—5,0	40	0,0005—0,0004	4,5	∞			
5,0—5,5	60	0,0004—0,0003	6	∞			
5,5—6,0	80	0,0003—0,0002	8	∞			
6,0—6,5	100	0,0002—0,0001	10	∞			
über 6,5	∞	unter 0,0001	∞	∞			

Siedeks Bestreben war, mit Verzicht auf die Eleganz der mathematischen Form, alle praktisch vorkommenden Werte von U in einem einzigen Ausdruck zu vereinen. Für dessen Verwendung ist es daher zweckmäßig, eine graphische Darstellung zu benützen.

Siedek[1]) versuchte seine Formel auch auf künstliche Gerinne auszudehnen, wobei es ihm selbstverständlicher Weise nicht möglich war, von einer Rauhigkeitsziffer Abstand zu nehmen. Da er fand, daß die Bewegung in der Nähe der Wand von der Beschaffenheit weniger ab-

1) Z. d. öst. I. u. A. V. 55 (1903), S. 104. Grundsätzliche Bestimmungen f. d. Durchführung v. Erhebungen, 3. Aufl., S. 23.

hänge als im Innern des Querschnittes, zerlegt er den Querschnitt F in einen vom benetzten Umfang umsäumten, 0,5 m breiten Einflußstreifen σF und einen Kern $\varkappa F$, so daß



$$\sigma + \varkappa = 1$$

gilt, und multipliziert die Wassermenge $U\sigma F$, die auf σF bei Berechnung nach der für natürliche Gewässer geltenden Regeln entfiele, mit einer Zahl, welche — weil künstliche Rinnsale glatter als natürliche zu sein pflegen — größer als 1 ist. Seine Formeln für U in künstlichen Gerinnen stellt er zu einer Tafel zusammen. Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung und unter Einführung eines Koeffizienten w, der die Wandungsglätte zum Ausdruck bringt, lautet dieselbe

Wasserspiegelbreite der Gerinne	Mittlere Tiefe der Gerinne	Ist die Wasserspiegelbreite kleiner oder größer als die 15 fache mittlere Tiefe?	Formel zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit
von 1 bis 3 m	unter 1 m		$U = \left(\frac{\sigma F w}{\sqrt{T}} + \varkappa F\right) \frac{U_1}{F}$
	über 1 m		$U = (\sigma F w + \varkappa F) \frac{U_1}{F}$
über 3 m	unter 1 m	kleiner	$U = \left(\frac{\sigma F w}{\sqrt{T}} + \varkappa F\right) \frac{U_3}{F}$
		größer	$U = \left(\frac{\sigma F w}{\sqrt{T}} + \varkappa F\right) \frac{U_2}{F}$
	über 1 m	kleiner	$U = (\sigma F w + \varkappa F) \frac{U_3}{F}$
		größer	$U = (\sigma F w + \varkappa F) \frac{U_2}{F}$

Werte der Koeffizienten w.

Benetzter Umfang	bei rechteckigem Querschnitt unter 1,6 m Breite	in allen übrigen Fällen
Quadern, sehr glatt	2,05	2,25
Zement, sehr glatt	2,05	2,25
Ziegelwandung, Zementsohle glatt	2,00	2,20
Zement, gewöhnlich verputzt	1,80	2,00
Ziegel	1,45	1,65
Holz glatt gehobelt	1,70	1,90
Holz ungehobelt	1,40	1,60
Bruchstein, gut behauen	1,20	1,40
Bruchstein, einfach behauen	1,15	1,25
Bruchstein, rauh behauen	1,00	1,10
Bruchstein, Sohle mit Kies	1,00	1,10

Beispiele: 1. Man rechnet die Geschwindigkeit U in beistehend skizziertem Gerinne, dessen Sohle und Wandungen aus gut behauenen Bruchsteinen hergestellt sind, bei einem Spiegelgefälle von $0{,}5\,^0/_{00}$, da die Spiegelbreite größer als 3 m, aber kleiner als die 15fache mittlere Tiefe und letztere kleiner als 1 m ist, aus der Formel:

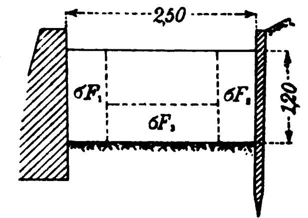
$$U = \left(\frac{\sigma F w}{\sqrt{T}} + \varkappa F\right)\frac{U_s}{F}.$$

Man hat $\sigma F = 2{,}02\ \mathrm{m}^2$, $\varkappa F = 0{,}46\ \mathrm{m}^2$, $w = 1{,}40$, $T = 0{,}71$ m, $F = 2{,}48\ \mathrm{m}^2$ und

$$U_s = \frac{T\sqrt{1000\,J}}{\sqrt[20]{B}} + \frac{T - T_n}{\alpha} + \frac{J - J_n}{\beta(J + J_n)} + \frac{T\sqrt{1000\,J}}{\sqrt[20]{B}}\,\frac{T_n - T}{\gamma} + \frac{T_n - T}{\sqrt{B}}.$$

Hierin ist $1000\,J = 0{,}5$, $B = 3{,}50$ m, $T_n = \sqrt{0{,}0175\,B - 0{,}0125} = 0{,}221$, $1000\,J_n = 11{,}65 - \sqrt{58{,}2 + 5{,}52\,B} = 2{,}85$, $\alpha = 2$, $\beta = 10$, $\gamma = 10$ zu setzen, wonach $U_s = 0{,}472 + 0{,}245 - 0{,}070 - 0{,}023 - 0{,}261 = 0{,}363\ \mathrm{m\,sec}^{-1}$ und $U = 0{,}56\ \mathrm{m\,sec}^{-1}$ folgt.

2. Die Formel läßt, wenn der benetzte Umfang verschiedene Rauhigkeitsgrade aufweist, deren Berücksichtigung durch entsprechende Wahl des Widerstandskoeffizienten w zu. Beispielsweise bestehe in einem 2,50 m breiten, 1,2 m tiefen, rechteckigen Gerinne die eine Seitenwand aus verputztem Beton, die andere aus ungehobeltem Holze und die Sohle aus Kies. Das Rinngefälle betrage $0{,}4\,^0/_{00}$. Dann folgt $U = (\sigma F w + \varkappa F)\frac{U_1}{F}$, worin jetzt sinngemäß $\sigma F w = \sigma F_1 w_1 + \sigma F_2 w_2 + \sigma F_3 w_3$ zu setzen ist. Im vorliegenden Falle ergibt sich für $F = 3{,}0\ \mathrm{m}^2$,



$\varkappa F = 1{,}05\ \mathrm{m}^2$, $\sigma F_1 = 0{,}6\ \mathrm{m}^2$, $\sigma F_2 = 0{,}6\ \mathrm{m}^2$, $\sigma F_3 = 0{,}75\ \mathrm{m}^2$, $w_1 = 2$, $w_2 = 1{,}6$, $w_3 = 1{,}1$, $U_1 = \frac{T\sqrt{1000\,J}}{\sqrt[20]{B}} = 0{,}725\ \mathrm{m\,sec}^{-1}$ und $U = (1{,}2 + 0{,}96 + 0{,}82 + 1{,}05)\frac{0{,}725}{3{,}0} = 0{,}97\ \mathrm{m\,sec}^{-1}$.

Auch *Th. Christen*[1]) kam zur Überzeugung, daß der Spiegelbreite $2b$ (in (48) bezeichnet also b die *halbe* Spiegelbreite) besondere Bedeutung zukomme und daß der Profilradius durch die mittlere Tiefe T zu ersetzen sei. Er gelangte nämlich nach Untersuchung zahlreicher Messungen zur Formel

$$(48)\qquad U = \frac{k}{\sqrt[4]{b}}\sqrt[3]{QJ} = \frac{\sqrt{k^3}}{\sqrt[8]{b^3}}\sqrt{FJ} = \sqrt{2k^3}\sqrt{TJ}\,\sqrt[8]{b},$$

wobei er unter F den Querschnitt verstand und unter anderem für

1) Z. f. Gewässerkunde 6 (1904), S. 181. *Th. Christen*, Das Gesetz der Translation des Wassers, Leipzig 1903. *Ders.*, Zeitsch. f. prakt. Geologie 14 (1906), S. 47.

Zement	gehobelte Längsbretter	ungehobelte Querbretter	rauhen Bruchstein
$k = 13{,}7$	11,7	10,5	8,5
$\sqrt{2k^3} = 71{,}7$	56,6	48,1	34,5

Kies von 1—2 cm	von 3—4 cm	Geschiebe von Faustgröße
9,6	7,6	5,5
42,1	29,8	18,2

Geschiebe von Faust- bis Kopfgröße,	grobe Steine
5,0	4,0
15,6	11,3

ermittelte. Für Bette, deren Rauheit sich dem betreffenden Wasserstande anpassen konnte, gibt *Christen* einen einheitlichen Ausdruck, und zwar

$$(48\,a) \qquad U = 6{,}31\sqrt[3]{TJ}\,\sqrt[8]{b}, \quad \text{später } U = 7\sqrt[3]{TJ}\,\sqrt[8]{b}.$$

J. Hermanek[1]) hält mit Recht *Christen* entgegen, daß es doch nicht möglich sei, daß bei zunehmender Spiegelbreite — wie dies in Gl. (48) verlangt wird — die Geschwindigkeit ins Unendliche wachse, während er bei der Formel *Siedeks* deren Umständlichkeit tadelt. Er selbst gelangte zu neuen, sehr einfachen Ausdrücken, indem er das c der Formel *Chézys* auf Grund von 800 Messungen berechnete, die er den Aufsätzen *Siedeks*, *Christens* und anderer Verfasser entnahm, und die berechneten Werte von c zu Gruppen zusammenstellte; er fand so, falls T die mittlere Wassertiefe bedeutet, bei natürlichen Wasserläufen

$$(49) \qquad \begin{cases} \text{für } T < 1{,}50, & U = 30{,}7\, T J^{1/2}, \\ \text{für } 1{,}5 \leqq T \leqq 6 \text{ m} & U = 34\, T^{3/4} J^{1/2}, \\ \text{für } T > 6 \text{ m}, & U = 44{,}5\, T^{0{,}6} J^{0{,}5} \end{cases}$$

$$\text{und auch } U = \left(50{,}2 + \frac{T}{2}\right) T^{1/2} J^{1/2},$$

wobei jedoch zu bemerken ist, daß *Hermanek* für $t > 6$ m nur den Exponenten 0,6, aber nicht den Koeffizienten 44,5 ausdrücklich angibt, und der letztere hier unter der Voraussetzung bestimmt wurde, daß der Verfasser wollte, daß für $t = 6$ m die zweite und dritte Gleichung (49) übereinstimmende Geschwindigkeiten ergeben.

M. Matakiewicz setzte zuerst[2]) die mittlere Geschwindigkeit

$$(49\,a) \qquad U = 33{,}922\, T^{0{,}923} J^{0{,}48},$$

worin die Konstante und die Exponenten von T und J mit Hilfe der

1) Z. d. öst. I. u. A.V. 57 (1905), S. 237. Ebenda 65 (1913), S. 582 veröffentlicht *O. Gröger* $U = 23{,}781\, T^{0{,}776} J^{0{,}458}$.

2) Ö. Wochenschr. f. d. öff. B. 11 (1905), S. 767.

Methode der kleinsten Quadrate aus 20 einwandfreien Messungen in Flußstrecken, deren Spiegel den ausgeglichenen Sohlen parallel waren, ermittelt wurden. Später[1]) verallgemeinerte er in der Erkenntnis, daß die Gleichung mit unveränderlichen Exponenten den Messungen nicht entspreche, diese Formel unter Heranziehung von 292 Messungen, welche er sorgfältig aus 770 Messungen auswählte, in

(49 b) $$U = \frac{116\, J^{0,493 + 10J}}{2,2 + T^{\frac{2}{3} + \frac{0,15}{T^2}}}\, T.$$

In bemerkenswerter Weise stimmen *Hermaneks* Ansätze mit *Hagens* letzter Aufstellung (42 c) und mit *Mannings* Formel (44) überein. Auch *Harder* (43 b) und *Heßle* (46) kamen offenbar zum Schlusse, daß die von R abhängige Funktion zwischen $\sqrt{R}$ und R liege; nur wählten sie eine Summe von Gliedern mit $\sqrt{R}$ und R statt einem einzigen Gliede mit entsprechenden Exponenten.

Hervorzuheben ist auch, daß *Ph. Forchheimer*[2]), welcher bei Beobachtung der Wanderwellen Messungen in einem glatten Holzgerinne bei nur *wenigen Millimetern* Wassertiefe vornahm und zuerst nach *Ganguillet-Kutter* rechnen wollte, sich genötigt fand,

(50) $$U = 100\, T^{0,7} J^{0,5}$$

zu setzen.

Soweit sich trotz der Verschiedenheit der Wasserläufe in der Natur die Strömungsgeschwindigkeit mathematisch einheitlich angeben läßt, scheint also *Hermanek* dies getan zu haben, und die Einfachheit, mit der ihm dies gelang, bildet überdies mit Rücksicht auf die praktische Anwendung einen weiteren großen Vorzug seiner Formel.

Wenig einfach, wenn auch gewiß dem Mittel aus den zahlreichen Messungen nahekommend, sind die Formeln von *W. Lindboe.*[3])

Er benutzte die von *Siedek* zunächst angegebenen 537 Messungen, 9 aus *Christens* „Translation", 122 aus dem „Jahrbuch der Gewässerkunde Norddeutschlands, 1907", 9 aus der „Entwickelung der Hydrometrie in der Schweiz". Um noch größere Annäherung zu erzielen, löste er seine Formel in sechs Einzelregeln gemäß folgender Tabelle auf, welche für Breiten B von mindestens 10 m bis zu Gefällen $J = 0,005$ und bis zum Tiefenverhältnis $T : B = 0,1$ gilt, wobei T wieder die mittlere Tiefe und B die Spiegelbreite bedeutet.

---

1) Zeitschr. f. Gewässerkunde 10 (1911), S. 97.

2) Z. f. Gewässerkunde 6 (1904), S. 327 = Wien, Ber. 112[2a] (1903), S. 1705.

3) Z. f. Gewässerkunde 10 (1911), S. 30.

U m sec^{-1}	$J < 0{,}0006$	
	$\frac{T}{B} < 0{,}028$	$0{,}028 < \frac{T}{B} < 0{,}1$
$T < 1{,}12$ m	$23{,}37\left(0{,}822 - \frac{T}{B}\right) T^{0,9}\, J^{0,42}$	$8{,}19\left(2{,}293 - \frac{T}{B}\right) T^{0,9}\, J^{0,42}$
$1{,}12 < T < 3{,}65$ m	$24{,}11\left(0{,}822 - \frac{T}{B}\right) T^{0,63}\, J^{0,42}$	$8{,}45\left(2{,}293 - \frac{T}{B}\right) T^{0,63}\, J^{0,42}$
$T > 3{,}65$ m	$27{,}45\left(0{,}822 - \frac{T}{B}\right) T^{0,53}\, J^{0,42}$	$9{,}62\left(2{,}293 - \frac{T}{B}\right) T^{0,53}\, J^{0,42}$
	$0{,}0006 < J < 0{,}005$	
	$\frac{T}{B} < 0{,}028$	$0{,}028 < \frac{T}{B} < 0{,}1$
$T < 1{,}12$ m	$33{,}86\left(0{,}822 - \frac{T}{B}\right) T^{0,9}\, J^{0,47}$	$11{,}86\left(2{,}293 - \frac{T}{B}\right) T^{0,9}\, J^{0,47}$
$1{,}12 < T < 3{,}65$ m	$34{,}94\left(0{,}822 - \frac{T}{B}\right) T^{0,63}\, J^{0,47}$	$12{,}21\left(2{,}293 - \frac{T}{B}\right) T^{0,63}\, J^{0,47}$
$T > 3{,}65$ m	$39{,}77\left(0{,}822 - \frac{T}{B}\right) T^{0,53}\, J^{0,47}$	$13{,}94\left(2{,}293 - \frac{T}{B}\right) T^{0,53}\, J^{0,47}$

Als letzter sei *Ringelmann*[1]) angeführt, der für Wasser, das in dünner Schicht über rauhes Pflaster rieselte, für U zwischen 0,11 und 0,58 und R zwischen 0,0014 und 0,010

$$U = 0{,}35\sqrt{RJ}$$

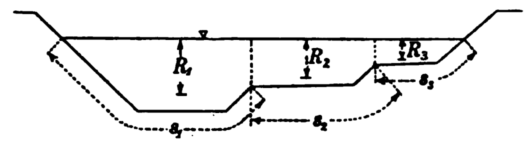
ermittelte.

Schließlich sei bemerkt, daß das bisherige Verfahren der Aneinanderreihung von Beobachtungen behufs Bildung eines Mittelwertes keine neuen Errungenschaften verspricht. Nicht auf die Häufung, sondern auf die Auswahl und Sonderung der Messungsergebnisse ist nunmehr das Augenmerk zu richten, vor allem wohl dahin, daß man die Phasen des Wasserstandes berücksichtigt, nicht den Bach bei Hochwasser gemeinschaftlich mit dem Strom bei Niederwasser behandelt. Das geschieht in den heute bestehenden Formeln nicht, und so sei noch ausdrücklich betont, daß sie *alle nur gelten, wenn kein starker Geschiebetrieb stattfindet*, und daß, wenn die ganze Sohle in Bewegung gerät, die Geschwindigkeitsziffer wesentlich sinkt. Hierauf wird später (im § 139) noch zurückgekommen werden.

27. Teilung des Querschnittes. Bei offenen Läufen, z. B. ausufernden Flüssen, deren Überschwemmungsflächen nur seicht überronnen werden, käme man häufig auf ganz falsche Ergebnisse, wenn man den ganzen Querschnitt einheitlich behandeln, also etwa in den Formeln vom Bau jener *Chézys* den Profilradius des ganzen Querschnittes ein-

1) Paris, C. R. 155 (1912²), S. 849.

führen wollte. Es ist einleuchtend, daß, wenn das Bett aus einigen voneinander sehr verschiedenen Rinnsalen besteht, die Bewegung in jedem der letzteren fast unabhängig von der im übrigen Querschnitt erfolgt. Man hat dann auch rechnerisch die Betteile gesondert zu behandeln und hat beispielsweise, wenn man die Teile durch Kennziffern unterscheidet



$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots = U_1 F_1 + U_2 F_2 + \cdots \tag{51}$$
$$= (c_1 \sqrt{R_1} F_1 + c_2 \sqrt{R_2} F_2 + \cdots) \sqrt{J}.$$

In der Natur verrät sich die Linie, längs der zwei ungleiche Bewegungen aneinander grenzen, vielfach durch wirbelnde Wassermassen, welche eine ähnliche Rolle wie Walzen zwischen verschieden rasch bewegten Flächen spielen.[1])

Selbst bei einheitlichen Querschnitten führt übrigens *Chézys* Form (also auch z. B. *Ganguillet* und *Kutters* Ansatz) zu einer Folgerung, mit der man sich kaum befreunden kann. Nach *Chézy* könnte nämlich, wenn der Querschnitt in Spitzen ausläuft, z. B. ein Dreieck bildet, bei gegebenem Gefälle und Spiegel der Durchfluß zunehmen, wenn man die Spitzen durch Wände abschließt, also den Querschnitt verringert. Es wären also wohl die Durchflüsse an den Spitzen und im Hauptteile des Querschnittes gesondert zu berechnen und dann zu addieren.

28. Anwendung der Formeln für offene Läufe auf geschlossene Leitungen. Über die Bewegung in Leitungen von nicht kreisförmigem Querschnitt liegen nur sehr wenige Versuche vor. Man begnügt sich daher anzunehmen, daß auch für geschlossene Gerinne

$$U = c\sqrt{RJ} \tag{52}$$

gelte und nimmt für c die für offene Rinnsale von gleicher Wandbeschaffenheit ermittelten Werte. Daß, wie (52) verlangt, in einem geschlossenen rechteckigen Gerinne und in einem offenen von gleicher Breite und halber Höhe der übereinstimmenden Profilradien wegen die nämliche Geschwindigkeit U gleiche J (Druckverluste bzw. Gefälle) erfordert, haben Versuche von *H. Darcy* und *H. Bazin*,[2]) sowie später von *Th. Christen*[3]) bestätigt, und ähnliches wies letzterer auch für

1) Durch solche Wirbel bleiben häufig nach Überschwemmungen Senkungen, ja sogar Gräben neben dem Bettrand zurück. Vgl. unten §§ 137 u. 140.

2) *H. Darcy* und *H. Bazin*, Recherches hydrauliques 1 (1865), S. 162.

3) *Th. Christen*, Das Gesetz der Translation des Wassers, S. 48, 38. Siehe auch unten *H. Hochschild*.

Röhren und Halbröhren nach. Allerdings wird hiermit die Gültigkeit von (48) für geschlossene Querschnitte nur insofern bekräftigt, als (48) für offene als zutreffend erachtet werden kann. *Christen* betrachtet denn auch für geschlossene Gerinne seine Gleichung

$$U = \frac{k}{\sqrt[4]{b}} \sqrt[3]{QJ} = \frac{\sqrt{k^3}}{\sqrt[8]{b^3}} \sqrt{FJ} \tag{52 a}$$

als die richtige, wobei er sinngemäß nunmehr unter Q den halben Durchfluß und unter F den halben Querschnitt versteht. — Bei angenähert kreisförmigen Hohlgängen, z. B. Sielen, empfiehlt es sich offenbar, jene c zu benutzen, die für Röhren ermittelt worden sind, das heißt zu den für die Bewegung in Röhren aufgestellten Ausdrücken zu greifen.

29. Einfluß der Temperatur auf die Strömung. Solange man die Bewegung in Schichten nicht vollständig von der in Wirbeln schied, sondern an ein gemeinschaftliches Gesetz für beide Bewegungsarten glaubte, mußte man — weil das Fließen in Haarröhrchen durch die Wärme sehr befördert wird — der Temperatur auch eine Wirkung auf das Strömen in weiten Strängen beimessen. Auch der Entdecker der beiden Bewegungsarten *G. Hagen*[1]) nahm an, daß der Druckverlust sich verringere, wenn die Flüssigkeit erwärmt wird, wenn er auch zugleich der Ansicht war, daß die Wirkung der Temperatur mit wachsendem Durchmesser abnehme. Hiermit übereinstimmend leugnete *O. Reynolds*[2]) einen Einfluß der Zähigkeit auf die wirbelnde Bewegung, sobald der Widerstand wie das Quadrat der Geschwindigkeit wächst. Es komme dann nur mehr auf die Dichte an. Nicht quadratisches Wachstum herrschte bei den Versuchen, die *W. C. Unwin*[3]) mit glatten, rotierenden Scheiben anstellte und die denn auch eine Abnahme der Reibung mit der Temperatur t (in ^{0} C), nämlich Proportionalität des Widerstandes mit

$$1 - 0{,}00405\, t$$

zeigten. Sehr ähnliche Änderungen fand später *J. G. Mair*[4]) bei den Druckverlusten in einer 38 mm weiten Messingröhre, nämlich für

$$J = a_1 \frac{U^{1{,}705}}{D^{1{,}2}} \tag{53}$$

folgende Werte von a_1, welche zu $1 - 0{,}00416\, t$ proportional verlaufen:

---

1) Berlin, Abhandlungen d. K. Akad. d. Wissensch. 1869, *G. Hagen*, Über d. Bewegg. des Wassers, Berlin 1870, S. 23.

2) Proceedings of the Royal Institution of Great-Britain = Papers 2, S. 237.

3) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 80 (1885), S. 221 = *W. C. Unwin*, Treatise on hydraulics, London 1907, S. 136.

4) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 84 (1886), S. 429.

Temperatur in °C	13,9	21,1	37,8	54,4	71,1
a_1	0,00050	0,00048	0,00044	0,00041	0,00038.

Bei den Versuchen *Saph* und *Schoders*[1]) mit den glatten engen Messingrohren gab zwischen 2 und 21° C jeder °C etwa 6,7‰ Abnahme der Reibungshöhe. Nach dem Angeführten ist bei glatten engen Rohren eine Wirkung der Temperatur auf die Reibung auch bei wirbelnder Bewegung sicher; welche Wirkung mit zunehmender Rauhigkeit und Weite unmerklich wird. Die Temperatur in die Formeln für die Wasserbewegung einzuführen versuchte *V. Fournié.*[2])

Zweifelhaft ist auch noch das Verhalten anderer Flüssigkeiten als Wasser. Während *Reynolds*, wie angedeutet, der Ansicht ist, daß der in Flüssigkeitssäulenhöhe gemessene Druckverlust bei turbulenter Bewegung für alle Flüssigkeiten gleich groß sei, haben, wie oben S. 57 erwähnt, Erfahrungen an amerikanischen Petroleumleitungen gezeigt, daß Petroleum viel größere Druckverluste als Wasser erfährt.

30. Bestimmung des Gefälles. Eine besondere Schwierigkeit bietet für die Anwendung der Formeln (35) bis (50) die Bestimmung des Gefälles J bei den *natürlichen* Läufen, weil deren Spiegel eine Kurve bildet, so daß man zu recht verschiedenen Gefällen J gelangt, je nachdem man den Höhenunterschied näherer oder entfernterer Punkte der Gefällsberechnung zugrunde legt. Man kann sich von dieser Unsicherheit unabhängig machen, indem man das Längenprofil des Wasserlaufes (in verzerrtem Maßstab) zeichnet, im betreffenden Querschnitte eine Tangente an die Spiegelkurve legt und deren Gefälle als J betrachtet. So wird vielfach verfahren.

Nach *R. Siedeks*[3]) Ansicht hat aber das Gefälle oberhalb eines Querprofiles mehr Einfluß auf dessen mittlere Geschwindigkeit U als das unterhalb, er betrachtet daher bei 10 m oder noch mehr Spiegelbreite als Gefälle J jenes der Verbindungsgeraden zweier Oberflächenpunkte, von denen der eine zwei Flußbreiten stromauf, der andere eine Flußbreite stromab vom betreffenden Querprofil liegt. Für Gewässer von weniger als 10 m Breite würde sich nun solche Gefällsbestimmung auf eine allzukurze Strecke beschränken und *R. Siedek* rät daher, bei ihnen die Punktentfernung von 30 m unabhängig von der Breite beizubehalten. Eine weitere praktische Schwierigkeit besteht darin, daß die Gefälle an den beiden Ufern weder untereinander, noch also mit dem im Stromstrich übereinstimmen, wie man z. B. aus der S. 84 folgenden Tabelle über den Rauhigkeitsgrad der Elbe entnehmen kann.

1) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 51 (1903), S. 290, s. oben.
2) Ann. d. ponts et chauss. (7) 8 (1898²), S. 1.
3) Z. d. öst. I. u. A.V. 55 (1903), S. 104.

31. Die Rauhigkeit natürlicher Läufe. Die Rauhigkeit der Flüsse und Bäche läßt sich schwer schätzen, weil die Beziehung zwischen Rauhigkeit und Geschiebegröße bisher unbekannt ist, ja selbst die Auffindung einer solchen Beziehung dadurch erschwert wird, daß es — wie *Christen* mit Recht bedauert — nicht üblich ist, bei Geschwindigkeitsmessungen die Geschiebegrößen aufzunehmen. Auch kann die Rauhigkeit an derselben Flußstelle infolge Veränderung des Bettes stark wechseln und sie sollte sogar, wenn bei höherem Wasserstande die Geschwindigkeit so wächst, daß das Wasser die Sohle angreift, mit dem Wasserstand zunehmen. In der Tat ist das nach einigen Messungen z. B. in der Donau bei Stein und im Inn bei Innsbruck der Fall. Doch kommen auch Messungsreihen vor, wie z. B. die in der Drau bei Villach, in denen die Rauhigkeit oder wenigstens das *Ganguillet-Kutter*sche n bei wachsendem Wasserstande abnimmt. Nachstehende Tabellen geben über das Verhalten zahlreicher Flußstrecken Aufschluß.

(Q = Durchfluß, b = Wasserspiegelbreite, $F:b$ = mittlere Tiefe, h_{max} = größte Tiefe, F = Querschnittsfläche, J = Gefälle, U = mittlere Geschwindigkeit, c = *Chézys* Zahl, n = Rauhigkeit.)

		Donau bei Stein, 74,46 km ober Wien [1])							
Q	$m^3 sec^{-1}$	3470	3465	2553	1458	1250	1197	1155	1135
b	m	297	306	300	289	288	288	293	287
$F:b$	m	5,00	5,28	4,42	3,18	2,96	2,88	2,83	2,77
h_{max}	m	7,46	7,81	7,01	6,30	6,22	6,18	5,63	6,10
F	m^2	1486	1619	1324	920	854	831	828	796
$1000\,J$		1,3 (?)	0,58	0,52	0,75	0,64	0,45	0,46	0,54
U	$m\,sec^{-1}$	2,34	2,14	1,93	1,59	1,46	1,44	1,40	1,43
c	$m^{1/2} sec^{-1}$	29,6	40,7	42,3	32,7	37,5	39,4	40,3	43,0
n	1898	0,049	—	—	0,039	0,034	0,032	—	0,031
n	1900	—	0,033	0,03	—	—	—	0,030	—

		Inn bei Innsbruck [2])				Inn bei Kufstein [2])		
Q	$m^3 sec^{-1}$	830	390	228	42	528	381	110
b	m	67	69	66	62	111	109	94
$F:b$	m	4,06	2,43	1,85	0,74	2,29	1,88	1,03
h_{max}	m	5,50	2,80	2,10	0,95	3,7	3,3	3,2
F	m^2	271	168	121	46	253	205	97
$1000\,J$		0,9	1,15	1,04	0,89	1,5	1,45	1,3
U	$m\,sec^{-1}$	3,06	2,31	1,82	0,91	2,08	1,86	1,13
c	$m^{1/2} sec^{-1}$	56,3	44,4	42,0	35,4	35,6	35,7	30,9
n	1900	—	0,026	0,0265	0,024	0,033	0,031	0,032
n	1901	0,021	—	—	—	—	—	—

1) Jahrbuch d. k. k. hydrograph. Zentralbureaus, Donaugebiet, 6 (1898), S. 304; 8 (1900), S. 299.

2) Ebd. Donaugebiet, 8 (1900), S. 297; 9 (1901), S. 319. $Q = 830\ m^3 sec^{-1}$ wurde nur mittels Oberflächenmessung erhoben.

	Drau bei Villach[1]			Weichsel bei Krakau[1]		
Q $m^3 sec^{-1}$	177	110	72	152	134	47
b m	61	54	49	88	86	81
$F:b$ m	2,30	1,91	1,80	1,99	1,78	1,02
h_{max} m	5,11	4,37	4,18	2,48	2,18	1,42
F m^2	140	103	89	175	153	83
$1000 J$	0,5	0,56	0,42	0,29	0,295	0,29
U $m sec^{-1}$	1,27	1,07	0,81	0,87	0,87	0,57
c $m^{1/2} sec^{-1}$	38,1	33,1	29,9	36,4	38,1	33,2
n	0,031	0,034	0,037	0,020	0,030	0,030
Messungsjahr	1902	1899	1901	1900	1900	1900

Ein noch auffallenderes Ergebnis liefern Erhebungen[2]), welche das hydrographische Zentralbureau 1897 bei Wien vornahm und wie folgt lauten:

Donau bei der Kaiser-Franz-Josef-Brücke in Wien								
$F:b$	8,68	8,48	8,08	7,11	5,91	5,68	5,34	4,93
$1000 J$	0,580	0,582	0,590	0,602	0,592	0,588	0,576	0,562
U	2,97	3,01	2,89	2,79	2,46	2,65	2,52	2,45
c	46,1	47,1	45,8	46,2	44,6	49,0	48,4	50,0
$1000 n$	29,8	28,9	29,8	28,9	29,6	26,2	26,4	25,2
$F:b$	4,76	4,52	3,76	3,58	3,07	2,64	2,46	
$1000 J$	0,557	0,551	0,518	0,508	0,477	0,452	0,439	
U	2,51	2,44	2,14	2,01	1,81	1,67	1,59	
c	51,7	51,7	50,8	49,2	49,2	50,1	49,9	
$1000 n$	24,2	24,0	24,0	24,6	24,2	23,2	22,9	
Donaukanal[3]) bei der Regierungs-Jubiläums-Brücke								
$F:b$	5,94	5,87	5,45	4,80	4,77	4,75	4,63	4,40
$1000 J$	0,360	0,361	0,376	0,388	0,391	0,390	0,388	0,387
U	2,62	2,44	2,26	2,19	1,98	2,05	1,90	1,73
c	59,6	55,6	52,1	52,4	46,8	48,5	45,7	42,6
$1000 n$	21,2	32,1	24,7	24,1	27,6	26,5	28,3	30,6
$F:b$	4,33	4,21	3,95	3,46	3,36	3,30	2,54	2,27
$1000 J$	0,382	0,381	0,372	0,350	0,345	0,338	0,251	0,207
U	1,68	1,75	1,71	1,34	1,27	1,31	0,78	0,63
c	42,0	44,4	45,4	38,9	37,8	39,7	31,1	29,4
$1000 n$	31,1	29,0	28,1	32,9	33,6	31,7	40,2	41,6

Hiernach war der große Strom trotz größerer Geschiebeführung und viel gröberem Korn scheinbar glatter als der kanalartige Arm und wäre bei zunehmender Tiefe und Geschwindigkeit zwar die große Donau, wie

1) Ebd. Draugebiet, 7 (1899), S. 101; 9 (1901), S. 103; 10 (1902), S. 106; Weichselgebiet, 8 (1900), S. 172.

2) Beiträge zur Hydrographie Österreichs (*E. Lauda*) 3. Die hydrometrischen Erhebungen an der Donau nächst Wien im Jahre 1897, Wien 1899, S. 60, 61.

3) Das ist ein alter, heute sehr regelmäßig ausgebildeter Donauarm.

zu erwarten, rauher, der Donaukanal hingegen bedeutend glatter geworden. — Die Lösung der aufgezählten Widersprüche dürfte daran liegen, daß die Geschwindigkeit U bei *gleicher* Rauheit in Schotterbetten nicht proportional $R^{1/2}$, sondern — wie das auch *Siedek* und *Hermanek* behaupten — wie eine etwas höhere Potenz von R wächst und diesem Wachstum der Umstand entgegenwirkt, daß die Strombetten und zwar in sehr verschiedenem Maße bei zunehmendem Wasserstande rauher werden.

Gleichwie an derselben Flußstelle die Änderung der Rauhigkeit nicht nach einem leicht erkennbaren Gesetze stattfindet, wechselt die Ziffer längs einem Wasserlaufe ziemlich regellos, wie z. B. die nachfolgend für die Elbe zusammengestellten Werte zeigen, die sich auf Niedrigwasser beziehen[1]). Freilich mag die Unregelmäßigkeit zum Teil auf eine falsche Einschätzung des Gefälles zurückzuführen sein, wie denn auch die auf Grund der durchschnittlichen mittleren Geschwindigkeiten und dem Durchschnittsgefälle ganzer Flußstrecken bei der Elbe ermittelten n befriedigender als die an einzelnen Meßstellen erhobenen n verlaufen.

Preußische Elbe						
$1000\,J$ linkes Ufer	$1000\,J$ rechtes Ufer	U m sec^{-1}	$F:b$ m	c m sec^{-1}	n Meßort	n Strecke
Mühlberg, gekrümmte Strecke, Bett regelmäßig, Sohle fest						
0,100	0,084	0,585	2,02	43,0	0,0275	0,0332
0,170	0,080	0,757	2,23	45,3	0,0263	
0,158	0,089	0,805	2,42	47,0	0,0257	
0,153	0,129	0,910	2,62	47,4	0,0257	
0,187	0,091	1,041	2,98	51,3	0,0240	
Barby, gekrümmte Strecke, Sohle bei der ersten Messung sehr beweglich						
0,250	0,240	0,887	2,13	38,9	0,0302	oberer Teil 0,0304 unterer Teil 0,0321
0,220	0,180	0,962	2,53	42,8	0,0283	
0,134	0,220	0,976	2,78	44,0	0,0280	
Lenzen, wenig gekrümmte Strecke, bewegliche Sohle, links natürliches Ufer, rechts kurzes Deckwerk						
0,120	0,135	0,826	3,12	41,3	0,0311	
0,125	0,130	0,848	3,17	42,1	0,0308	
Artlenburg, gerade Strecke, Sohle beweglich						
0,095	0,095	0,569	2,19	39,5	0,0308	0,0302
0,085	0,095	0,568	2,23	40,0	0,0306	
0,095	0,095	0,607	2,38	40,5	0,0306	
0,090	0,096	0,640	2,48	42,1	0,0296	
0,095	0,090	0,672	2,64	43,1	0,0293	

1) Die Bestimmung von Normalprofilen für die Elbe v. d. kgl. Elbstrom-Bauverwaltung zu Magdeburg, Magdeburg 1885, S. 113.

Da die Flüsse unter anscheinend gleichen Bedingungen sehr verschiedene Rauhigkeit aufweisen, sind die Fehler, denen man sich bei Anwendung irgendeiner der vielen Formeln bei ihnen aussetzt, recht bedeutend. So führt *Siedek*[1]) und zwar zur *Unterstützung* seiner Formel an, daß sie nachstehende Genauigkeit erreicht:

Wasserspiegelbreite	10—100	100—1000	üb. 1000	insgesamt
Zahl der Beispiele	266	175	97	538
Bis auf 5 cm stimmend	20,3%	29,1%	44,3%	27,5%
„ „ 10 „ „	38 „	59,4 „	82,4 „	53 „
„ „ 20 „ „	66,6 „	88,5 „	96,9 „	79,1 „

Dabei waren von den in m sec^{-1} gemessenen Geschwindigkeiten

unter 0,2	0,2 bis inkl. 0,5	0,5 bis 1	1 bis 2	2 bis 3	3,45
6	70	315	106	39	1

Die aufgezählten Widersprüche vermindern zwar die Sicherheit, mit der aus anderwärts erhobenen Rauhigkeiten gegebenen Falles ein Schluß auf die Geschwindigkeit gezogen werden kann, machen aber anderseits die Kenntnis vieler Messungsergebnisse wünschenswert, damit man über die Grenzwerte, innerhalb welcher die Rauhigkeit schwanken kann, nicht im Unklaren bleibe. Es sollen daher einschlägige Daten folgen:

	Q	U	n	Jahrbücher des k. k. hydrographischen Zentralbureaus
Salzach bei Salzburg . .	131,4	1,69	0,036	7 (1899) I, S. 299
„ „ Oberndorf .	119,7	1,16	0,031	
	397,8	1,80	0,030	
Mur bei Graz	84,4	0,91	0,042	7 (1899) III, S. 89
	164,1	2,01	0,038	6 (1898) III, S. 87
	178,4	1,99	0,033	
	242,1	1,82	0,027	
	254,9	1,99	0,030	
Etsch bei Sigmundskron.	45	1,14	0,022	9 (1901) VII, S. 113
„ „ Trient	232,6	1,65	0,032	
	621,3	2,29	0,030	
Thaya an der Mündung.	18,8	0,83	0,021	5 (1897) II, S. 167
	27,1	0,87	0,018	
	65,8	0,91	0,019	
	75,7	0,85	0,015	

(Fortsetzung der Tabelle auf nächster Seite.)

1) Z. d. öst. I. u. A.V. 53 (1901), S. 450. Die Liste gibt eigentlich die Beispielzahlen 5 + 265 + 171 + 96 = 537.

(Fortsetzung der Tabelle von voriger Seite.)

	Q	U	n	Jahrbücher des k. k. hydrographischen Zentralbureaus
March bei Angern . . .	40,5 215,5	0,44 0,73	0,23 0,25	5 (1897) II, S. 164
Moldau bei Salnau . . .	3,29 5,85 8,04	0,26 0,36 0,43	0,029 0,025 0,027	9 (1901) X, S. 285
Wisłok bei Trynsza. . .	11 18,4	0,37 0,64	0,021 0,024	6 (1898) XII, S. 154
Dunajec bei Neu-Sandec	23,1 25,1 102,6	0,94 1,02 1,32	0,022 0,026 0,025	7 (1899) XII, S. 166
„ „ Gołkowice .	9,91 13,86 19,89	0,34 0,485 0,49	0,035 0,025 0,048	10 (1902) XII, S. 196
Bystrzyca sołotwińska bei Pasieczna	2,54 38,68	0,18 1,05	0,044 0,051	12 (1904) XIII, S. 93

32. Messungsergebnisse künstlicher Gerinne. Weit gesetzmäßiger als natürliche Gewässer verhalten sich Gerinne mit unveränderlichen Wandungen. So zeigte der Tunnel, der aus der Sitter zum Elektrizitätswerke Kubel führt[1]) und dessen Wände durchweg mit geglättetem Beton verkleidet sind, bei seichter und tiefer Füllung fast dasselbe n, nämlich nachstehende Zahlen:

Durchfluß Q	$m^3 sec^{-1}$	4,135	3,480	2,457	1,604	0,547
Wasserspiegelbreite b .	m	1,51	1,80	1,97	1,98	1,89
Größte Tiefe	m	1,523	1,308	1,005	0,753	0,385
Profilradius R	m	0,586	0,573	0,613	0,436	0,270
Fläche F	m^2	2,761	2,401	1,825	1,333	0,622
Gefälle in $^0/_{00} = 1000\,J$		0,555	0,555	0,555	0,555	0,555
Mittl. Geschwindigk. U	$m\,sec^{-1}$	1,50	1,45	1,35	1,20	0,88
Größte „ U_{max}	$m\,sec^{-1}$	1,72	1,67	1,54	1,38	1,04
$U : U_{max}$		0,87	0,87	0,875	0,87	0,85
Chézys Zahl c	$m^{1/2} sec^{-1}$	83,1	81,3	79,8	77,3	71,8
Rauhigkeit n		0,0113	0,0115	0,0115	0,0116	0,0115

Da hiernach *Ganguillet* und *Kutters* Formel auf Mühlgerinne gut anwendbar erscheint, sollen noch einige Meßergebnisse[2]) folgen:

1) Entwicklung der Hydrometrie in der Schweiz, bearb. vom eidgen. hydrometrischen Bureau (*J. Epper*), Bern 1907, Tafel 86a, b.

2) Ebenda Taf. 68, 69, 81—84. — Jahrbuch des k. k. hydrograph. Zentralbureaus III, 8 (1900), S. 86.

	Werkgraben des Elektrizitätswerkes Aarau	Zuleitung des Kraftwerkes Rheinfelden	Rechtsseitiger Mühlgang bei Graz	Linksseitiger Mühlgang bei Graz	Mühlbach der Mühle Dürr bei Burgdorf
Durchfluß Q . $m^3 sec^{-1}$	38,14	455,54	8,84	9,81	2,701
Wasserspiegelbreite b . . m	15,89	55,73	7,25	11,60	3,63
Größte Tiefe . m	2,79	4,67	1,42	0,90	0,75
Profilradius R m	2,02	3,77	1,01	0,75	0,53
Fläche F . . m^2	37,62	228,58	8,34	9,81	2,66
Mittl. Geschwindigkeit U . $m sec^{-1}$	1,01	1,99	0,90	1,11	1,015
Größte Geschwindigkeit U_{max} $m sec^{-1}$	1,34	2,54	—	—	1,14
$U : U_{max}$ . . .	0,75	0,78	—	—	0,89
Gefälle in ‰ = 1000 J	0,12	0,234	0,34	1,21	1,775
Wand links, Beschaffenheit	Betonmauer	Bruchsteinmauer	Bruchsteintrockenmauern		Betonmauer
Wand links, Neigung .	1,3	0,1	fast lotrecht		0,1
Wand rechts, Beschaffenheit	Betonmauer	Steinpflaster	Bruchsteintrockenmauern		Betonmauer
Wand rechts, Neigung.	1,2	1,3	fast lotrecht		0
Sohle	—	Kies	Schotter	Schotter	Bretter
Chézys Zahl c $m^{1/2} sec^{-1}$	65,23	67,1	48,2	38,9	33,1
Rauhigkeit n	0,0173	0,0179	0,021	0,024	0,0264

Nach *P. Pasini* und *U. Gioppi*[1]) ergab der Cavour-Kanal folgende Zahlen:

Tiefe . . . . . m	1,84	2,12	2,79	1,84	2,12	2,79
Profilradius . . m	1,56	1,76	2,20	1,56	1,76	2,20
Fläche . . . . m^2	37	46,6	56,2	37	42,6	56,2
Mittl. Geschwind. $m sec^{-1}$	1,07	1,15	1,34	1,07	1,15	1,34
Wände	Ziegelmauerwerk			Ziegelmauerwerk		
Wände, Neigung	1 : 20			1 : 20		
Sohle (20 m breit) . . .	Beton, wagrecht			Grobkies u. Steine, wagr.		
Rauhigkeit n	0,013	0,013	0,013	0,024	0,025	0,025
Tiefe . . . . . m	1,93	2,11	2,78	1,71	1,92	2,06
Profilradius . . m^2	1,58	1,78	2,23	1,45	1,61	1,71
Fläche . . . . m	42,1	49,0	66,7	40,6	46,1	50,1
Mittl. Geschwind. $m sec^{-1}$	0,95	1,0	1,13	0,93	0,99	1,04
Böschungen in Grobkies und Steinen, etwas angegriffen, Neigung 1 : 1						
Sohle in Grobkies und Steinen, ungefähr 20 m breit, wagrecht						
Rauhigkeit n	0,025	0,025	0,026	0,025	0,025	0,025

Von *Kutters* Messungen[2]), die nur mit Schwimmern vorgenommen wurden, werde die eine im rechtwinkligen Mühlgerinne zu Oberwangen

1) Giornale del genio civile 31 (1893), p. 61.

2) Allgem. Bauzeitung 35 (1870), S. 228 = S.A. 1871, S. 66; *W. R. Kutter* Bewegung des Wassers, 2. Aufl., Berlin 1897, S. 31.

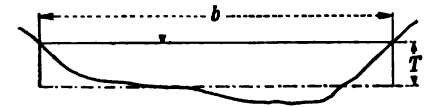
herausgegriffen, bei der er auch das Wasser auffing und eichte. Die Flächen bestanden aus rauhen Brettern und es zeigte sich

Breite	R	J	U	c	n
0,9	0,036	0,017	1,21	48,9	0,0110.

Die Messungen *Bazins* faßt *Kutter* in den unten auf S. 90 u. 91 wiedergegebenen Tabellen zusammen.

Im Gerinne der Tansa-Wasserleitung von Bombay zeigte sich nach *W. C. Clerke*[1]) bei dem geringen Gefälle $J = 1:10600$, wagrechter, 2,13 m breiter, mit Portlandzement verputzter Sohle, senkrechten, mit Portlandzement verfugten Wangen aus Bruchsteinmauerwerk $n = 0{,}012$ bis $0{,}013$.

33. Zusammenhang von Durchfluß und Wasserstand. In einem Flußbett kann man sich die wellige Sohlenlinie eines Bettquerschnittes durch eine wagrechte Linie ausgeglichen denken, deren Tiefenlage T unter dem Wasserspiegel gleich der mittleren Tiefe des Querschnittes ist. Ist dann das Bett sehr breit und sind die Ufer sehr steil, so daß die Flußbreite b als unveränderlich gelten kann, so ändert die Ausgleichslinie ihre Höhenlage nicht mit dem Wasserstande. Da zudem das jeweilige T mit dem Profilradius nahezu übereinstimmt, so gilt für den Durchfluß durch eine solche Flußstelle nach *de Chézys* Formel (35)



$$(54)\qquad Q = \text{Querschnitt} \cdot \text{Geschwindigkeit} = bT \cdot c\sqrt{TJ} = a_1 T^{3/2},$$

worin a_1 für die betreffende Flußstelle konstant. Benutzt man statt der mittleren Tiefe T die an einem Pegel abzulesende Höhe h des Wasserspiegels über dem Nullpunkt dieses Pegels, so nimmt der Zusammenhang zwischen Durchfluß und Wasserstand die Form

$$(54\,\text{a})\qquad Q = a_1(h + a_2)^{3/2}$$

an. An diese Form hat sich z. B. *J. Nazzani*[2]) bei Untersuchung des Tiber strenge gehalten und für Niederwässer mit h in m ausgedrückt

$$Q = 45{,}43(h - 3{,}66)^{3/2},$$

für $5{,}92 < h < 9{,}38$ (mit einem wahrscheinlichen Relativfehler 0,022)

$$Q = 51{,}196(h - 3{,}66)^{3/2},$$

für $10{,}60 < h < 12{,}53$ (mit einem wahrscheinlichen Relativfehler 0,020)

$$Q = 56{,}133(h - 3{,}66)^{3/2}$$

---

1) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 115 (1893), S. 18, 32.

2) Giornale del genio civile (4) 2 (1882), S. 321, (4) 3 (1883), S. 224. *U. Masoni,* Idraulica, 2. ed., 1900, S. 586.

gefunden. *J. Boussinesq*[1]) macht aufmerksam, daß die Gl. (54 a), welche eine unveränderliche Breite voraussetzt, auch bei ausufernden Flüssen zutrifft, wenn die Strömung im Überschwemmungsgebiete gegenüber der im eigentlichen Bett vernachlässigt werden kann. Da mit zunehmender Tiefe die Querschnitte tatsächlich stärker als T wachsen, sie bei parabolischem Umriß etwa mit $T^{3/2}$ proportional sind und die Geschwindigkeit U nach *Hermaneks* Gl. (49) etwa wie $T^{0,6}$ zuzunehmen scheint, ist zu vermuten, daß der Exponent von $(h + a_2)$ meist größer als 1,5 ist und bis zu 2 oder sogar 2,1 gewählt werden sollte. Dementsprechend fand *A. R. Harlacher*[2]) für die Elbe in Tetschen mit h in m

$$Q = 78{,}09\,(h + 1{,}45)^{1{,}958},$$

und bei höherem Wasser

$$Q = 124{,}36\,(h + 1{,}45)^{1{,}531}.$$

Ähnlich fand man bei der Elbe[3])

bei Mühlberg	$Q = 71{,}13\,(h + 0{,}40)^{1{,}587}$,
bei Torgau	$Q = 61{,}21\,(h + 0{,}62)^{2{,}044}$,
bei Bartelswerder	$Q = 115{,}84\,(h + 0{,}59)^{1{,}219}$,
bei Barby	$Q = 84{,}17\,(h + 1{,}13)^{1{,}527}$ usw.

Die Formeln vom Bau

$$Q = a_1\,(h + a_2)^{\nu} \tag{54 b}$$

sind für die Ausrechnung von Q nicht besonders bequem. Sie haben daher im allgemeinen dem Typ

$$Q = a_1 + a_2 h + a_3 h^2, \tag{55}$$

worin a_1, a_2 und a_3 Konstante und h wieder der Pegelstand, Platz gemacht. So setzte *E. Allard*[4]) für die Seine in Paris (h wieder in m)

$$Q = 48 + 209\,h^2 + 5{,}8\,h^3,$$

und ist seitdem eine Art Statistik der französischen Flüsse von *Bresse* zusammengestellt worden[5]), welche wesentlich auf dem Vorbild von (55) fußt. So gelte für die Seine in Mantes (mit h = Pegelstand in Mantes)

$$Q = 71 + 110\,h + 2h^2 \quad (\text{nach } \textit{de Lagrené}),$$
$$= 170 + 150\,(h - 0{,}80) + 22\,(h - 0{,}80)^2 \quad (\text{nach } \textit{de Préaudeau}),$$

---

1) Eaux courantes, S. 81.

2) Hydrographische Commission des Kön. Böhmen, Hydrom. Section Nr. 7 = *A. R. Harlacher*, Die hydrometrischen Arbeiten in der Elbe bei Tetschen, Prag 1883, S. 26.

3) Die Bestimmung von Normal-Profilen für die Elbe, Magdeburg 1885, S. 83.

4) Ann. d. ponts et chauss. (6) 8 (1884²), S. 625.

5) Ebenda (7) 7 (1897³), S. 6.

Nr. der Serie von Bazin	Gerinne	Breite m	Tiefe m	R m	$1000\,J$	U m sec^{-1}	c m$^{1/2}$ sec^{-1}	n
	I. Sehr glatte Flächen.							
28	Rechteck, fein gehobeltes Holz	0,10	0,04	0,022	4,892	0,53	50,2	0,0096
29	Rechteck, fein gehobeltes Holz	0,10	0,02	0,016	15,237	0,82	52,1	086
2	Rechteck, mit Stahl geschliffener Zement	1,81	0,18	0,158	5,060	2,08	73,6	104
24	Halbkreis, mit Stahl geschliffener Zement	1,00	0,45	0,250	1,424	1,56	83,4	100
25	Halbkreis, mit Stahl geschliffener Zement mit ein Drittel sehr feinem Flußsand	1,00	0,49	0,260	1,380	1,46	76,4	107
	II. Bretter.							
26	Halbkreis	1,10	0,49	0,280	1,523	1,41	68,8	0,0121
21	Trapez	1,40	0,38	0,250	1,521	1,28	63,4	127
22	Trapez, eine Seite senkrecht	0,95	0,30	0,200	4,875	2,09	66,4	119
23	Dreieck, die Seiten 45°	1,30	0,57	0,200	4,655	2,08	66,9	118
6	Rechteck	2,00	0,26	0,200	2,214	1,32	60,7	130
7	Rechteck	2,00	0,19	0,160	4,889	1,81	63,3	119
8	Rechteck	2,00	0,16	0,140	8,163	2,19	64,2	115
9	Rechteck	2,00	0,28	0,220	1,468	1,11	61,6	129
10	Rechteck	2,00	0,17	0,140	5,874	1,85	63,5	117
11	Rechteck	2,00	0,15	0,130	8,380	2,10	63,8	118
18	Rechteck	1,20	0,28	0,200	4,600	1,98	65,1	120
19	Rechteck	0,80	0,25	0,150	4,273	1,56	61,0	121
20	Rechteck	0,48	0,19	0,100	5,983	1,42	56,6	121
	III. Bretter mit Hindernissen.							
30	Rechteck, mit Leinwand ausgeschlagen	0,10	0,04	0,205	8,075	0,40	31,5	0,0130
31	Rechteck, mit Leinwand ausgeschlagen	0,10	0,03	0,200	15,173	0,47	27,1	145
12	Rechteck, mit aufgenagelten 27 mm breiten Latten in 10 mm Zwischenraum	1,96	0,30	0,193	1,468	0,87	50,3	149

(Fortsetzung auf nächster Seite.)

Nr. der Serie von Bazin	Gerinne	Breite	Tiefe	R	$1000\,J$	U	c	n
		m	m	m		m sec^{-1}	m$^{1/2}$ sec^{-1}	
	(Fortsetzung von voriger Seite.)							
13	Wie Nr. 12	1,96	0,20	0,168	5,966	1,55	48,9	0,0148
14	Wie Nr. 12	1,96	0,17	0,152	8,862	1,76	47,9	148
15	Wie Nr. 12, die Latten in 5 mm Zwischenraum	1,96	0,40	0,287	1,468	0,78	37,5	208
16	Wie Nr. 15	1,96	0,25	0,209	5,997	1,18	33,4	212
17	Wie Nr. 15	1,96	0,22	0,191	8,862	1,38	32,4	216
27	Halbkreis, mit festgemachtem Kies von 1 bis 2 cm Dicke	1,20	0,45	0,223	1,364	0,93	46,4	164
4	Rechteck, sonst wie Nr. 27	1,83	0,24	0,196	4,974	1,35	43,2	170
5	Wie Nr. 4, der Kies 3 bis 5 cm dick	1,83	0,27	0,200	4,974	1,09	34,4	207
	IV. Quader oder Ziegel.							
3	Rechteck, Ziegel	1,91	0,19	0,147	5,025	1.55	57,3	0,0127
39	Rechteck, behauene Quadersteine	1,40	—	0,190	8,100	2,39	61,0	128
1	Rechteck, behauene Ziegel, Sohle Zement	2,25	0,77	0,458	3,720	3,13	75,8	119
2	Rechteck, behauene Quadersteine	2,59	0,98	0,541	0,840	1,69	68,8	132
	V. Bruchsteine.							
32	Rechteck, bestochen mit Schlammansatz	1,80	0,18	0,142	100,76	4,93	41,2	0,0167
33	Wie Nr. 32, die Sohle etwas schadhaft	1,80	0,25	0,227	36,856	4,18	45,1	169
34	Trapez, schlecht unterhalten, mit Moos und Gras bedeckt	1,70	—	0,331	14,654	1,75	25,2	305
35	Wie Nr. 34, die Pflanzendecke abgekratzt	1,70	—	0,374	14,220	2,72	37,4	220
44	Rechteck, beschädigt, Sohle mit Steinen und Schlamm bedeckt	2,00	0,70	0,420	0,350	0,51	42,4	198
45	Wie Nr. 44, gutes Mauerwerk, Sohle rein	2,00	0,80	0,453	0,331	0,65	52,9	165
46	Wie Nr. 44	2,00	0,55	0,375	0,671	0,62	38,8	210
1,3	Rechteck	1,06	0,36	0,216	29,00	3,42	43,3	175
1,4	Rechteck	1,06	0,29	0,188	60,00	4,25	40,0	180
1,5	Rechteck	1,20	0,49	0,269	12,20	2,31	40,6	192
1,6	Rechteck	1,10	0,47	0,254	14,00	2,55	42,7	182

für die Seine in Paris mit h = Pegelstand an der Brücke de la Tournelle, wenn $h > 2$ m ist, nach *de Préaudeau*,

$$Q = 110 + 180h + 9h^2 \quad \text{und auch} \quad Q = 70\sqrt{(h + 1{,}8)^3},$$

für die Marne in Vitry

$$Q = 4 + 20h + 50h^2,$$

für die Loire an dem Pegel von Blois, bzw. Mareau, Gien und Nevers,

$$\begin{aligned} Q = {} & 39 + 110(h + 0{,}25) + 135(h + 0{,}25)^2, \\ & 32 + 90(h + 1{,}10) + 70(h + 1{,}10)^2, \\ & 23 + 100(h + 0{,}56) + 70(h + 0{,}56)^2, \\ & 11 + 70(h + 0{,}25) + 110(h + 0{,}25)^2, \end{aligned}$$

wobei die Klammerausdrücke die Höhen über dem Niederwasser von 1865 angeben.

Zahlreiche Abflußangaben enthalten die Jahrbücher des k. k. hydrographischen Zentralbureaus (siehe Tabellen auf S. 94 u. 95).

Daß nach den österreichischen Messungen die Koeffizienten von h und h^2 im Laufe der Zeit Veränderungen unterworfen sind, kann nicht Wunder nehmen, da sich ja die Flußbette selbst ändern. Übrigens haben sich die Koeffizienten von h^2 durchweg klein im Vergleich zu jenen von h gezeigt.

Da der Durchfluß Q das Produkt aus dem Querschnitt F und der Geschwindigkeit U bildet und sich der Zusammenhang von F und h leicht feststellen läßt, erscheint es gegebenenfalls richtig nachzusehen, ob nicht der von U und h ein einfacher ist. Da ist es beachtenswert, daß nach Messungen von *J. Greve*[1]) an der Weser und einigen ihrer Nebenflüsse U sich innerhalb des trapezförmigen Querschnittes längerer gleichmäßiger Strecken $= a_1 + b_1 h$ zeigte, wobei a_1 und b_1 Konstante sind.

34. Genauigkeit der Durchflußmessungen. Da alle Durchflußangaben sich auf Messungen stützen, ist zu ihrer Würdigung ein Einblick in die Genauigkeit der Messungen nötig. Leider befindet man sich über diese in einiger Ungewißheit. Während man imstande ist, die vergleichsweise geringen Durchflußmengen aus Röhren zwecks Eichung in einem Behälter aufzufangen, ist der ähnliche Vorgang bei Flüssen fast ausgeschlossen. Man kann daher nur die Meßmethoden untereinander vergleichen und nachsehen, inwieweit eine Messung bei ihrer Wiederholung wieder auf das frühere Ergebnis führt. Da hat sich denn bei

1) Verhandl. d. internat. Schiffahrts-Kongresses, Düsseldorf 1902, 1. Abt., 15. Mitteilung, S. 30.

Flüssen die Messung mit dem Woltmannflügel, den man in verschiedenen Lotrechten eines Querschnittes längs einer lotrechten Stange von Meßpunkt zu Meßpunkt gleiten läßt, als die beste herausgestellt. Solche sorgfältig durchgeführte Mengenbestimmungen[1]) weichen, wenn die Einzelgeschwindigkeiten zwischen 0,5 und 3 m sec^{-1} liegen, vom Mittel der Bestimmungen um nicht mehr als 3 v. H. ab, und es ist sogar anzunehmen, daß die Abweichungen von der Wahrheit nicht viel größer sind, wenn die Querschnittsaufnahme, welche häufig große Schwierigkeit bietet, zutrifft. An der Cornell-Universität hat man die Ergebnisse des geschilderten Verfahrens mit den für genau geltenden Angaben eines Meßwehres in einem mit senkrechten Wänden versehenen Betonfluder von 126 m Länge, 4,88 m Breite und 0,002 Gefälle bei mittleren Querschnittsgeschwindigkeiten U bis zu 3 m sec^{-1} verglichen und bei Tiefen von etwa 0,25 bis gegen 3 m, wenn $U > 0{,}45$ m sec^{-1} war, die Abweichungen < 2 v. H. gefunden. Bei geringeren Geschwindigkeiten nahm die Abweichung, welche z. B. bei $U = 0{,}25$ m sec^{-1} schon 6 v. H. betrug, rasch zu.

V. Die Geschwindigkeitsverteilung.

35. Die Änderung der Geschwindigkeit mit der Tiefe ohne Rücksichtnahme auf die Seitenwände. Die praktisch wichtigste Frage, die nach dem Durchflusse, machte, weil es vor der Erfindung[2]) und Verbesserung der *Pitot*schen Röhre und des *Woltmann*schen Flügels[3]) keine gute Vorrichtung zum Messen in der Tiefe gab, schon frühe den Wunsch rege, aus der mittels Schwimmer bestimmbaren Oberflächengeschwindigkeit die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit berechnen zu können. Hierzu trat das wissenschaftliche Interesse überhaupt und das Bestreben, Einblick in die bei der Wasserbewegung herrschenden Kräfte zu erlangen. Man befaßte sich also mit der Änderung der Geschwindigkeit mit der Tiefe lange, ehe man noch an die Erforschung der Geschwindigkeitsverteilung bei Röhren dachte.

Zunächst[4]) herrschte bei den älteren italienischen Hydraulikern,

---

1) Washington, United States Geological Survey, Water-Supply and Irrigation Paper 95 (1901): *E. C. Murphy,* Accuracy of Stream Measurements p. 98. Auszug: Zentralblatt d. Bauverwaltung 26 (1906), S. 82.

2) *Pitot* legte 1732 seine Erfindung der Pariser Akademie vor.

3) *R. Woltmann,* Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels, Hamburg 1790, 2. Aufl. 1832. Bezüglich der Verbesserungen siehe etwa *R. Jasmund,* Handb. d. Ingenieurwissenschaften, 3. Wasserbau, 1. Bd., 4. Aufl., Leipzig 1911, S. 422.

4) Demostrazioni geometriche della misura dell' acque correnti, Rom 1628 u. 1629.

Fluß	Pegel	Durchfluß Q in m^3/sec für Pegelhöhe h in cm		Jahrbuch
Donau	Engelhartszell	$603 + 4{,}8575\,h - 0{,}00252\,h^2$		12 = 1904, 1, S. 300
"	Stein = km 74,46	$1540 + 8{,}632\,h + 0{,}0109\,h^2$		6 = 1898, 1, S. 308
"	"	$1495 + 7{,}79247\,h + 0{,}01008\,h^2$		8 = 1900, 1, S. 299
"	"	$1390 + 8{,}59\,h + 0{,}00285\,h^2$		13 = 1905, 1, S. 259
"	Kaiser Franz Josef-Brücke	$1960 + 7{,}8754\,h + 0{,}01157\,h^2$		6 = 1898, 1, S. 311
	in Wien = km 2,68	$1597 + 7{,}12\,h + 0{,}0086\,h^2$		8 = 1900, 1, S. 305
"	"	$1690 + 6{,}82\,h + 0{,}00503\,h^2 +$		11 = 1903, 1, S. 337
		$+ 1198 - 10{,}99\,h + 0{,}025\,h^2$	$230 < h < 400$	11 = 1903, 1, S. 338
"	"	$1690 + 7{,}8\,h + 0{,}008\,h^2$	$h \leqq 257$	13 = 1905, 1, S. 259
"	"	$1690 + 7{,}3\,h + 0{,}008\,h^2$		
		$- 1{,}354\,(h - 200) + 0{,}024\,(h - 200)^2$	$h \geqq 257$	
Donaukanal	Kaiser-Jubiläumsbrücke in	$179{,}1 + 0{,}929\,h + 0{,}0012\,h^2$	h bis -122	6 = 1898, 1, S. 311
"	Wien	$198{,}62 + 1{,}248\,h + 0{,}0025\,h^2$	$-122 < h < +135$	
"	"	$163{,}3 + 1{,}16657\,h + 0{,}00231\,h^2$		8 = 1900, 1, S. 309
"	"	$209{,}9 + 0{,}786\,h - 0{,}001029\,h^2$		13 = 1905, 1, S. 259
Donau	Nußdorf (Wien, vor der	$1950 + 8{,}183\,h + 0{,}00633\,h^2$	$h \leqq 200$	13 = 1905, 1, S. 259
	Teilung in Strom u. Kanal)	$1950 + 8{,}133\,h + 0{,}00633\,h^2$		
		$+ 0{,}166\,(h - 200) + 0{,}018\,(h - 200)^2$	$h \geqq 200$	
Inn	Unter der Sannamündung	$32{,}6 + 0{,}7409\,h + 0{,}004684\,h^2$		13 = 1905, 1, S. 256
"	Innsbruck	$78{,}5 + 1{,}2133\,h + 0{,}003238\,h^2$		8 = 1900, 1, S. 297
"	"	$57 + 1{,}4324\,h + 0{,}002295\,h^2$		12 = 1904, 1, S. 300
"	Volders	$72{,}8 + 0{,}9786\,h + 0{,}00991\,h^2$	$h \leqq 66$	13 = 1905, 1, S. 258
"	"	$27{,}8 + 2{,}0589\,h + 0{,}003734\,h^2$	$h \geqq 66$	
"	Kufstein	$110 + 1{,}40658\,h + 0{,}00378\,h^2$		8 = 1900, 1, S. 297

Fluß	Pegel	Durchfluß Q in m^3/sec für Pegelhöhe h in cm		Jahrbuch
Inn	Kufstein	$110 + 0{,}7095\,h + 0{,}01238\,h^2$	$h \leqq 104$	13 = 1905, 1, S. 258
"	"	$286{,}4 - 0{,}7576\,h + 0{,}01024\,h^2$	$h \geqq 104$	
"	Schärding	$246{,}4 + 1{,}941\,h + 0{,}011\,h^2$		12 = 1904, 1, S. 300
"	"	$242{,}0 + 2{,}26\,h + 0{,}009\,h^2$		13 = 1905, 1, S. 258
Salzach	Golling	$207{,}3 + 1{,}9103\,h + 0{,}004473\,h^2$		13 = 1905, 1, S. 258
"	Oberndorf	$-110 + 0{,}76882\,h + 0{,}002656\,h^2$		12 = 1904, 1, S. 300
"	"	$-142{,}6 + 0{,}814\,h + 0{,}0028856\,h^2$		13 = 1905, 1, S. 258
Ager	Kammer	$5{,}88 + 0{,}021\,h + 0{,}008\,h^2$		12 = 1904, 1, S. 300
Traun	Wels	$350{,}4 + 3{,}772\,h + 0{,}011\,h^2$		12 = 1904, 1, S. 301
Drau	Villach	$50{,}80 + 0{,}845\,h + 0{,}0048\,h^2$	$h \leqq 210$	11 = 1903, 4, S. 100
Laibachfluß	Laibach	$92{,}175 + 0{,}643\,h + 0{,}00114\,h^2$		11 = 1903, 5, S. 78
Gruberkanal	"	$75{,}882 + 0{,}483\,h + 0{,}00069\,h^2$		11 = 1903, 5, S. 78
Save	Littai	$3{,}2 + 1{,}8921\,h + 0{,}006278\,h^2$		13 = 1905, 5, S. 71
Etsch	Sigmundskron	$49{,}2 + 1{,}01227\,h + 0{,}001087\,h^2$		13 = 1905, 7, S. 87, 90
"	Trient	$133{,}8 + 2{,}141\,h + 0{,}00143\,h^2$		9 = 1901, 7, S. 114
"	"	$105{,}4 + 2{,}43\,h + 0{,}0001031\,h^2$		13 = 1905, 7, S. 90
Isonzo	Karfreit	$21{,}4 + 0{,}707\,h + 0{,}00783\,h^2$		13 = 1905, 8, S. 42
"	Sagrado	$128{,}9 - 1{,}85\,h + 0{,}0071\,h^2$	$h \leqq 190$	12 = 1904, 8, S. 44
		$256 - 3{,}055\,h + 0{,}00991\,h^2$	$190 < h < 410$	
Wisłoka	Skurowa	$-13{,}004 - 0{,}0484\,h + 0{,}0019\,h^2$		13 = 1905, 12, S. 140
"	Gawłuszowice	$39{,}05 - 0{,}696\,h + 0{,}0037\,h^2$		
Dniestr	Zaleśce	$35{,}6 + 0{,}663\,h + 0{,}00164\,h^2$		13 = 1905, 13, S. 78
"	Niżniów	$122{,}07 + 1{,}982\,h + 0{,}00158\,h^2$		
"	Zaleszczyki	$61{,}47 + 1{,}239\,h + 0{,}00805\,h^2$		

weil sie zwischen der Geschwindigkeit beim Ausfluß aus Öffnungen und bei der Strömung in Flüssen nicht unterschieden, die Ansicht, daß die Geschwindigkeit mit der Tiefe zunehme. So glaubte *B. Castelli*[1]), der aus Versuchen geschlossen hatte, daß die Ausflußgeschwindigkeit der Tiefe proportional sei, dasselbe von der Strömungsgeschwindigkeit. Als später *E. Torricelli*[2]) die Quadratwurzel aus der Tiefe für den Ausfluß an die Stelle der Tiefe setzte, lehrte *D. Guglielmini*, daß die Geschwindigkeit nicht nur an jeder Stelle gegen die Sohle hin, sondern auch von der Quelle bis zum Meere wie die Wurzel aus der Fallhöhe wachse. Daß letzteres unrichtig war, zeigte der Augenschein an jedem Flusse und *G. Grandi* meinte daher, daß der *Toricelli*sche Satz nur für die Zunahme von der Oberfläche zur Sohle gelte, wonach allerdings an der Oberfläche das Wasser still stehen müßte. *B. Zendrini*, welcher zuerst versuchte, aus unmittelbaren Messungen die Form der Geschwindigkeitskurve herzuleiten, fand zwar auch infolge der Fehlerhaftigkeit seiner Vorrichtung — des Stromquadranten —, daß die Geschwindigkeit mit der Tiefe zunehme, doch waren die Abweichungen vom *Torricelli*schen Gesetz so groß, daß er Modifikationen in dasselbe einführte.

Erst *Mariotte*[3]) wies im Anfange des 18. Jahrhunderts nach, daß das Wasser nach unten nicht schneller, sondern langsamer fließe. Er verband einen Oberflächen- mit einem Tiefenschwimmer, und der obere Schwimmer eilte dem unteren nur dort nicht voran, wo das Bett — wie z. B. unter engen Brücken — plötzliche Verengerungen aufwies. Ähnlich fand *Pitot*, daß sich das Wasser nahe unter der Oberfläche am schnellsten und gegen die Sohle zu stetig langsamer bewege, und zwar auch unter Brücken. *Du Buat*[4]) folgerte aus 38 Beobachtungen an Kanälchen von 2 bis 10 Pariser Zoll (54 bis 271 mm) Tiefe, daß die Geschwindigkeit von u_s an der Sohle bis zu u_0 an der Oberfläche gleichmäßig wachse, und daß die mittlere Geschwindigkeit in Zollen ausgedrückt $\bar{u} = \frac{1}{2}(u_s + u_0) = u_0 - \sqrt{u_0} + 0{,}5$ sei. Für metrisches Maß gibt dies

$$\bar{u} = \tfrac{1}{2}(u_s + u_0) = u_0 - 0{,}164\sqrt{u_0} + 0{,}014. \tag{56}$$

R. Woltmann meinte, daß die Bewegung bei Strömen in einer gewissen großen Tiefe aufhöre, und schloß aus Beobachtungen von *Brünings*[5])

1) Opera geometrica, Florenz 1644.

2) Der Verfasser folgt der Darstellung *Hagens*, Handbuch der Wasserbaukunst, 3. Aufl. Berlin 1871, 2. T., 1. Bd. S. 280.

3) Traité du mouvement de l'eau. Teil 2, Gespräch 3, Regel 5.

4) *Dubuats* Grundlehren der Hydraulik, übersetzt von *Kosmann*, mit Zusätzen von *Eytelwein*. Berlin 1801. S. 125.

5) *Brünings*, Abhandlung üb. die Geschwindigkeit fließenden Wassers, übers v. *Krönke*, Frankfurt a. M. 1798.

im Niederrhein und von *Ximenes*[1]) im Arno, daß die Geschwindigkeitsskala eine Parabel mit senkrechter Achse sei, deren Scheitel dort liege, wo die Geschwindigkeit Null wäre, wenn das Wasser überhaupt so tief reichen würde. Für die von ihm betrachteten Flußstrecken wichen dabei die innerhalb des Wassers liegenden Parabelstücke kaum von einer Geraden ab. *J. A. Eytelwein*[2]) begnügte sich der Einfachheit halber mit einer solchen Geraden und empfahl (in Metermaß ausgedrückt) die Geschwindigkeit

$$\bar{u} = (1 - 0{,}0127\,h)\,u_0 \tag{56 a}$$

zu setzen.

R. Prony[3]) tadelte an *Dubuats* Formel (56), daß sie für sehr schwache Strömung augenscheinlich zu falschen Ergebnissen führe, nämlich zu $u_s = 0$ für eine Oberflächengeschwindigkeit $u_0 = 0{,}027$ m/sec^{-1} und zu $u_s = 0{,}027$ m sec^{-1} für $u_0 = 0$; er leitete aus *Dubuats* Beobachtungen

$$\bar{u} = \frac{u_0 + 2{,}372}{u_0 + 3{,}153}\,u_0\,, \tag{56 b}$$

worin alles in Metermaß, ab und erklärte es für zulässig,

$$\bar{u} = 0{,}816\,u_0 \tag{56 c}$$

zu schätzen. *Baumgarten*[4]) fand, daß (56 b) bei Geschwindigkeiten von über 1,5 m zu große Werte gebe, und so empfahl er für solche Fälle

$$\bar{u} = 0{,}8\,\frac{u_0 + 2{,}372}{u_0 + 3{,}153}\,u_0\,. \tag{56 d}$$

Später bemühte sich *F. E. T. Funk*[5]) nachzuweisen, daß die Geschwindigkeitsskala eine logarithmische Linie sei, doch fällt dieselbe bei allen von ihm mitgeteilten Messungsreihen, wie *G. Hagen*[6]) bemerkt, so nahe mit der Geraden zusammen, daß der Unterschied im allgemeinen kaum den fünfzigsten Teil der Abweichungen der Beobachtungen von der logarithmischen Linie beträgt. *A. v. Gerstner*[7]) leitete aus den Angaben von *Ximenes* und *Brünings* ab, daß die Geschwindigkeiten den Ordinaten einer Ellipse entsprechen, deren Achsenverhältnis und Höhenlage aber sehr verschieden sei, während *Raucourt*[8]), der an der Newa maß, sich für einen Ellipsenbogen in der Tiefe und eine fast

1) *Ximenes,* Nuove sperienze idrauliche, Siena 1780.
2) *J. A. Eytelwein,* Handbuch d. Mechanik u. Hydraulik, Berlin 1801. S. 198.
3) *Prony,* Recherches physico-mathémat. Paris 1804, S. 73.
4) Ann. d. ponts et chauss. (2) 14 (1847²), S. 361.
5) *Funk,* Darstellung der richtigsten Lehren der Hydraulik, Berlin 1820. S. 39.
6) Handbbuch, 3. Aufl., 2. Teil, 1. Bd., S. 288.
7) *F. J. v. Gerstner,* Handbuch der Mechanik, 2. Band. Prag 1832. S. 321.
8) Ann. d. ponts et chauss. (1) 4 (1832²), S. 1.

gerade, vom Winde abhängige Linie höher oben entschied. Nach *J. Weisbach*[1]) sollte die Geschwindigkeit von der Oberfläche bis zur Sohle gleichmäßig abnehmen und sich die Oberflächen- zur Sohlengeschwindigkeit wie 1:0,83 verhalten. *W. Lahmeyer*[2]) drückte die Verteilung der Geschwindigkeiten u in jeder Lotrechten durch die Gleichung der Geraden

$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - (0{,}1383 + 0{,}0468\,h)\frac{z}{h}$$

aus, worin z die wechselnden Tiefen, h die Gesamttiefe bedeutet. *A. A. Humphreys* und *H. L. Abbot* stützten sich auf zahlreiche von ihnen im Mississippi mit Doppelschwimmern ausgeführte Messungen, die allerdings ungenau waren, weil der Wasserdruck auf die Verbindungsschnur der Schwimmer die Bewegung des unteren Schwimmkörpers nicht unerheblich beeinflußte. Sie folgerten nicht ohne Willkür[3]), daß die Endpunkte der von einer Lotrechten aufgetragenen Geschwindigkeiten eine Parabel mit wagrechter Achse bilden, deren Scheitel bei Windstille in 0,317 der Tiefe liege.

Von viel größerer Bedeutung als die bis dahin vorgenommenen, waren die Untersuchungen, die *H. Darcy* 1855 begann und die nach seinem 1858 erfolgtem Tode *H. Bazin* — der schon sein Mitarbeiter gewesen war — bis 1860 fortsetzte. Es wurde die Geschwindigkeitsverteilung über Querschnitte verschiedener Form in 82 Fällen mittels der von *Darcy* verbesserten *Pitot*schen Röhre erhoben und in 44 dieser Fälle in eine Zeichnung des Querschnittes eingetragen. In 23 dieser Zeichnungen, darunter 13, die sich auf rechtwinklige Querschnitte bezogen, wurden dann die Punkte gleicher Geschwindigkeit durch Kurven, Isotachen, verbunden, deren Anblick genügt, um zu erkennen, daß die Seitenwände einen bedeutenden Einfluß auf die Geschwindigkeitsverteilung ausüben. Die Einwirkung nimmt mit der Entfernung von den Wänden ab, und *Bazin* gelangte zu der Überzeugung, daß, wenn die Breite mindestens fünfmal größer als die Tiefe ist, die Geschwindigkeitsskala in der mittleren Lotrechten nahezu mit der in einem unendlich breiten Rechtecke übereinstimme. Aus den Messungen in acht mittleren Lotrechten berechnete *Bazin*[4]), daß die Geschwindigkeit ihrer Punkte dem Gesetze

$$\text{(56 e)} \qquad \frac{u_0 - u}{\sqrt{hJ}} = 20\left(\frac{z}{h}\right)^2$$

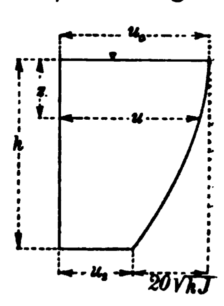
1) *J. Weisbach*, Lehrbuch der Ingenieur- u. Maschinenmechanik 1, Braunschweig 1845. S. 488.

2) Allgemeine Bauzeitung 17 (1852), S. 158.

3) Vgl. *G. Hagen*, Z. f. Bauw. 18 (1868), S. 67.

4) Recherches hydrauliques, S. 230.

folge. Er setzte also nicht nur fest, daß in breiten Läufen die Geschwindigkeitsskalen Parabeln mit wagrechter Achse seien, sondern gab auch die Parameter der Parabeln an. Dabei ist hervorzuheben[1]), daß die untersuchten Querschnitte höchst verschiedene Rauhigkeiten besaßen, nämlich glatt verputzt oder mit Brettern verkleidet oder mit Latten, die Fugen von 1 oder 5 cm Weite freiließen, benagelt waren, aber allerdings auch zu bemerken, daß die Querschnitte nur 0,265 bis 0,380 m tief waren und daß *Bazin* in jeder Lotrechten nur in drei Punkten die Geschwindigkeit maß. Da nach (56e) die u-Kurve eine Parabel mit wagrechter Achse in der Oberfläche bildet, ist nach (56 e) die mittlere Geschwindigkeit

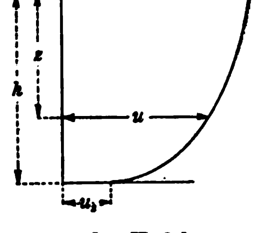


$$\bar{u} = \frac{2}{3} u_0 + \frac{1}{3} u_s = u_0 - \frac{20}{3} \sqrt{hJ}. \tag{56 f}$$

Bazin war übrigens der Meinung, daß wenn die Wirkung der Seitenwände tatsächlich auf Null gebracht werden könnte, der Koeffizient[2]) von $z^2 : h^2$ sich $= 24$ zeigen würde, welcher Behauptung *Boussinesq*[3]) insofern widerspricht, als er für unendliche Breite den Koeffizienten zu 22,27 berechnet.

G. Hagen[4]) widerspricht der Annahme von Parabeln mit wagrechter Achse und sagte, daß die Geschwindigkeiten den Abszissen von Parabeln mit lotrechter Achse entsprechen, daß nämlich

$$\frac{u - u_s}{u_0 - u_s} = \sqrt{\frac{h - z}{h}}$$



sei. Während nach *Bazin* die Geschwindigkeit an der Oberfläche ihr mathematisches Maximum hat, hier also wenig wechselt, müßte sie nach *Hagen* von der Oberfläche abwärts sofort merklich abnehmen, was der Erfahrung widerspricht. In einer späteren Veröffentlichung gibt *Hagen*[5]) noch

$$\bar{u} = u_0 (1 - 0{,}0582 \sqrt{h}) \tag{56 g}$$

an.

1) Ebenda S. 228.
2) Ebenda S. 233.
3) Eaux courantes, S. 87, Théorie, S. 35.
4) *G. Hagen,* Über die Bewegung des Wassers in Strömen, Berlin 1869.
5) *G. Hagen,* Untersuchungen über die gleichförmige Bewegung, Berlin 1876, S. 101.

Harder[1]) ahmt dadurch die häufig in der Mitte von Wasserläufen beobachtbare Form der Geschwindigkeitskurve nach, daß er zwei Ellipsen verwendet, die im Punkte der Maximalgeschwindigkeit eine gemeinschaftliche senkrechte Berührungslinie besitzen.

G. Lavale[2]) glaubte, daß die Geschwindigkeit an der Sohle Null sei und nach oben derart wachse, daß man in der Höhe $h-z$ über der Sohle

(56 h) $$u = u_{max} \sqrt[n]{\frac{h-z}{h}}$$

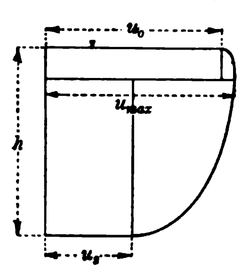
habe, wobei (in Metermaß) die komplizierte Beziehung

$$n = 1 + 4{,}8 \sqrt[12]{\frac{h}{u_0}}$$

zutreffe, doch nehme bei $h < 2{,}5\, u_{max}$ die Geschwindigkeit von der Oberfläche nach unten stärker ab und gelte dann der noch längere Ausdruck

$$n = 0{,}818 \sqrt[4]{\frac{h}{u_{max}}} \left(1 + 4{,}8 \sqrt[12]{\frac{h}{u_{max}}}\right).$$

C. Heßle[3]) war der Anschauung, daß Sohle und Oberfläche in ähnlicher Weise die Geschwindigkeit beeinflussen. In mechanischem Sinne ist die Auffassung unbegründet, aber sie führt auf eine Kurvenform, die für den mittleren Teil der Wasserläufe zutrifft. *Heßle* setzte nämlich die Geschwindigkeit u aus einem unveränderlichen Teil und zwei Parabelabschnitten zusammen, und indem er dann die u von einer Senkrechten aus auftrug, erhielt er eine Kurve, die sowohl Spiegel wie Sohle zu Tangenten hatte, und der Gleichung



(56 i) $$u = \sqrt{2az} + \sqrt{2b(h-z)} + c,$$

worin a, b und c Konstante bedeuten, entsprach. Seinen Größtwert hat u nach (56 i) in der Tiefe

(56 k) $$\frac{a}{a+b} h;$$

sein Mittelwert ist

(56 l) $$\bar{u} = \frac{2}{3} \sqrt{h} \left(\sqrt{2a} + \sqrt{2b}\right) + c.$$

Heßle bemerkt, daß sich im allgemeinen die mittlere Geschwindigkeit bei den Flüssen zwischen $z = 0{,}56\,h$ und $z = 0{,}60\,h$ zeige. Da nun für diese Stelle nach den Gleichungen (56 i) und (56 l)

1) *Harder*, Die Theorie der Bewegung des Wassers in Flüssen u. Kanälen, Hamburg 1878, S. 29, 114.

2) *J. Rapp*, Unsere natürlichen Wasserläufe, Weilheim 1883, S. 16.

3) Z. f. Gewässerkunde 2 (1899), S. 26.

$$\sqrt{az} + \sqrt{b(h-z)} = \frac{2}{3}\sqrt{h}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

oder

$$\sqrt{\frac{a}{b}\frac{z}{h}} + \sqrt{1 - \frac{z}{h}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{2}{3}$$

oder

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\left(\sqrt{\frac{z}{h}} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \sqrt{1 - \frac{z}{h}}$$

sein muß, schwankt für obige Grenzwerte $\sqrt{\frac{a}{b}}$ zwischen 0,0410 und 0,317, oder die Tiefenlage des Maximums nach (56 k) zwischen 0,0017 h und 0,09 h.

Nach *T. Christen*[1]) bildet in steilwandigem Gerinne gleichförmiger Tiefe die Vertikalkurve des Stromstriches, wenn die Tiefe nicht größer als etwa 0,31 der Breite ist, solange die Maximalgeschwindigkeit U_{max} sich an der Oberfläche befindet, die Parabel 8. Ordnung

$$(56\,\mathrm{m}) \qquad \begin{aligned} u = U_{max}\sqrt[8]{\frac{h-z}{h}} &= \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{k^3}}{0{,}4354}\sqrt{TJ}\,\sqrt[8]{b\frac{h-z}{h}} \\ &= \frac{U_{max}}{U}\sqrt{2k^3}\sqrt{TJ}\,\sqrt[8]{b\frac{h-z}{h}}, \end{aligned}$$

welche um so genauer zutreffe, je niedriger der Wasserstand steht. Das Verhältnis der mittleren Querschnittsgeschwindigkeit U zu U_{max} ist hierbei

$$U : U_{max} = 0{,}4354\sqrt[4]{k}.$$

Die Parabeln höherer Ordnung haben die Eigenschaft, sich erst innig der Abszissenachse anzuschließen und dann rasch von ihr zu entfernen. Wenn man also ganz an der Sohle die Geschwindigkeit Null und doch nahe daneben rasch fließendes Wasser haben will, so kann man dies mit einer höheren Parabel als Verteilungskurve erreichen. Richtiger ist es aber, wie in § 42 ausgeführt werden wird, verschiedene Gesetze für die Nachbarschaft der Sohle und für den übrigen Querschnitt aufzustellen, also die Kurve für letztere mit einer endlichen Abszisse anfangen zu lassen. Auch ist die Übereinstimmung der höheren Parabel mit den Messungsergebnissen keineswegs überzeugend.

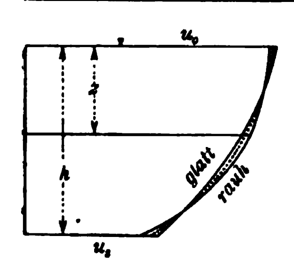
H. A. Pressey[2]) hat das Mittel aus 78 Geschwindigkeitsskalen, die in acht Flüssen in der Nähe New-Yorks erhoben wurden, berechnet und von diesen Skalen wieder gesondert 25, die sich über glatter und 25,

1) *T. Christen*, Das Gesetz der Translation des Wassers, Leipzig 1903. S. 117. Bezüglich der Bedeutung der Buchstaben siehe oben Gl. (48).

2) Washington, U. S. Geological survey, Water-Supply and Irrigation Paper 76 = *H. A. Pressey*, Observation on the flow of rivers, 1903, S. 45, 47..

die sich über rauher Sohle befanden, und so nachstehende Zahlentafel für das Verhältnis $u : \bar{u}$ in verschiedenen Tiefen erhalten:

$\frac{z}{h} =$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95	Mittel
Sohle Mittel	117,0	117,9	116,3	113,2	109,0	103,6	96,5	87,9	77,2	61,4	100
Sohle Glatt	118,7	118,8	116,2	112,4	107,6	102,0	95,4	87,8	78,1	63,0	100
Sohle Rauh	116,2	117,0	116,0	113,8	110,3	105,3	97,7	88,3	76,5	58,9	100



Nach *Pressey* wächst also das Verhältnis $(u_0 - u_s) : \bar{u}$ etwas mit der Rauhigkeit, wie das auch nach *Basins* Gleichung (56e)

$$\frac{u_0 - u_s}{\sqrt{hJ}} = 20$$

oder

$$u_0 - u_s = \text{ungefähr } 20 \frac{U}{c}$$

der Fall sein soll. Nebenbei bemerkt gibt die später kommende Gl. (62c), die auch auf *Basins* Versuchen fußt, für gleichmäßige Tiefe

$$u_0 - u_s = \frac{K}{2c} U = 22{,}28 \frac{U}{c},$$

worin U mit den $\bar{u}$ aller Lotrechten übereinstimmen soll.

Eine sich an die Geschwindigkeitskurve anknüpfende Frage von praktischer Bedeutung ist die, wo man zu messen hätte, um mit einer einzigen Messung die mittlere Geschwindigkeit einer Senkrechten zu erhalten. Nach den älteren Forschern, welche die Geschwindigkeit gleichmäßig abnehmen lassen, läge die Meßstelle offenbar in der Mitte zwischen Spiegel und Sohle, für die Anhänger der Parabel mit wagrechter Achse, wie *Basin*, aber niedriger, in 0,577 der Tiefe ($z = 0{,}577\,h$), nach *Hagens* Parabel war sie in $^5/_9$, nach *Humphreys* und *Abbot* in $^2/_3$ der Tiefe. Später leitete *G. Hagen*[1]) aus *Basins* Versuchen ab, daß man bei einer Stromtiefe h (in m)

$$0{,}5 - 0{,}0246 \sqrt{h}$$

unter dem Spiegel zu messen habe. Daß *Heßle* die mittlere Geschwindigkeit in die Tiefe $0{,}56\,h$ bis $0{,}60\,h$ verlegt, wurde bereits mitgeteilt. Das trifft nach neueren Untersuchungen[2]) an amerikanischen Flüssen ziemlich zu, denn diese ergaben folgendes: In einem breiten, seichten Gewässer von 10 bis 30 cm Tiefe und sandigem oder feinkiesigem Bett

1) *G. Hagen*, Untersuchungen über d. gleichförmige Bewegung des Wassers, Berlin 1876, S. 103.

2) Washington, U. S. Geological Survey, Water-Supply and Irrigation Paper 95 (1904) = *E. C. Murphy*, Accuracy of Stream Measurements, S. 317.

liegt der Faden mittlerer Geschwindigkeit $\bar{u}$ in etwa 0,5 bis 0,55 der Tiefe h, zugleich ist $\bar{u}$ hier gleich dem Mittel der Geschwindigkeiten, die 4,5 cm über der Sohle und 4,5 cm unter dem Spiegel gemessen werden. (Freilich fallen in 10 cm tiefen Wässern die beiden Meßpunkte fast zusammen.) Bei grobem Kies von 2,5 bis 6 cm Durchmesser ist der Flügel statt dessen 9 bis 10 cm über der Sohle und 4,5 cm unter der Oberfläche zu halten. In breiten Flüssen von 0,3 bis 0,6 m Tiefe mit grobkiesigem Bett liegt $\bar{u}$ in der Tiefe $z = 0{,}55$ bis $0{,}6\,h$. Erhebt man $\bar{u}$ durch eine einzige Messung in der Tiefe $z = 0{,}58\,h$, so erhält man gute Ergebnisse. (Dies stimmt auffallend mit *Bazins* Parabel.) In gewöhnlichen Flüssen von 0,3 bis 1,8 m Tiefe liegt $\bar{u}$ bei z etwa $= 0{,}6\,h$. In Bächen von 6 bis 12 m Breite liegt $\bar{u}$ etwas tiefer als in gleich tiefen, aber breiten Flüssen. Das Mittel aus der Oberflächen- und Sohlengeschwindigkeit kann nur bei glattem Bett einigermaßen als $\bar{u}$ betrachtet werden. Angeregt durch diese Forschung hat *E. Krüger*[1]) 16 Querschnittsaufnahmen über feinem bis grobem Sand mit 108 Lotrechten und 400 Geschwindigkeiten von 0,08 bis 0,9 m $\sec^{-1}$ untersucht. Die Lage von $\bar{u}$ schwankte zwar von $0{,}42\,h$ bis $0{,}86\,h$ unter dem Spiegel, aber es wäre doch zulässig gewesen, in jeder Lotrechten nur in *einem* Punkte in 0,6 oder 0,65 der Lotrechtentiefe zu messen, denn statt des U der vollständigen Aufnahmen hätte man bei Messung in

0,6	0,65	0,7 Tiefe
0,92 bis 1,10 U	0,931 bis 1,065 U	0,845 bis 1,05 U

gefunden. Schließlich sei hier *R. Jasmund*[2]) genannt, der auf Grund von Messungen in der Elbe und Rhein es als vielfach zulässig erklärte, in jeder Lotrechten nur in 0,632 der Tiefe zu messen, um U zu erhalten.

36. Geschwindigkeitsverteilung im Gerinne von endlicher Breite. *Bazin* erstrebte im wesentlichen die Erforschung des Wachstums der Geschwindigkeit mit der Tiefe im unendlich breiten Gerinne, doch gab er auch schon an[3]), daß bei nicht großer Breite die Maximalgeschwindigkeit U_{max} des ganzen Querschnittes von der Oberfläche abwärts rücke und Gl. (56e) für die meisten Fälle der Praxis zu

$$\text{(56n)} \qquad \frac{U_{max} - U}{\sqrt{hJ}} = 14$$

werde, worin U die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Querschnittes

1) Zentralblatt d. Bauverwaltung 26 (1906), S. 276.

2) Handbuch der Ingenieurwissenschaften 3, Wasserbau, 1. Bd. Gewässerkunde, 4. Aufl. 1905, S. 474, daselbst auch weitere Literatur S. 461, 472.

3) Recherches hydrauliques 1, S. 147.

bedeutet. Für $U = 42\sqrt{hJ}$, wie das bei vielen Flußstrecken zutrifft, würde aus (56n)

$$U = \frac{3}{4}\, U_{max} \tag{56o}$$

hervorgehen, welche Beziehung in der Tat und zwar von *W. Lahmeyer*[1]) aufgestellt worden ist. Bei parabolischem Umriß, parabolischer Geschwindigkeitsverteilung wäre $U = 0{,}5\, U_{max}$, bei überall gleicher Geschwindigkeit aber $= U_{max}$. Die Gl. (56o) entspricht also dem Mittel der Grenzfälle.

R. Jasmund erweiterte das Problem der Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt wechselnder Tiefe wie folgt: Er bildete[2]) aus 445 Lotrechten, längs welchen in vier Querschnitten der Elbe die Geschwindigkeiten erhoben wurden, sechs Gruppen, von denen die erste die Lotrechten von 8 bis 7 m Länge (also 8 bis 7 m Wassertiefe), die letzte die Lotrechten von 3 bis 2 m Länge umfaßte. Für jede Gruppe bildete er den Mittelwert y, der in den Höhen $z = 0{,}15$, $0{,}3$, $0{,}6$, 1, 2 usw. Meter über der Grundplatte der Flügelstange (also so ziemlich der Sohle) gemessenen Geschwindigkeit. Dann verglich er unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate die Eignung verschiedener Kurven zur Wiedergabe dieser y. Dabei zeigte sich der mittlere Fehler in mm sec^{-1} der sechs Gruppen bei der

Parabel mit wagrechter Achse	$y = a + bz + cz^2$	18,4	bis	63,9,
„ „ lotrechter „	$z = a + by + cy^2$	24,5	„	53,4,
gleichseitigen Hyperbel	$(y - b)(z + a) = \text{konst.}$	6,6	„	27,5,
logarithmische Linie	$y = a + b \log(z + c)$	0,9	„	25,4.

Die logarithmische Linie, deren Gleichung auch

$$y = a + 0{,}434\, b \log \text{nat} (z + c) \tag{57}$$

geschrieben werden kann, war also am günstigsten und zeigte sich auch einer Hyperbel mit vier wählbaren Konstanten und einer Parabel n^{ter} Ordnung überlegen[3]). In Ziffern ausgedrückt fand sich beispielsweise für die sechste Gruppe, für welche die logarithmische Linie am besten stimmte (c war $= 0$)

$$y = 0{,}5882 + 0{,}26368 \log z.$$

Jasmund hat ferner aus zusammen 58 Messungen nachstehende Werte von $0{,}434\, b$ berechnet:

---

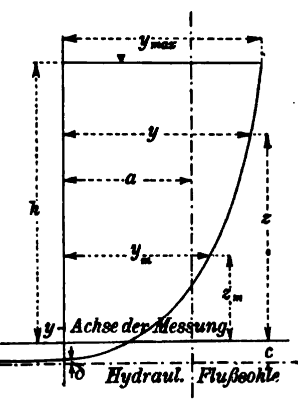
1) Allgem. Bauzeitung 17 (1852), S. 156.
2) Z. f. Bauw. 43 (1893), Sp. 124.
3) Z. f. Bauw. 47 (1897), Sp. 306.

Meßstelle	1000 J im Mittel	0,434 b im Mittel
Mühlberg	0,132	0,128
Bartelswerder	0,158	0,189
Barby	0,191	0,136
Hämerten	0,183	0,186
Artlenberg	0,108	0,128

Hieraus schließt der Verfasser, daß für metrisches Maß

$$0{,}434\, b = 1000\, J$$

gesetzt werden darf. Dunkler blieb der Zusammenhang zwischen a und der Flußbeschaffenheit; zwar lag bei 577 von 1214 untersuchten Lotrechten a zwischen $-0{,}09$ und $+0{,}09$ m aber manche Werte wichen stark ab, war doch bei 38 Lotrechten $a > 2$ m. — Wird angenommen, daß die Wasserbewegung noch unter die Sohle bis zur Stelle δ hinabreicht, wo $y = 0$, also



$$\log(z + c) = -\frac{a}{b}$$

wird, so findet sich, wenn h die Lotrechtenhöhe und y_{max} das y an der Oberfläche bezeichnet, für das mittlere y einer Lotrechten

$$(57\text{a})\quad y_m = \left[y_{max}(h + c) - \int^{y_{max}} e^{\frac{y-a}{0{,}434\, b}}\, dy\right] : (h + c - \delta) = \frac{y_{max}(h + c)}{h + c - \delta} - 0{,}434\, b.$$

Nun ist δ nach den Messungen nur 0,001 bis 0,01 m und daher vernachlässigbar, so daß sich

$$(57\text{b})\qquad y_{max} - y_m = 0{,}434\, b$$

ergibt[1]). Übrigens bemerkte *Jasmund* später[2]), daß diese Formel meist kleinere Werte von b liefert als die Berücksichtigung der y der ganzen Lotrechten. Die Höhenlage z_m, in der y_m herrscht[3]), bestimmt sich nach (57) aus dem Ansatz

$$y_m = a + 0{,}434\, b \log\text{nat}\,(z_m + c);$$

ferner gilt

$$y_{max} = a + 0{,}434\, b \log\text{nat}\,(h + c),$$

daher läßt sich (57b) auch schreiben

$$0{,}434\, b = 0{,}434\, b \log\text{nat} \frac{h + c}{z_m + c}$$

und folgt

$$z_m + c = \frac{h + c}{e} = 0{,}368\,(h + c)$$

1) Ebenda 43 (1893), Sp. 147.

2) Ebenda 47 (1897), Sp. 309.

3) Ebenda 43 (1893), Sp. 148.

Trotz des Interesses, das *Jasmunds* Untersuchungen einflößen, eignen sie sich wenig zur praktischen Anwendung, weil sie keinen Schluß aus der an einer Querschnittstelle herrschenden Geschwindigkeit auf die an einer anderen Stelle zulassen. Auch ist das y_m der Stromstrichlotrechten nicht etwa die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Querschnittes, weil bei Bildung des Mittelwertes y_m alle Streifen, vom breiten Streifen unter dem Spiegel bis zum verschwindenden der Stromrinne, mit gleichem Gewichte eingesetzt wurden.

Bazins Gleichungen (56e) und (56n) sollen den Schluß aus den Größtgeschwindigkeiten auf die mittleren Geschwindigkeiten der einzelnen Lotrechten ermöglichen. Das Bedürfnis der Praxis besteht aber, wie schon gesagt, darin, den Zusammenhang der mittleren Geschwindigkeit U des ganzen Querschnittes mit den vergleichsweise leicht meßbaren Oberflächengeschwindigkeiten u_0 kennen zu lernen. Folgerichtig geben daher z. B. die Österreichischen Jahrbücher in ihren Zusammenstellungen das Mittel $\bar{u}_0$ der einzelnen u_0, sowie das Maximum $u_{0\,max}$ der letzteren. Bei den S. 82 u. 83 angegebenen Messungen wurde beispielsweise erhoben:

Donau bei Stein, $c = 39{,}4\ m^{1/2} sec^{-1}$ (? bedeutet Oberflächenmessung)								
U =	2,34	2,14	1,93	1,59	1,46?	1,44	1,40	1,48?
$\bar{u}_0$ =	2,54	2,46	2,18	1,79	1,67	1,65	1,58	1,68
$U:\bar{u}_0$ =	0,92	0,87	0,88	0,89	0,87	0,87	0,88	0,88
$u_{0\,max}$ =	2,96	2,73	2,52	2,06	1,98	1,99	1,86	1,88
$U:u_{0\,max}$ =	0,78	0,78	0,77	0,74	0,72	0,75	0,75	0,76

Inn bei Innsbruck, $c = 40{,}6\ m^{1/2} sec^{-1}$			
U =	2,31	1,82	0,91
$\bar{u}_0$ =	2,68	2,08	0,99
$U:\bar{u}_0$ =	0,86	0,87	0,91
$u_{0\,max}$ =	3,08	2,59	1,16
$U:u_{0\,max}$ =	0,75	0,70	0,78

Inn bei Kufstein, $c = 34{,}1\ m^{1/2} sec^{-1}$			
U =	2,08	1,86	1,18
$\bar{u}_0$ =	2,35	2,09	1,20
$U:\bar{u}_0$ =	0,88	0,89	0,94
$u_{0\,max}$ =	2,90	2,64	1,48
$U:u_{0\,max}$ =	0,70	0,70	0,70

Drau bei Villach, $c = 33{,}7\ m^{1/2} sec^{-1}$			
U =	1,27	1,07	0,81
$\bar{u}_0$ =	1,36	1,11	1,36
$U:\bar{u}_0$ =	0,94	0,96	0,72
$u_{0\,max}$ =	2,02	1,61	1,24
$U:u_{0\,max}$ =	0,63	0,66	0,65

Weichsel b. Krakau, $c = 35{,}9\ m^{1/2} sec^{-1}$			
U =	0,87	0,87	0,57
$\bar{u}_0$ =	1,02	1,00	0,63
$U:\bar{u}_0$ =	0,85	0,87	0,90
$u_{0\,max}$ =	1,21	1,25	0,79
$U:u_{0\,max}$ =	0,72	0,70	0,72

Donau, 2,682 km ober Wien, $c = 50{,}0\ m^{1/2} sec^{-1}$ (Daten des nicht über die Ufer tretenden Stromes)										
U =	2,65	2,52	2,48	2,51	2,44	2,14	2,01	1,81	1,67	1,59
$\bar{u}_0$ =	2,73	2,60	2,55	2,60	2,50	2,15	2,00	1,69	1,38	1,21
$U:\bar{u}_0$ =	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98	1,00	1,01	1,07	1,21	1,32
$u_{0\,max}$ =	3,25	3,04	3,17	3,12	3,12	2,90	2,65	2,53	2,48	2,52
$U:u_{0\,max}$ =	0,82	0,83	0,78	0,80	0,78	0,74	0,76	0,71	0,67	0,63

Donaukanal, $c =$ bfg. 57 bis 30 $m^{1/2} sec^{-1}$								
U =	2,62	2,44	2,26	2,19	1,98	2,05	1,90	1,73
$\bar{u}_0$ =	2,26	2,10	2,12	1,86	1,81	1,89	1,78	1,72
$U : \bar{u}_0$ =	1,16	1,16	1,07	1,18	1,09	1,08	1,07	1,01
$u_{0\,max}$ =	2,83	2,75	2,73	2,51	2,39	2,35	2,29	2,45
$U : u_{0\,max}$ =	0,93	0,89	0,83	0,87	0,83	0,87	0,88	0,71
U =	1,68	1,75	1,71	1,34	1,31	0,78	0,63	
$\bar{u}_0$ =	1,60	1,66	1,58	1,32	1,28	0,84	0,71	
$U : \bar{u}_0$ =	1,05	1,05	1,08	1,02	1,02	0,93	0,89	
$u_{0\,max}$ =	2,11	2,28	2,23	1,75	1,73	1,08	0,88	
$U : u_{0\,max}$ =	0,80	0,77	0,77	0,77	0,76	0,72	0,72	

Nach diesen Zahlen kann eher aus der größten als aus der mittleren Oberflächengeschwindigkeit ein Schluß auf die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit gezogen werden. Dies kommt daher, daß bei Berechnung von $\bar{u}_0$ die Oberflächengeschwindigkeit über den wenig Wasser führenden seichten Flußteilen genau so wie die über der Stromrinne berücksichtigt werden. Was nun das Verhältnis $U : u_{0\,max}$ betrifft, so liegt es bei Flüssen meist zwischen 0,7 und 0,8 und nimmt ab, wenn die Rauhigkeit wächst. Von *Basins* $U : U_{max}$ der Gl. (56n), also von $c : (c + 14)$, weicht $U : u_{0\,max}$, wie folgende Zahlen zeigen, nicht sehr ab:

	Drau b. Villach	Inn b. Kufstein	Weichsel b. Krakau	Donau b. Stein
c in $m^{1/2} sec^{-1}$ =	33,7	34,1	35,9	39,4
$U : U_{max}$ (nach Gl. (56n)) =	0,71	0,71	0,72	0,74
$U : u_{0\,max}$ (gemessen) =	0,64	0,72	0,71	0,76

	Inn b. Innsbruck	Donau ob. Wien	Donaukanal
c in $m^{1/2} sec^{-1}$ =	40,6	50,0	57 bis 30
$U : U_{max}$ (nach Gl. (56n)) =	0,74	0,78	0,80 „ 0,68
$U : u_{0\,max}$ (gemessen) =	0,75	0,76	0,92 „ 0,72

Große Beachtung verdient *R. Siedeks* empirische Formel für die Berechnung der mittleren Profilgeschwindigkeit U aus der mittleren[1]) Oberflächengeschwindigkeit U_0 in einem Querschnitte[2]). Nach ihm gilt bei Querschnitten von der Breite B für mittlere Tiefen $T > 0,8$ m und $< 2,0$ m,

$$U = U_0 \sqrt[30]{\frac{T^2}{B}}, \tag{57c}$$

1) $\bar{u}_0$ bedeutet also die mittlere Oberflächengeschwindigkeit nach der üblichen Berechnungsweise, U_0 nach der *Siedeks*.

2) Öst. Woch. f. d. öff. Baud. 18 (1912), S. 229.

für mittlere Tiefen $T > 2{,}0$ m

(57d) $$U = \frac{U_0 + 0{,}4}{1{,}2} \sqrt[10]{\frac{T^2}{B}},$$

wobei er logischerweise bei der Mittelbildung den Tiefenwechsel beachtet, nämlich

$$U_0 = \frac{\text{Summe } (f u_0)}{\text{Querschnittsfläche}}$$

setzt, worin f den zum betreffenden u_0 gehörigen senkrechten Flächenstreifen bedeutet. *R. Siedek* hat diese Formeln auf Grund von mehr als 400 vollkommenen Flügelmessungen aufgestellt und in weiteren zur Untersuchung herangezogenen Fällen keinen größeren Fehler gegenüber den Messungsergebnissen als 7 v. H. gefunden. Da nach seiner Ansicht der Messungsfehler selbst mit 5 v. H. zu bewerten ist, genüge es bei Hochwassermengen, bei denen die Geschwindigkeitsmessungen in der Tiefe auf große Schwierigkeiten stoßen, bloß Oberflächengeschwindigkeitsmessungen durchzuführen. Ebenso sei dieser Vorgang bei veränderlichem Messungswasserstand vorzuziehen, da erfahrungsgemäß beim Ausgleich auf den mittleren Messungswasserstand nicht unbedeutende Fehler auftreten.

37. Die Geschwindigkeit an der Oberfläche. Isotachen. In der üblichen Gleichung (35) $U = c\sqrt{RJ}$ wird als Profilradius R der Quotient aus durchflossenem Querschnitt und benetztem Umfang eingeführt und hiermit besagt, daß die *freie* Oberfläche nicht verzögernd wirkt, also an der Luft keine merkliche Reibung statt hat. Dies hat auch *H. Bazins* Vergleichsversuch[1]) mit einem offenen und einem doppelt so hohen geschlossenen Gerinne gleicher Breite bestätigt, da sich bei übereinstimmenden Gefällen auch die Durchflüsse verdoppelten. Demgegenüber ist es überraschend, daß, wie schon *L. Ximenes*[2]) wußte, auch unter anderen *H. Bazin*[3]) bemerkte und manche Ingenieure, wie *Harder* und *Heßle* in ihren Geschwindigkeitskurven zum Ausdruck brachten, in offenen Läufen die größte Geschwindigkeit u_{max} oft nicht an, sondern unter der Oberfläche herrscht. Die Isotachenaufnahmen zeigen, daß diese Erscheinung besonders in der Strommitte auftritt. Sie kann nicht von den Seitenwänden herrühren, denn *A. A. Humphreys* und *H. L. Abbot* stellten sie auch bei 1 bis 1,5 km Strombreite im Mississippi fest. *G. van der Mensbrugghe*[4])

---

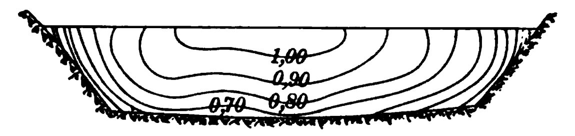
1) Recherches hydrauliques 1, Paris 1865, S. 176.

2) *L. Ximenes,* Nuove sperienze idrauliche, Siena 1780, S. 212.

3) Recherches hydrauliques 1, S. 24. Übrigens bleibt bei der Verlegung des Maximums sein Verhältnis zur mittleren Geschwindigkeit, also $u_{max} : U$, ungeändert, vgl. *H. Bazin,* Ann. d. ponts et chauss. (6) 10 (1875), S. 309f.

4) Compte rendu du 4me Congrès scientifique international des catholiques 1897, Fribourg 1898.

sieht daher als Ursache die Oberflächenhaut an, welch letztere der Verdunstung ausgesetzt sei, so daß immer neue Teilchen von ihr aufgenommen werden, welche dabei ihre kinetische Energie in potentielle umwandeln. Dann müßte aber die Erscheinung bei Regen aufhören, was sie nicht tut. *H. Hahn*, *G. Herglotz* und *K. Schwarzschild*[1]) suchen als Grund, daß die Turbulenz, also das Verhältnis der Reibung der Wasserschichten zum Unterschiede ihrer Geschwindigkeit an der Oberfläche am größten sei. Das erklärt wohl, daß hier die Geschwindigkeit sich nur wenig ändert, aber bei breitem Strome kaum, daß sie in der Nähe der Luft nach oben abnimmt. Die Abnahme beweist vielmehr, daß Wirbel oder Spiralbewegungen um wagrechte Achsen Teilchen von geringer Geschwindigkeit von der Sohle zur Oberfläche bringen. In der Tat beobachtete *J. B. Francis*[2]), daß Kalkmilch, die er nahe an der Sohle ins Wasser gespritzt hatte, nach Zurücklegung einer der 10- bis 30fachen Tiefe gleichen Strecke an der Oberfläche erschien. *F. P. Stearns*[3]) und *M. Möller*[4]) nehmen speziell an, daß das Wasser in jeder Flußhälfte längs des Ufers emporsteigt, sich dann der Mitte nähert, hier abwärts taucht und an der Sohle zum Ufer zurückkehrt. Das Treiben schwimmender Gegenstände gegen den Stromstrich hin und die Bildung einer tiefen Stromrinne unter letzterem spricht für diese Anschauung. Nach *C. Ellets*[5]) Mitteilungen würde auch die Veränderung des Wasserstandes den Vorgang beeinflussen. Es bleibe dahingestellt, ob oder wann die Doppelspirale bewirken müßte, daß die Geschwindigkeit an zwei Querschnittspunkten Maxima aufweise. Tatsächlich liegt, wenn die Sohle nicht mehrere Tiefpunkte besitzt, von den u_{max} der einzelnen lotrechten Punktreihen[6]) des Querschnittes, das größte u_{max} gewöhnlich am tiefsten und unter dem Stromstrich. Gegen die Ufer rücken die u_{max} also höher und in der Ufernähe wächst die Geschwindigkeit von der Sohle gegen den Spiegel, ohne ein Maximum im mathematischen Sinn zu bieten. Die Verbindungslinien der Punkte gleicher Geschwindigkeit schließen sich,



1) Zeitsch Math. Phys. 51 (1904), S. 417.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 7 (1878), S. 113.

3) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 12 (1883), S. 331. *Stearns* beobachtete, daß der Spiegel in einem Gerinne bis auf beide Uferstreifen Luftblasen trug.

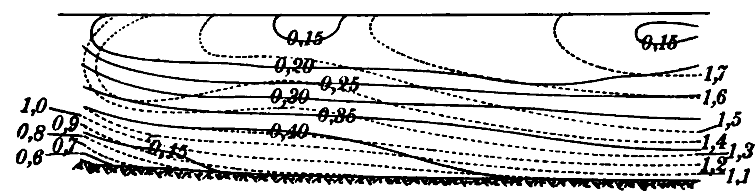
4) Z. f. Bauw. 33 (1883), Sp. 201. In Kurven bewegt sich das Wasser nach *Boussinesq* in einer einzigen Spirale, siehe unten § 140.

5) *C. Ellet jun.*, The Mississippi & Ohio rivers etc., Philadelphia 1853, S. 303.

6) Bemerkt sei, daß man bei praktischen Messungen die Meßvorrichtung lotrecht zu verstellen pflegt.

wenn auch roh, dem Umriß an. Zahlreiche Veröffentlichungen dieser sogenannten Isotachen[1]) liegen vor.

38. Die Pulsationen. Bisher war bei der Besprechung der Geschwindigkeitsänderung mit der Tiefe von bestimmten Geschwindigkeiten u für die einzelnen Stellen des Querschnittes die Rede, so als ob das Wasser sich in unveränderlichen, ähnlich gerichteten Fäden bewegen würde. Tatsächlich wirbeln aber, wie oben S. 26 erwähnt, die Massen fortgesetzt hin und her, wodurch sie den wesentlichsten Teil der Reibung erzeugen. Das Wirbeln hat eine unausgesetzte Änderung der Geschwindigkeit zur Folge, welche Änderung man als Pulsationen zu be-



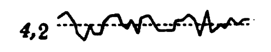
Isotachen und Linien gleicher Pulsation im Donaukanal.

zeichnen pflegt. Letzteres ist in derselben Lotrechten an der Oberfläche am geringsten, nahe an der Sohle am stärksten, wächst bei gleicher Tiefe vom Stromstrich gegen die Ufer hin und nimmt in einem und demselben Querschnitt mit zunehmender Geschwindigkeit[2]) ab. *H. Bazin*

1) Z. B. bei *A. R. Harlacher,* Beiträge zur Hydrographie Böhmens, 1. Lief., Prag 1872 (*Elbe*); ders., Die hydrometrischen Arbeiten in der Elbe bei Tetschen, Prag 1883; ders., Die Messungen in der Elbe u. Donau, Leipzig 1881; *H. Grebenau,* Internationale Rheinstrommessung, München 1873; *M. Honsell,* Der Bodensee u. die Tieferlegung seiner Hochwasserstände, Stuttgart 1879 (*Rhein*); *W. Plenkner,* Über die Bewegung des Wassers in natürlichen Wasserläufen, Leipzig 1879 (*Eger*); *J. v. Wagner,* Hydrologische Untersuchungen, Braunschweig 1881 (*Weser, Elbe*); *I. Nazzani,* Giorn. del genio civile (4) 2 (1882), S. 139, 229, 293 (*Tiber*); *J. Schmid,* Hydrologische Untersuchungen im Königreich Bayern, 1884 (*Inn*); *F. Frese,* Z. d. V. deutsch. Ing. 31 (1887), S. 599 (*Leine*); Beiträge zur Hydrographie Österreichs, 3. Heft 1897 (*Donau* u. *Donaukanal*); *H. Bazin,* Mém. prés. par div. sav. 19 (1865), S. 182 (*geschlossene* u. *offene rechteckige,* sowie *offene dreieckige, trapezförmige* und *verwandte Gerinne, Halbröhren*); *R. E. Horton,* Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 46 (1901), S. 83 (Straßensiele), *F. P. Stearns,* ebenda 12 (1883), S. 324 (*gemauerte Gerinne*); *C. Krischan,* Untersuchungen, 1. Teil, Graz 1912 (*Salza, Beczwa, Donaukanal, Donau*). *Baumgarten* veröffentlichte schon in den Ann. d. ponts et chauss. (2) 14 (1847[2]) die Isotachen derselben Stelle eines Garonne-Armes bei verschiedenen Wasserständen.

2) Beiträge zur Hydrographie Österreichs, 3. Heft (1897), S. 68; *A. R. Harlacher,* Die Messungen in der Elbe u. Donau, Leipzig 1881, S. 14; *F. Frese,* Z. d. V. deutsch. Ing. 31 (1887), S. 598; *E. C. Murphy,* Washington, U. S. Geological Survey, Water-Supply & Irrigation Paper 95 (1904), S. 26, zitiert *Cunningham, J. B. Francis, Unwin, D. F. Henry, Marr* und *L. C. Sabin.*

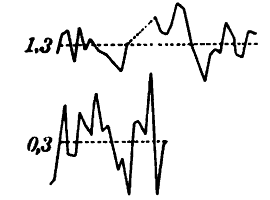
fand überdies, daß die Rauhigkeit die Pulsation steigert. Umstehende Figur beruht auf Messungen mit dem *Woltmann*-Flügel, bei dem sich die Pulsation durch die veränderliche Umlaufgeschwindigkeit der Flügelschraube sofort zu erkennen gibt. Bei Verwendung der *Darcy*schen Röhre, bei welcher der Stoß des fließenden Wassers durch die Höhe einer Wassersäule gemessen wird, verursachen die Pulsationen ein Schwanken der Säule. *Bazin*[1]) leitete aus seinen Versuchen ab, daß die Schwankung in offenen Gerinnen sich proportional mit



$$\left(\frac{u_{max} - U}{U} + 0{,}3\,\frac{u_{max} - u}{U}\right) u,$$

in geschlossenen Leitungen proportional mit

$$\left(\frac{u_{max} - U}{U} + \frac{u_{max} - u}{U}\right) u$$



In gleichen wagrechten Abständen ist der Zeitaufwand für je 50 Flügelumdrehungen senkrecht aufgetragen.
Pulsationen im Donaukanal.

von Punkt zu Punkt desselben Querschnittes ändern. Er nimmt dabei an, daß, wenn die Geschwindigkeit an einem Punkte zwischen u_{max} und u_{min} spielt, die Spiegelschwankung in der *Darcy*-Röhre dem Produkte $u(u_{max} - u_{min})$ proportional sei. Eine Theorie der Pulsationen versucht aber auch *Bazin* nicht, so daß sich unser heutiges Wissen so ziemlich auf die Kenntnis beschränkt, daß die Pulsation im allgemeinen mit dem Geschwindigkeitsunterschied benachbarter Punkte wächst, wie dies z. B. nebenstehende Figur erläutert, in der für denselben Querschnitt Linien (Isotachen) gleicher Geschwindigkeit u und solche gleicher Werte von $(u_{max}^2 - u_{min}^2) : u^2$ aufgetragen sind[2]).

39. Strömung unter Eis[3]). Die Wirbel der turbulenten Bewegung bewirken, daß Wasserläufe im Gegensatz zu stehenden Gewässern keine größeren Temperaturunterschiede als etwa 0,5° zwischen den oberen und den unteren Schichten aufweisen. Ist das gesamte Wasser auf ungefähr 0° abgekühlt, so beginnt die Eisbildung, welche sowohl an der Oberfläche wie in Seen und Teichen, wo festes Eis (Kerneis) entsteht, als an

1) Ann. d. ponts et chauss. (6) 14 (1887), S. 195.

2) Von *A. Schoklitsch* für eine Stelle des Donaukanals nach „Beiträge zur Hydrographie Österreichs" 3, Wien 1899, Beilage, Taf. 18.

3) *F. Arago,* Œuvres complètes 8, Paris-Leipzig 1858, S. 159f.; *G. Hagen,* Handb. d. Wasserbaukunst, 2 Teil, 3. Aufl. 1871, 1, S. 202; *G. Fänner,* Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 13 (1888), S. 301; *C. Holzer,* Österr. Monatsschr. f. d. öffentl. Baudienst 1 (1895), S. 370; *R. Jasmund* im Handbuch d. Ingenieurwissensch. 3, Wasserbau, 1. Bd. Gewässerkunde, 4. Aufl. 1907, S. 323f.

vorspringenden Steinen, Moos u. dgl. an der Sohle und den Wänden vor sich gehen kann (Grundeis). Das losgelöste Grundeis, welches aus einem wirren Haufen Kristallnadeln besteht, bildet unter Wasser eine schwammige Masse (an der Donau „Tost" genannt). An die Luft gebracht verliert es sein Wasser und friert graupenartig zusammen (daher in den Ostalpen der Ausdruck „Rogeis", sprachlich mit Roggen verwandt). Das an der Oberfläche als „Treibeis" schwimmende Grundeis, hineinfallender Schnee (Schneeis) und unmittelbar frierendes Wasser bilden zusammen die Eisdecke (Eisstoß, Eisstand), wobei der Wasserstand steigt (nach *R. Jasmund* 40 bis 100 cm und mehr) und am unteren Ende des Eisstandes ein starkes Gefälle, oberhalb des Eises ein Stau entsteht. Unter dem Eise findet die Strömung unter Druck statt. Im „Tost" erfolgt sie sehr langsam, aber auch bei klarem Wasser unter der Decke langsamer als mit freiem Spiegel, weil zu dem benetzten Umfang der Sohle jener am Eise hinzukommt. Nach *H. K. Barrows* und *R. E. Horton*[1]) ist die Reibung am Eise durchschnittlich 0,58 von jener an der Flußsohle, bei rauhem Eise aber viel größer, so daß sie sogar die Sohlenreibung etwas zu übertreffen vermag. Das zeigt die Geschwindigkeitskurve, welche unter der Eisdecke weniger oder mehr zurückgebogen sein kann, bis zur Umkehrung der gewöhnlichen Form. Da das Eis nicht nur den benetzten Umfang fast verdoppelt, sondern bei einiger Dicke auch den Querschnitt merklich verkleinert, ist bei gleichem Wasserstand der Durchfluß erheblich geringer als bei freiem Spiegel.

40. Die Geschwindigkeitsverteilung in Röhren und Halbröhren. Die Geschwindigkeitsverteilung in Röhren ist, wie schon erwähnt, später Gegenstand der Untersuchung geworden, als die in offenen Läufen. Hierbei mag auch die Schwierigkeit der Messung mitgewirkt haben. In der Tat ist auch die Geschwindigkeitsverteilung zuerst bei sehr engen Röhren, also bei Haarröhrchen, festgestellt worden, wo dies auf theoretischem Wege möglich war. Hier war es leicht nachzuweisen, daß man bei Auftragung der in den Punkten eines Querschnittes herrschenden Geschwindigkeiten ein Rotationsparaboloid erhält, wie dies Gl. (14e) ausdrückt.

Auch in weiten Röhren sind, wie selbstverständlich, die Geschwindigkeiten u in den Punkten eines beliebigen, vom Umfangsmittelpunkte aus beschriebenen Kreises gleich groß, welche Übereinstimmung übrigens *H. Bazin*[2]) selbst in halbkreisförmigen Gerinnen beobachtete. Aber

1) Washington, U. S. Geological Survey, Water-Supply and Irrigation Paper 187 (1907), S. 77.

2) Paris, Mém. prés par div. sav. 19 (1865), p. 230, 242.

das Paraboloid ist im weiten Rohre nicht mehr zweiten Grades, denn nach *Bazin* ist, wenn r den jeweiligen Mittelpunktsabstand, $\mathfrak{r}$ den Umfangshalbmesser bedeutet,

(58) $$u = U_{max} - 21\sqrt{\frac{\mathfrak{r}}{2}J}\cdot\frac{r^3}{\mathfrak{r}^3},$$

also die Geschwindigkeit im Mittelpunkt am größten, von wo aus sie nach einer kubischen Parabel bis zur Randgeschwindigkeit abnimmt.

Spätere Messungen *Bazins* in einem 0,8 m weiten glatten Zementrohr (dessen *Chézy*sche Zahl $c = 54{,}9$ war) zeigten Abweichungen von der kubischen Parabel, welche ihn bewogen, an deren Stelle die Viertelellipse[1])

(58a) $$u = U_{max} - 29{,}5\sqrt{\frac{\mathfrak{r}}{2}J}\left\{1 - \sqrt{1 - 0{,}95\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^2}\right\}$$

zu setzen. Aus (58a) berechnet sich der Geschwindigkeitunterschied $U_{max} - U = 9{,}03\sqrt{RJ}$ (worin der Profilradius $R = \frac{\mathfrak{r}}{2}$) und der Halbmesser r der Punkte, an denen $u =$ der mittleren Geschwindigkeit U ist, zu $0{,}74\,R$. Das Geschwindigkeitsverhältnis $U : U_{max}$ war $= 0{,}856$.

Mit der Formel (58a) stimmen auch leidlich die Messungen *J. R. Freemans*[2]) überein, die er in einem aus einem 3 cm weiten Messingrohr tretenden Strahl vornahm.

An den meisten Rohrstellen schließt sich den Erhebungen *Bazins* und *Freemans* fast noch besser als die Viertelellipse die von *T. Christen*[3]) bevorzugte Parabel achter Ordnung

(58b) $$u = \text{konst.}\sqrt[8]{\mathfrak{r} - r}$$

an, aber sie hat den Übelstand, daß sich die von gegenüberliegenden Wandstellen ausgehenden Parabeln achter Ordnung im Rohrmittelpunkte unter einem Winkel treffen.

Zahlreiche genaue Messungen nahmen *G. S. Williams, C. W. Hubbell* und *G. H. Fenkell*[4]) vor. Aus 76 Meßreihen, bei welchen sie in geraden Gußrohrstrecken von 1067, 762, 406 und 305 mm Weite und in einer Messingröhre von 51 mm Weite an den verschiedenen Punkten desselben Durchmessers die Geschwindigkeit erhoben, leiteten sie ab, daß die mittlere Geschwindigkeit $U = 0{,}84\,U_{max}$ sei, aber Abweichungen bis zu 3% vorkommen[5]). Die Umfangsgeschwindigkeit könne man zu $0{,}5\,U_{max}$

1) Paris, Mém. prés. par div. sav. 32 (1902), Nr. 6, S. 4, 15, 17.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 21 (1889), S. 413.

3) Z. f. Gewässerkunde 6 (1904), S. 175.

4) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 47 (1902), S. 1 u. f.

5) Ebenda S. 34, 64, 191, 342. *F. E. Lawrence* u. *P. L. Braunworth,* ebenda 57 (1906) fanden 0,846.

und die Verteilungskurve zwischen Mitte und Umfang als Viertelellipse betrachten. Im einzelnen zeigten übrigens die verschiedenen Erhebungen untereinander beträchtliche Unterschiede und fast immer bemerkliche Unregelmäßigkeiten[1]) an den Stellen $r = 0{,}6\,\mathfrak{r}$. Erwähnenswert ist auch, daß *H. F. Mills*, als er in einem Rohre von 305 mm Dmr. die Geschwindigkeit von 0,37 auf 4,09 m sec^{-1} steigerte, eine Zunahme des Verhältnisses $U : U_{max}$ von 0,829 auf 0,856 fand[2]). Dagegen habe sich in einem Rohre, in das Nietköpfe, Außenlaschen und Rostansätze (tubercles) hineinragten, das Verhältnis = 0,809 gezeigt. *A. V. Saph* und *E. W. Schoder*[3]) bestimmten in einem nur 51 mm weiten Messingrohr das Verhältnis im Mittel = 0,827; in einem Rohr von nicht weniger als 2,76 m Dmr. ermittelte *Mills* bei U durchschnittlich = 0,72 und 0,93 m sec^{-1} das Verhältnis $U : U_{max}$ zu 0,857. Nebenbei bemerkt bewirken Einschnürungen eine gleichmäßigere Verteilung der Geschwindigkeiten über den Querschnitt[4]), während der Wert 0,84 nach *Williams, Hubbell* und *Fenkell* noch bestehen bleibt, wenn nicht zu bedeutende Unregelmäßigkeiten, wie ein halbgeschlossener Schieber oder ein einseitiges Hindernis, eine unsymmetrische Geschwindigkeitsverteilung verursachen[5]). Beim Ausflusse aus einem konischen Mundstück wird das Verhältnis $U : U_{max}$ nach *Freeman*[6]) zu 0,97.

41. Boussinesqs Ansatz für die Reibung. Nachdem bereits *B. de Saint-Venant*[7]) erkannt hatte, daß die Bewegung des Wassers in weiten Röhren und Gerinnen nicht erklärbar sei, wenn man nicht annehme, daß das Wasser in ihnen Wirbel bilde und zwar um so stärker, je größer der durchflossene Querschnitt ist, und nachdem er weiter bemerkt hatte, daß die von den Wirbeln stammende Reibungsziffer — die Turbulenz ε der Gleichungen 14g — nicht in allen Querschnittsteilen gleich groß sein müsse, stellte *J. J. Boussinesq* für die Größe von ε Beziehungen auf, die zu der von *Bazin* behaupteten Geschwindigkeitsverteilung führten. Dabei beschränkte er sich auf die beiden Grenzfälle eines sehr breiten offenen Kastengerinnes und einer kreisförmigen Röhre, weil zwischen diese beiden Formen alle anderen in der Praxis vorkommenden Querschnitte eingeschlossen werden können.

Für sehr breite rechteckige Gerinne setzte er die Turbulenz ε pro-

1) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 47 (1902), S. 46.
2) Ebenda S. 204.
3) Ebenda S. 312.
4) *A. Adams* u. *W. E. Wilson*, ebenda S. 326.
5) Ebenda S. 182.
6) Ebenda S. 345, Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 21 (1889), S. 416.
7) Annales des mines (4) 20 (1851), S. 49.

portional dem Produkte aus der Gerinnetiefe, der Quadratwurzel aus einer Rauhigkeitsziffer B in $m^{-1}sec^2$ und der Randgeschwindigkeit u_s, nämlich

(59) $$\varepsilon = \frac{\gamma}{K}\sqrt{B}\,u_s h,$$

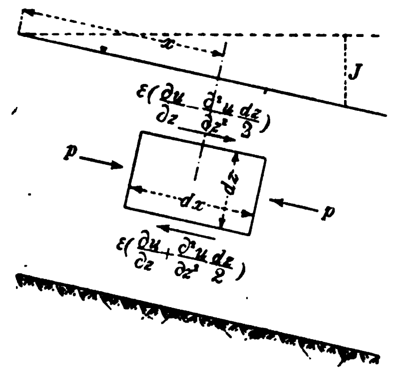
und zwar $m^{-2}\,t\,sec$, wenn γ das Eigengewicht des Wassers in $t\,m^{-3}$ und K eine von der Rauhigkeit der Wand unabhängige Konstante des Wassers in $m^{1/2}sec^{-1}$ bedeutet. Für kreisförmige Röhren vom Halbmesser $\mathfrak{r}$ ist seine entsprechende Formel

(59a) $$\varepsilon = \frac{\gamma}{K}\sqrt{B}\,u_s \frac{\mathfrak{r}}{2}\,\frac{\mathfrak{r}}{r},$$

wo der hinzugefügte Faktor $\frac{\mathfrak{r}}{r}$ das Anwachsen der Turbulenz nach der Mitte in Rechnung bringt. Außer diesen Annahmen bezüglich der Turbulenz im Innern der Flüssigkeit ist noch eine bezüglich der Reibung an den Wandungen nötig. *Boussinesq* faßt sie als Stoßwirkung auf, setzt sie demgemäß der lebendigen Kraft der äußersten Teilchen proportional und schreibt (in $t\,m^{-2}$)

(60) $$\text{Wandreibung} = \gamma B u_s^2.$$

Es werde nun ein parallelepipedisches Wasserteilchen betrachtet, dessen Seitenflächen lotrecht und parallel zur Stromrichtung und dessen Ober- und Unterfläche parallel zum Spiegel seien, welcher die geringe Neigung J habe. Beistehende Figur stelle den mittleren Schnitt durch das Teilchen dar, und die lotrechte Ausdehnung quer zur Bildfläche sei $= 1$. Der Mittelpunkt des Teilchens habe den Abstand z vom Spiegel und die längs des Spiegels gemessene Abszisse x. Auf das Teilchen wirken bei gleichförmiger, also an allen Querschnitten gleicher und unveränderlicher Bewegung parallel zur Strömung nachstehende Kräfte: eine Komponente des Gewichtes, welche $\gamma J\,dx\,dz$ beträgt, Drucke $\pm p\,dz$ auf die Stirnflächen, welche Drucke sich gegenseitig aufheben; endlich Reibungen an der Ober- und Unterfläche. In der Mitte des Teilchens würde die Turbulenz eine Reibung $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}$ auf der Flächeneinheit verursachen, an der Ober- und Unterfläche sind die Reibungen aber nicht mehr genau so groß, weil hier zwar ε gemäß (59) denselben Wert hat, nicht aber $\frac{\partial u}{\partial z}$. Die beiden Reibungen betragen vielmehr



$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \pm \frac{\partial\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z} \frac{dz}{2} = \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{dz}{2}\right).$$

Da die aufgezählten Kräfte keine Beschleunigung hervorrufen sollen, müssen sie im Gleichgewichte stehen, das heißt, es muß

$$0 = \gamma J \, dx \, dz + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dx \, dz$$

oder, wenn man aus (59) den Wert von ε einsetzt, es muß

$$0 = J + \frac{\sqrt{B}}{K} u_s h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{61}$$

sein. Die Integration von (61) liefert zunächst

$$0 = Jz + \frac{\sqrt{B}}{K} u_s h \frac{\partial u}{\partial z} + \text{konst.} \tag{61a}$$

Betreffs der Konstante ist zu bedenken, daß am Spiegel keine Reibung stattfindet, und da ε nicht Null wird im Ausdruck $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}$, hier $\frac{\partial u}{\partial z}$ Null werden muß. Die Konstante ist also zu streichen und einfach

$$0 = Jz + \frac{\sqrt{B}}{K} u_s h \frac{\partial u}{\partial z} \tag{61b}$$

oder für die Sohle

$$0 = Jh + \frac{\sqrt{B}}{K} u_s h \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h} \tag{61c}$$

zu schreiben. Hier muß zugleich die Flüssigkeitsreibung zur Wandreibung werden oder

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h} = \frac{\gamma}{K} \sqrt{B} u_s h \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h} = -\gamma B u_s^2 \tag{61d}$$

zutreffen, woraus in Verbindung mit (61c)

$$Jh = B u_s^2 \tag{61e}$$

hervorgeht, sowie statt (61b)

$$0 = B u_s^2 \frac{z}{h} + \frac{\sqrt{B}}{K} u_s h \frac{\partial u}{\partial z}$$

oder

$$0 = K \sqrt{B} \frac{z}{h^2} u_s + \frac{\partial u}{\partial z}$$

oder integriert

$$-\frac{K\sqrt{B}}{2} \frac{1}{h^2} u_s z^2 = u + \text{konst.}$$

oder bei Berücksichtigung, daß für die Sohle, wo $z = h$ ist, $u = u_s$ zu sein hat,

$$-\frac{K\sqrt{B}}{2} \frac{1}{h^2} u_s (z^2 - h^2) = u - u_s$$

oder

$$\frac{u}{u_s} = 1 + \frac{K\sqrt{B}}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right). \tag{62}$$

Ähnlich lassen sich für das Verhältnis $u_{max} : U$ usw., ferner für Röhren (wo die größte Geschwindigkeit U_{max} nur im Mittelpunkte herrscht und ε nicht mehr konstant ist) Ausdrücke ableiten, und zwar gilt[1])

	Für Kastengerinne	Für Röhren
(61d)	$Jh = Bu_s^2 = \frac{U^2}{c^2}$,	$J\frac{\mathfrak{r}}{2} = Bu_s^2 = \frac{U^2}{c^2}$,
(62)	$\frac{u}{u_s} = 1 + \frac{K\sqrt{B}}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)$,	$\frac{u}{u_s} = 1 + \frac{2}{3}K\sqrt{B}\left(1 - \frac{r^3}{\mathfrak{r}^3}\right)$,
(62a)	$c = \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{K}{3}$,	$c = \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{2K}{5}$,
(62c)	$c \cdot \frac{u_{max} - u}{U} = \frac{K}{2} \cdot \frac{z^2}{h^2}$,	$c \cdot \frac{U_{max} - u}{U} = \frac{2K}{3} \cdot \frac{r^3}{\mathfrak{r}^3}$,
(62d)	$\frac{u_{max}}{U} = 1 + \frac{K}{6}\frac{1}{c}$,	$\frac{U_{max}}{U} = 1 + \frac{4K}{15}\frac{1}{c}$.

Von diesen Gleichungen stimmt (62c) mit der von *Bazin* gefundenen parabolischen Geschwindigkeitsskala (56e), wie man erkennt, wenn man in (62c) U durch $c\sqrt{hJ}$ ersetzt, denn dann erhält man

$$\frac{u_{max} - u}{\sqrt{hJ}} = \frac{K}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^2. \tag{63}$$

Es ist bereits auf S. 99 bemerkt, daß *Bazin* in seinen Angaben des Koeffizienten von $\left(\frac{z}{h}\right)^2$ etwas schwankt und daß *Boussinesq* ihn $= 22{,}27$, nämlich K für Wasser $= 44{,}55\,\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{sec}^{-1}$ haben will[2]). Nach (62a) wird dann in jenen Wasserläufen, in denen $c = 50\,\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{sec}^{-1}$ ist[3]) (*Eytelwein* gibt, wie schon mitgeteilt, für Flüsse ungefähr einen solchen Wert von c an), $B = 1 : (c - \frac{1}{3}K)^2 = 0{,}00081\,\mathrm{m}^{-1}\mathrm{sec}^2$. *Boussinesq* prüfte auch, ob nach *Bazins* Versuchen die c der Gleichung $U = c\sqrt{RJ}$ für gleich rauhe rechteckige und halbkreisförmige Gerinne tatsächlich verschieden sind. Das ist der Fall, und es zeigte sich sogar der Unterschied nicht nur $= \frac{2K}{5} - \frac{K}{3} = \frac{K}{15} = 3\,\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{sec}^{-1}$, wie es nach Gleichung (62a) sein sollte, sondern $= 5\,\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{sec}^{-1}$.[4]) Dieser Unterschied wird in der Praxis zu wenig beachtet.

Auch den späteren Messungen von *H. Bazin* über die Geschwindigkeitsverteilung in Röhren (vgl. Gl. 58a) hat *Boussinesq*[5]) seine Theorie angepaßt und durch höhere Approximation hier $K = 48{,}6\,\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{sec}^{-1}$ und

---

1) *J. Boussinesq,* Théorie 1, S. 33, 34.
2) Théorie 1, S. 35.
3) Eaux courantes, S. 86.
4) Théorie 1, S. 35.
5) Théorie 1, S. 40.

$$c = \frac{1}{\sqrt{B}} + K\left(\frac{2}{5} + 0{,}0215\right),$$

$$(64) \qquad \frac{U_{max}}{U} = 1 + \frac{4K}{15} \cdot \frac{1}{c} = 1 + \frac{12{,}96}{c}$$

gefunden[1]). Hieraus folgt bei einer Rauhigkeit, die bei breiten Gerinnen durch $c = 50\,\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{sec}^{-1}$ gekennzeichnet wäre, für diese bzw. für Röhren und Halbröhren

$$(64a) \qquad \frac{U}{u_{max}} \text{ bzw. } \frac{U}{U_{max}} = 0{,}86 \text{ bzw. } = 0{,}81,$$

$$(64b) \qquad \frac{u_s}{u_{max}} \text{ bzw. } \frac{u_s}{U_{max}} = 0{,}58 \text{ bzw. } = 0{,}50.$$

Nach (64) wächst $\frac{U}{U_{max}}$ mit c. Bei *Bazins* Zementrohr war $c = 54{,}9$, bei den von *Williams*, *Hubell* und *Fenkell* untersuchten Rohren lag c im allgemeinen[2]) zwischen 60 und $70\,\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{sec}^{-1}$. Die entsprechenden Verhältnisse $U : U_{max}$ berechnen sich nach (64) zu 0,809 bzw. 0,823 bis 0,844. Damit stehen die oben angegebenen wirklichen Beobachtungen im Einklange.

Daß, wie Gl. (62d) ausspricht, auch in Strömen $U : U_{max}$ mit wachsender Rauhigkeit abnimmt, hat *J. Greve*[3]) nachgewiesen.

Gemäß (59) hat *Boussinesq* in sehr breiten Gerinnen die Turbulenz ε konstant gesetzt. *H. Hahn*, *G. Herglotz* und *K. Schwarzschild*[4]) haben nähere Untersuchungen über die Turbulenz in anderweitigen Querschnitten angestellt und auf Grund der *Bazin*schen Beobachtungen geschlossen, daß in rechteckigen ringsumschlossenen Gerinnen die Turbulenz über den größten Teil des Querschnittes konstant ist und nur nach den Ecken zu abnimmt. In Kreisröhren bleibt ε über etwa zwei Drittel des Halbmessers von der Mitte aus konstant, um erst an der Wand rasch abzusinken.

Die genannten Verfasser geben dort auch eine Methode an, um den von *Boussinesq* a priori angenommenen Ausdruck für die Turbulenz ε (siehe Gl. (59) und (59a)) mit Hilfe der Messungsergebnisse von *Bazin* aus den modifizierten *Navier*schen Gleichungen (14g) abzuleiten. Für einen in der x-Richtung, gleichförmig und stationär, in einem Bette von unveränderlichem Querschnitte fließenden Strom gilt, wenn ε in verschiedenen Punkten verschiedene Werte hat, nach Gl. (14g):

---

1) Théorie 1, S. 46.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 47 (1906), S. 142, 159, 181; siehe auch ebenda S. 345.

3) Neunter internat. Schiffahrtskongreß Düsseldorf 1902, 1. Abt., 15. Mitt., S. 31. Vgl. auch *H. Bazin*, Ann. d. ponts et chauss. (5) 10 (1875), S, 309f.

4) Zeitschr. Math. Phys. 51 (1904), S. 411f.

$$0 = \gamma \cdot J + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right);$$

dies vereinfacht sich für das unendlich breite Gerinne zu

$$0 = \gamma \cdot J + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Durch einmalige Integration findet man, wenn z vom Spiegel an gezählt wird,

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma J z,$$

woraus mit Verwendung der von *Bazin* gefundenen Geschwindigkeitsverteilung (Gl. (56e))

$$u = u_0 - 20 \frac{z^2}{h^2} \sqrt{Jh} = u_s + 20 \sqrt{Jh} - 20 \frac{z^2}{h^2} \sqrt{Jh}$$

zunächst $\frac{\partial u}{\partial z}$ und dann die Turbulenz

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{40} h \sqrt{Jh}$$

folgt. Dieser Ausdruck kann, weil die mittlere Geschwindigkeit

$$U = c \sqrt{Jh} = u_s + \frac{40}{3} \sqrt{Jh}$$

ist, auch

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{40} \frac{h u_s}{c - \frac{40}{8}}.$$

geschrieben werden, also die in Gl. (59) angegebene Form erhalten.

Einen ähnlichen Rechnungsvorgang wenden die Verfasser auch zur Ermittelung der Turbulenz in kreisförmigen Röhren und rechteckigen, ringsumschlossenen Kanälen an.

42. Verhalten in Wandnähe. Fast alle „Geschwindigkeitsskalen“ geben, wie oben zu ersehen, eine merkliche Geschwindigkeit des Wassers an den Wandungen an; und doch steht dies in Widerspruch mit der Wirklichkeit. Für Kapillaren zeigte *E. Duclaux*[1]), daß eine netzende Flüssigkeit an der Wand haftet, indem er in eine Thermometerröhre ungefärbten über gefärbten Alkohol füllte und dann von unten erwärmte, worauf letzterer ersteren in einem kegelartigen Strahl durchdrang. Bei der wirbelnden Bewegung in Flüssen und weiten Röhren scheint aber, wie die Isotachenpläne zeigen, die Geschwindigkeit sich gegen Wand und Sohle hin einer endlichen Grenze zu nähern. Hiernach könnte man glauben, daß bei Übergang der geschichteten in die wirbelnde Bewegung sich das Wasser von der Wand losreißt. *H. S. Hele-Shaws* Versuche[2]) haben es aber außerordentlich wahrscheinlich gemacht, daß

1) Annales de chimie et de physique (4) 25 (1872), S. 472.

2) Inst. Naval Archit. Trans. (39) 1897, S. 145; 40 (1898), S. 21; Paris C. R. 182 (1901), S. 1806.

stets an der Wand das Wasser haftet und sich geschichtet bewegt, wenn auch das übrige wirbelt. Er machte dies ersichtlich, indem er zwischen zwei Glasplatten eingeschlossen um Hindernisse oder zwischen Führungen Wasser strömen ließ, dem er Luft oder gefärbtes Wasser zutreten ließ. Stets bildete sich an dem festen Körper ein luft- oder farbfreier Saum, dessen Breite sich längs der Oberfläche in entgegengesetztem Sinn wie die dortige Geschwindigkeit änderte.

Ph. Forchheimer[1]) hat die Dicke der gleitenden Schicht auf Grund der Voraussetzung berechnet, daß an der Grenze der beiden Bewegungsarten jene Geschwindigkeit u_w herrscht, die bei Betrachtung der Bewegung in Flüssen und Röhren als Sohlen- oder Wandgeschwindigkeit angesehen wird. Für sie gilt dann (vgl. (61 d))

$$\text{Reibung auf der Flächeneinheit} = \gamma B u_w^2.$$

Andererseits ist gemäß (11), wenn die Gleitschicht die Dicke a besitzt, weil längs dieser Dicke die Geschwindigkeit von 0 in u_w übergeht, die

$$\text{Reibung auf der Flächeneinheit} = \eta \frac{u_w}{a},$$

demnach

$$\frac{\eta u_w}{a} = \gamma B u_w^2 = \gamma \frac{U^2}{c^2}$$

oder

$$a = \frac{\eta}{\gamma B u_w} = \frac{\eta c^2 u_w}{\gamma U^2}. \tag{65}$$

In dem von *Bazin* untersuchten 80 cm weiten Zementrohre war beispielsweise $c^2 = 3012$ m sec^{-2}, $u_w = 0{,}742\,U$; wonach sich mit η für 10^0 C $= 0{,}00001335$ g sec cm^{-2} und $\gamma = 1$ g cm^{-3} die Wandschichtdicke $a = \frac{2{,}98}{U}$ ergibt, wobei a und U in cm bzw. cm sec^{-1} auszudrücken sind. Die oben S. 55 erwähnte Geschwindigkeitszunahme in Erdölleitungen, falls man das Erdöl mit Wasser umgibt, ist ein Beleg für die Anschauung, die zu Gl. (65) führte.

VI. Stationäre Strömung.

43. Stationäre Strömung als Übergang zu gleichförmiger Bewegung in Leitungen. Bei der stationären Bewegung ist der Geschwindigkeitszustand zwar unabhängig von der Zeit, ändert sich aber von Ort zu Ort. Auf eine solche Bewegungsart ist man zuerst fast nur bei offenen Wasserläufen eingegangen, bei welchen die Frage, welchen Spiegel sie unter gegebenen Bedingungen annehmen, insbesondere in

1) Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, 4. Bd. Mechanik, 3. Teilband, S. 448 (1905).

der Form der Frage nach dem Stau- oder Senkungsspiegel in zahlreichen Fällen der Technik wiederkehrt, und dadurch seit *J. B. Belanger* zu einem Ausgangspunkte der hydraulischen Forschung geworden ist. Auch die verwandte Frage nach dem Eintritt und Aufhören der gleichförmigen Bewegung wurde zunächst nur bei offenen Läufen behandelt, bis *J. Boussinesq*[1]) sie auch auf geschlossene Leitungen ausdehnte, nachdem *H. Bazin*[2]) an einem 80 cm langen Zementrohr einschlägige Versuche angestellt hatte. Von diesen Entwickelungen *Boussinesqs* werde nur kurz mitgeteilt, daß nach ihm von der Stelle an, in welcher die am Eintritt in eine Röhre eingeschnürte Strömung bereits wieder den ganzen Querschnitt ausfüllt, noch eine Strecke von 30 Durchmessern und in kastenförmigen geschlossenen breiten Gerinnen von der Höhe $2h$ noch eine Strecke von $72h$ zur Herstellung einer merklichen Gleichförmigkeit der Bewegung erforderlich ist. *A. Adams* und *W. E. Wilson*[3]) beobachteten später, daß unterhalb einer Rohreinschnürung die Geschwindigkeiten in einer Entfernung von ungefähr 35 Durchmessern wieder wie in einer langen geraden Strecke verteilt sind.

Daß aber auch beim Austritt aus einem Rohr eine Änderung in der Geschwindigkeitsverteilung erfolgt, zeigt ein Vergleich[4]) der *Bazin*schen Messungen mit denen, die *J. R. Freeman* in den Mittelpunktsabständen r in einem Strahl vornahm, der aus einem $2\mathrm{r}$ weiten Mundstück eines Feuerwehrstrahlrohres austrat. Vgl. die folgende Tabelle, in die für verschiedene $\frac{r}{\mathrm{r}}$ die gemessenen Werte für $\frac{U_{\max}-u}{U}$ nach der Formel (58a) (*Bazin*) und *J. R. Freeman* eingetragen sind

$\frac{r}{\mathrm{r}}$	$=0{,}174$	$0{,}522$	$0{,}783$	$0{,}904$	$0{,}974$	$0{,}991$
$\frac{U_{\max}-u}{U}$ (*Bazin*)	$=0{,}009$	$0{,}087$	$0{,}221$	$0{,}329$	$0{,}429$	$0{,}463$
„ (*Freeman*)	$=0{,}024$	$0{,}109$	$0{,}221$	$0{,}307$	$0{,}429$	$0{,}477$

44. Die stationäre Strömung als gleichförmige behandelt. Die einfachste Behandlung der stationären Strömung besteht darin, daß man *erstens* die lebendige Kraft des Wassers vernachlässigt, also die Arbeit nicht berücksichtigt, welche sie erfordert oder leistet, je nachdem das Wasser stromab beschleunigt oder verzögert wird, und daß man, *zweitens*, die Reibungen selbst genau so, wie bei der gleichförmigen Strö-

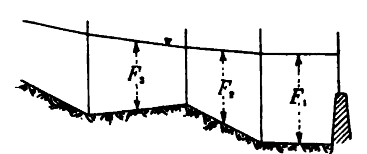
1) *J. Boussinesq*, Théorie 2, S. 64, 70.

2) Mém. prés. par. div. sav. 32 (1902), Nr. 6, S. 14.

3) Americ. Soc. Civ. Eng. Trans. 47 (1902), S. 335.

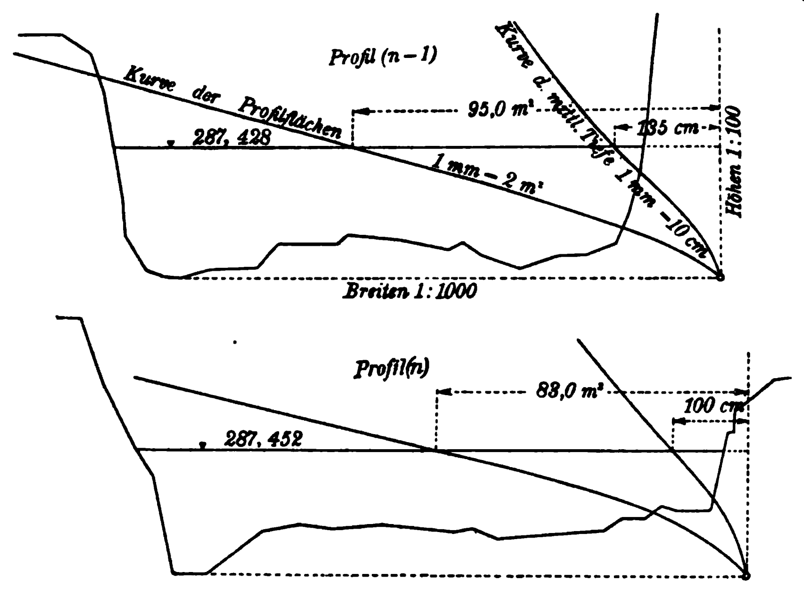
4) Mém. prés. par. div. sav. 32 (1902) Nr. 6, S. 24 und Amer. Soc. Civ. Eng. Trans. 21 (1889), S. 411.

mung berechnet. Man kann so in der Tat, wenn die Geschwindigkeiten, also auch die lebendigen Kräfte nicht groß sind und der Spiegel keine scharfen Krümmungen erleidet, diesen genügend genau ermitteln, wenn allenthalben der Umriß des mehr oder weniger hoch ausfüllbaren Bettes und an einer Stelle der Wasserstand gegeben ist, indem man sich den Wasserlauf in einzelne kleine Strecken zerlegt. Handelt es sich z. B. um die „Staukurve", welche ein Wasserlauf oberhalb eines Wehres bildet, so läßt sich zumeist für jede Durchflußgröße $Q = U_1 F_1$ die Spiegelhöhe oberhalb des Wehres angeben, und dann kann man nach einer Formel für gleichförmige Bewegung — z. B. der *Chézys* — zunächst das Gefälle J_1 der untersten Strecke ermitteln. Da der Durchfluß Q für alle Strecken derselbe ist und man nunmehr *annähernd* den durchflossenen Querschnitt F_2 der auf die unterste Strecke stromauf folgenden kennt und hiermit auch die in letzterer herrschende Geschwindigkeit $U_2 = Q : F_2$, so vermag man deren Spiegelgefälle J_2 zu bestimmen, kennt nunmehr angenähert F_3, sucht U_3 und J_3 und fährt so fort. Wenn ein Gefälle J_{n-1} bereits gefunden ist, kann man zur Bestimmung von F_n zunächst den Spiegel der Strecke $n - 1$ verlängern; sollte dann der Spiegel J_n in der Streckenmitte wesentlich vom verlängerten Spiegel J_{n-1} abweichen, so wäre eine verbesserte Annahme von F_n und eine abermalige nunmehr zutreffendere Berechnung von J_n nötig. Man erhält durch das geschilderte Verfahren eine gebrochene Linie, die von der Wehrstelle stromauf geht und bei ziemlich gleichförmigem Bett ihre Hohlseite oben hat. Zur Ermittelung von Senkungskurven, welche entstehen, wenn der Spiegel an einer Stelle eine künstliche Senkung erfährt, und welche bei ziemlich gleichförmigem Bett ihre Hohlseite unten haben, ist in gleicher Weise vorzugehen.



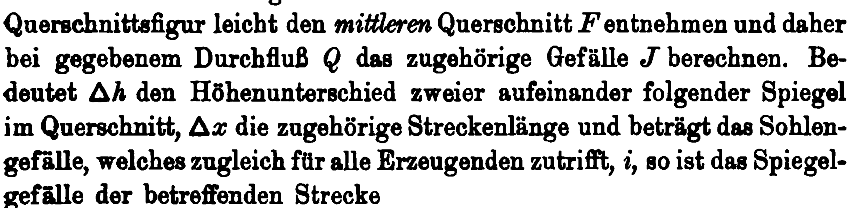
Beispiel: Sind in einem Flußlaufe für verschiedene Wasserstände (Durchflüsse) die Staukurven zu ermitteln, wie es beispielsweise bei Entwürfen von Wasserkraftanlagen der Fall ist, so wird sich zwecks Übersichtlichkeit und rascher Durchführung empfehlen, vorerst für jedes der gepeilten Querprofile die Kurve der Querschnittsflächen F und die der mittleren Tiefen h aufzutragen. Dies erfordert nur geringen Zeitaufwand, da gewöhnlich zwei bis drei charakteristische Punkte zur Festlegung einer solchen Kurve genügen. Für jeden Spiegel gibt dann sein zwischen der betreffenden Kurve und der gewählten lotrechten Achse befindlicher Abschnitt das zugehörige F bzw. h an. — Nachstehend seien zur Darstellung des Verfahrens aus der Reihe der Querprofile zwei in 100 m Abstand aufeinander folgende mit den Kurven der Flächen und mittleren Tiefen wiedergegeben. Im Profile $(n - 1)$ beträgt für einen Durchfluß von 58,2 m³ sec⁻¹ das Gefälle J des Stauspiegels 0,00017 und liegt der Spiegel auf der Höhe von 287,428 m üb. M. Die verlängerte Staulinie würde im Profil n die

Spiegelkote 287,445 geben. Man wählt versuchsweise die mittlere Profiltiefe h mit 1,00 m, oder die Spiegelkote mit 287,452 m und die zugehörige Profilfläche mit 88,0 m². Mit $c = 37$, welcher Wert aus Durchflußerhebungen im Staubereiche sich ergibt oder beim Fehlen derselben geschätzt werden muß, folgt $Q = Fc\sqrt{hJ} = 89 \cdot 37\sqrt{1{,}175 \cdot 0{,}000\,24} = 54{,}8$. Der Spiegel war also zu hoch



angenommen; 287,451 zeigt sich zutreffend. In ähnlicher Weise wird die Berechnung der Spiegelhöhen flußaufwärts weitergeführt. Noch sei bemerkt, daß bei Einbau eines festen Wehres in einem geschiebeführenden Fluß immer eine Sohlenhebung eintritt und daß dies eine Vergrößerung der Stauweite verursacht. Ist eine derartige Veränderung zu gewärtigen, so muß die Staurechnung auf Grund einer Annahme über die zu erwartende Verschotterung durchgeführt werden.

In einem *zylindrischen* Bett bilden die Querschnitte der verschiedenen Strecken Teile *derselben* Figur. Zieht man (zwischen entsprechenden Grenzen) wagrechte Linien durch den Bettquerschnitt, so stellen aufeinander folgende Quergerade Spiegel aufeinander folgender Laufstellen dar. Für jede Strecke zwischen zwei solchen Stellen kann man also aus der gemeinschaftlichen



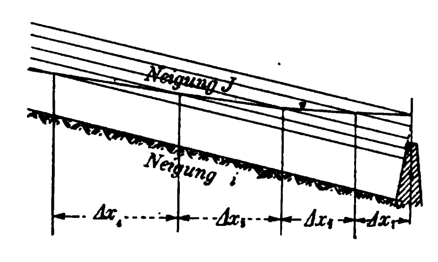
Querschnittsfigur leicht den *mittleren* Querschnitt F entnehmen und daher bei gegebenem Durchfluß Q das zugehörige Gefälle J berechnen. Bedeutet Δh den Höhenunterschied zweier aufeinander folgender Spiegel im Querschnitt, Δx die zugehörige Streckenlänge und beträgt das Sohlengefälle, welches zugleich für alle Erzeugenden zutrifft, i, so ist das Spiegelgefälle der betreffenden Strecke

$$J = i - \frac{\Delta h}{\Delta x}, \tag{66}$$

woraus

(66 a) $$\Delta x = \frac{\Delta h}{i - J}$$

folgt. Man erhält also leicht im Längenschnitt durch Eintragung der die Querschnitte teilenden Schichtenlinien und der Streckenlängen Δx eine den Stauspiegel darstellende gebrochene Linie, deren Gesamtlänge allerdings wächst, wenn man die Teilungslinien näher aneinander rückt; bei unendlich nahen Teilungen würde der Stauspiegel bis ins Unendliche reichen und erst dort mit der Sohle parallel laufen.



Bei *zylindrischem Bett* kann man für einen gegebenen Bettumriß zu einer *Staukurve* ohne Bruchpunkte gelangen, indem man die Einzelstrecken unendlich klein wählt und rein analytisch vorgeht. Die einfachste Querschnittsform ist die eines *Rechteckes von so großer Breite*, daß man die Einwirkung der Seitenflächen vernachlässigen kann. Für ein solches Bett gilt, wenn wieder i das Sohlengefälle, x die stromab zu messende Länge, ferner h_0 die Tiefe im Unendlichen — gleichbedeutend mit der Tiefe im Endlichen vor Errichtung des Stauwerkes — $h_0 + y$ die Tiefe an der Stelle x bedeutet, ähnlich (66) die Gleichung

(66 b) $$J = i - \frac{d(h_0 + y)}{dx} = i - \frac{dy}{dx}.$$

Nach der *Chézy*schen Formel ist dann die Geschwindigkeit

$$U = c\left(i - \frac{dy}{dx}\right)^{1/2} \cdot (h_0 + y)^{1/2}$$

und der Durchfluß für die Breiteneinheit

$$q = U(h_0 + y) = c\left(i - \frac{dy}{dx}\right)^{1/2} (h_0 + y)^{3/2}.$$

Da im Unendlichen q dieselbe Größe hat, gilt

$$c\left(i - \frac{dy}{dx}\right)^{1/2} (h_0 + y)^{3/2} = c\, i^{1/2} h_0^{3/2}$$

oder

$$\left(i - \frac{dy}{dx}\right) (h_0 + y)^3 = i h_0^3$$

oder

$$i\,dx = \frac{(h_0 + y)^3}{(h_0 + y)^3 - h_0^3}\, dy = \left(1 + \frac{1}{3\frac{y}{h_0} + 3\frac{y^2}{h_0^2} + \frac{y^3}{h_0^3}}\right) dy$$

$$= \left(\frac{1}{3}\frac{h_0}{y} + \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\frac{y}{h_0} - \frac{1}{9}\frac{y^2}{h_0^2} + \frac{1}{27}\frac{y^3}{h_0^3} - \cdots\right) dy.$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{ix}{h_0} = \frac{1}{3}\log\text{nat}\frac{y}{h_0} + \frac{2}{3}\frac{y}{h_0} + \frac{1}{9}\frac{y^2}{h_0^2} - \frac{1}{27}\frac{y^3}{h_0^3} + \frac{1}{108}\frac{y^4}{h_0^4} - \cdots + \text{konst.}, \tag{66 c}$$

für den Fall, daß eine Senkung der Oberfläche statthat (wie dies z. B. zufolge Ausbaggerungen geschehen kann), hingegen

$$\frac{ix}{h_0} = \frac{1}{3}\log\text{nat}\frac{y}{h_0} - \frac{2}{3}\frac{y}{h_0} + \frac{1}{9}\frac{y^2}{h_0^2} + \frac{1}{27}\frac{y^3}{h_0^3} + \frac{1}{108}\frac{y^4}{h_0^4} - \cdots + \text{konst.}, \tag{66 d}$$

wenn die y nunmehr die Senkungen bedeuten. Die Erhebung im ersten und die Senkung im zweiten Falle verschwindet erst im Unendlichen; es ist daher nicht möglich, den Anfangspunkt der x dorthin zu legen, wo $y = 0$ ist. *Gödecker,* welcher die Reihensumme von (66 c) und (66 d) ausgerechnet hat, setzt daher $x = 0$ für $y = 0{,}0098\,h_0$ und gibt auf Grund dieser Festlegung Tabellen (die *Rühlmann* veröffentlichte), aus denen die Werte von $\frac{ix}{h_0}$ für die zugehörigen $\frac{y}{h_0}$ zu entnehmen sind.[1])

Zwei Beispiele sollen die Anwendung der im Anhang beigefügten Tafeln erläutern. Ein Fluß führe 40 $m^3\,sec^{-1}$; seine mittlere Tiefe h_0 an ungestauter Stelle sei 1,05 m und sein Sohlengefälle 0,000115 m. Durch ein Wehr werde ein Stau von 1,5 m Höhe erzeugt und dabei zu wissen verlangt, in welcher Entfernung stromaufwärts der Stau noch 0,6 m beträgt? Lösung: Am Wehr ist $y : h_0 = \frac{1{,}50}{1{,}05} = 1{,}428$. Der Abszissenanfang liegt zufolge der Tafel $2{,}7575\,h_0 : i = 25177{,}1$ m stromauf vom Wehr; der Punkt, für den $y : h_0 = 0{,}6 : 1{,}05 = 0{,}571$ ist, liegt zufolge der Tabelle $1{,}7589\,h_0 : i = 16059{,}5$ m stromab vom Abszissenanfang, die gesuchte Entfernung beträgt daher 9118 m.

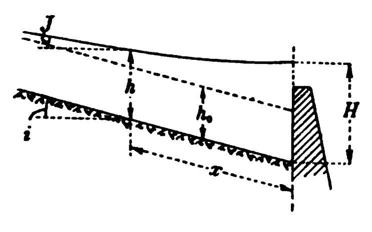
Es werde nun im selben Flusse bei gleicher Wasserführung durch eine Ausbaggerung oder Profilserweiterung eine Absenkung von 0,50 m erzeugt. Die Beantwortung der Frage, in welcher Entfernung stromaufwärts von der Absenkungsstelle sich die Spiegelsenkung auf 0,30 m verringert, erfolgt mit Verwendung der anderen Tabelle. Für $\frac{y}{h_0} = \frac{0{,}50}{1{,}05} = 0{,}476$ wird $\frac{ix}{h_0} = 1{,}0000$ und für $\frac{y}{h_0} = \frac{0{,}30}{1{,}05} = 0{,}285$, $\frac{ix}{h_0} = 0{,}9365$, somit beträgt die gesuchte Entfernung, da der Unterschied der $ix : h_0 = 1{,}0000 - 0{,}6365 = 0{,}0635$ ist, $0{,}0635 \cdot 1{,}05 : 0{,}000115 = 580$ m.

In ähnlicher Weise, aber mit Verwendung der *Hermanek*schen Geschwindigkeitsformel (49) $U = cJ^{1/2}h^{3/4}$ hat *F. Schaffernak*[2]) für Flüsse

1) *M. Rühlmann,* Hydromechanik, 2. Aufl., Hannover, S. 483. *Rühlmanns* Zahlen sind in Tabelle V und VI des Anhanges wiedergegeben; doch mußten fünf Werte der letzten Spalte von V und einer der letzten Spalte von VI verbessert werden. Für $y > h_0$ ist es vorteilhaft, durch Division eine nach Potenzen von $h_0^3 : (h_0 + y)^3$ geordnete Reihe zu entwickeln. Das tat *J. Dupuit.* Dieser gab bereits kürzere Tafeln in Études sur le mouvement, Paris 1863, S. 87 u. 297.

2) Bisher unveröffentlicht.

mit annähernd rechteckigem Bettumriß die Form der *Staulinie* entwickelt. Bezeichnet man wie früher die Füllhöhen im Endlichen mit h, jene im Unendlichen mit h_0 und mißt man die Entfernungen x vom Wehr stromauf, so ergibt sich



$$J = i + \frac{dh}{dx},$$

$$c\left(i + \frac{dh}{dx}\right)^{1/2} h^{7/4} = c i^{1/2} h_0^{7/4},$$

und somit

$$idx = -\frac{h^{3,5}}{h^{3,5} - h_0^{3,5}}\, dh. \tag{66 e}$$

Die Integration liefert

$$\frac{ix}{h_0} = -\frac{h}{h_0} + \frac{1}{2,5}\left(\frac{h_0}{h}\right)^{2,5} + \frac{1}{6}\left(\frac{h_0}{h}\right)^{6} + \frac{1}{9,5}\left(\frac{h_0}{h}\right)^{9,5} + \cdots + C, \tag{66 f}$$

worin, wenn am Wehr $h = H$ ist,

$$C = \frac{H}{h_0} - \left[\frac{1}{2,5}\left(\frac{h_0}{H}\right)^{2,5} + \frac{1}{6}\left(\frac{h_0}{H}\right)^{6} + \cdots\right]$$

wird. Für die praktische Verwendung sind im Anhange zur Vermeidung zeitraubender Interpolationsrechnungen die

$$\Phi\left(\frac{h}{h_0}\right) = \frac{h}{h_0} - \left[\frac{1}{2,5}\left(\frac{h_0}{h}\right)^{2,5} + \frac{1}{6}\left(\frac{h_0}{h}\right)^{6} + \cdots\right] \tag{66 g}$$

und die zugehörigen Verhältniszahlen $h : h_0$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgetragen. Die Länge der Strecke, in der die Tiefe von H auf h abnimmt, ist dann

$$l_{Hh} = \frac{h_0}{i}\left[\Phi\left(\frac{H}{h_0}\right) - \Phi\left(\frac{h}{h_0}\right)\right]. \tag{66 h}$$

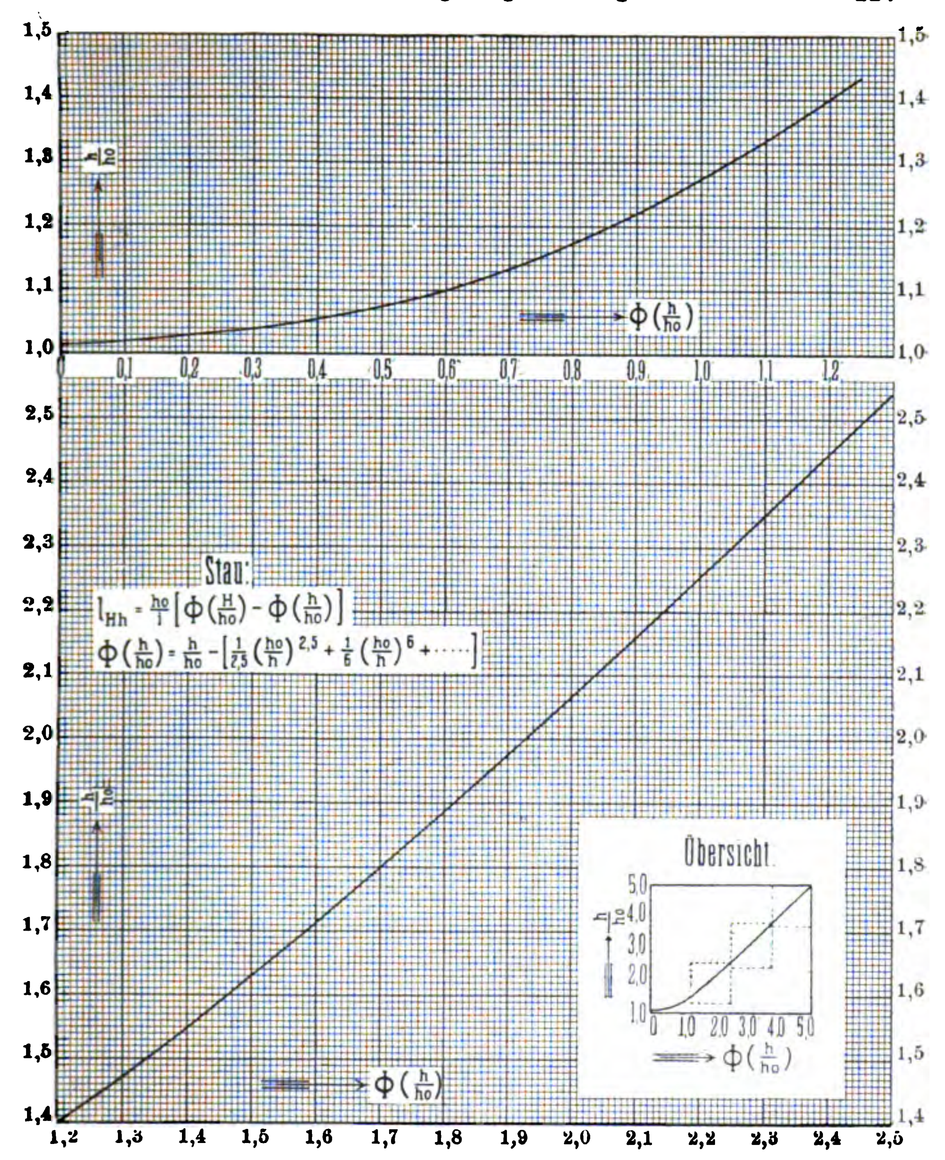
Beispiel zur Einführung in den Gebrauch der beistehenden Tafeln. In einem Flusse betrage bei einer Wasserführung von $40\,\text{m}^3\,\text{sec}^{-1}$ die Füllhöhe h_0 im ungestauten Profil 1,20 m und das ausgeglichene Sohlengefälle 0,00015. Ein Wehr erzeuge 0,50 m Stau. Es ist jene Entfernung zu ermitteln, in welcher der Stau noch 0,05 m erreicht. Nach Gleichung (66 h) beträgt sie

$$l_{1,70} = \frac{1,20}{0,00015}\left[\Phi\left(\frac{1,70}{1,20}\right) - \Phi\left(\frac{1,25}{1,20}\right)\right].$$

Aus der Tafel S. 127 entnimmt man, da $1,70 : 1,20 = 1,417$ und $1,25 : 1,20 = 1,042$ ist, für $\Phi\left(\frac{1,70}{1,20}\right)$ und $\Phi\left(\frac{1,25}{1,20}\right)$ die Werte 1,225 und 0,320, wonach $l_{1,7;\,1,25} = 7240$ m folgt.

Wie die Tafeln *Schaffernaks* zeigen, wird die Funktion $\Phi\left(\frac{h}{h_0}\right)$ zu Null für $h : h_0 = 1,015$, also für eine Stelle, wo der Stau fast unmerklich wird. Hier gilt also nahezu

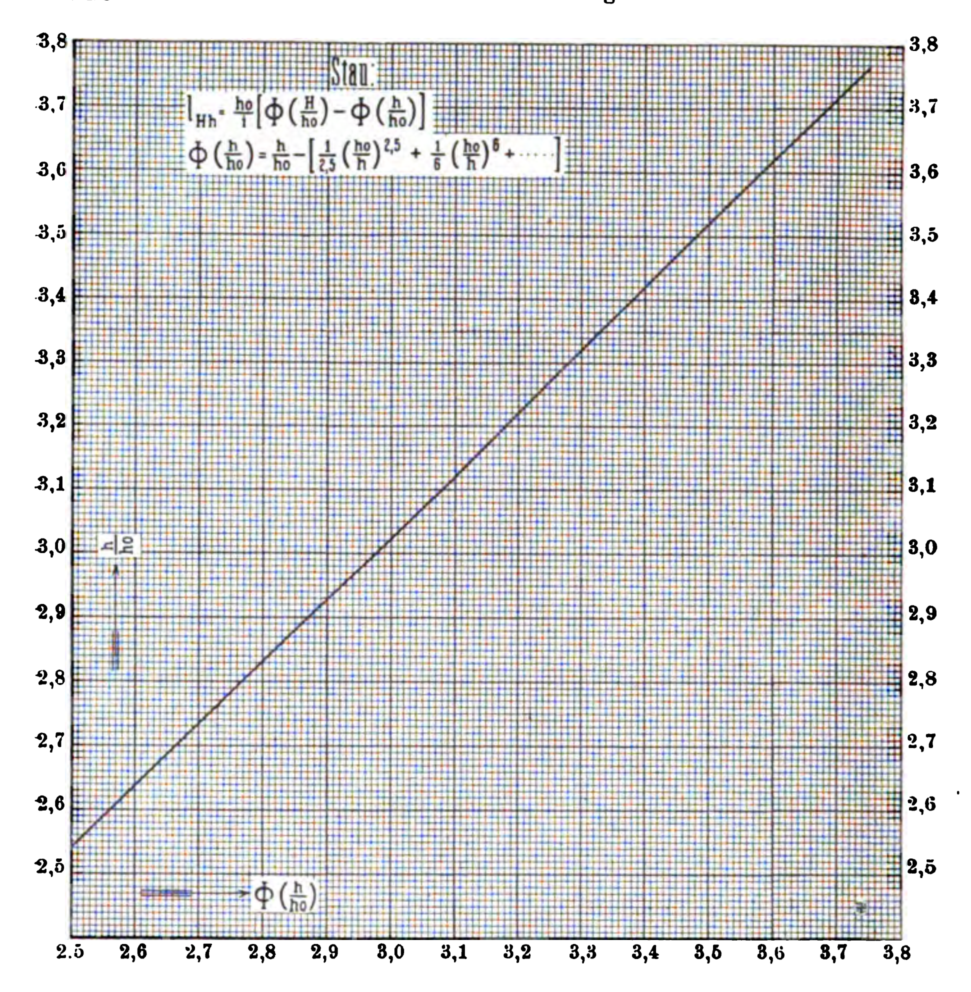
$$l_{Hh} = \frac{h_0}{i}\,\Phi\left(\frac{H}{h_0}\right).$$



Wenn ferner $h \geqq 2h_0$ ist, gleicht, wie die Tafeln ebenfalls zeigen, $\Phi\left(\frac{H}{h_0}\right)$ ungefähr dem Bruch $\frac{H}{h_0}$. Man kann daher sagen, daß für *große* Stauhöhen der Stau in einer Entfernung

$$l_{Hh} = \frac{h_0}{i} \cdot \frac{H}{h_0} = \frac{H}{i} \tag{66 i}$$

vom Wehr verschwindet, das ist an der Stelle, wo eine vom Spiegel über dem Wehr gezogene Wagerechte die Flußsohle trifft. Dies gilt,



wie *G. Tolkmitt*[1]) gezeigt hat, auch für parabolische Querschnitte, also allgemein.

Für die Absenkung erhält *Schaffernak*[2]) ganz ähnlich, wenn an der Stelle $x = 0$ die Tiefe s herrscht,

$$\text{(66 j)} \qquad \frac{ix}{h_0} = \frac{1}{4,5}\left(\frac{h}{h_0}\right)^{4,5} + \frac{1}{8}\left(\frac{h}{h_0}\right)^{8} + \cdots - \frac{1}{4,5}\left(\frac{s}{h_0}\right)^{4,5} - \frac{1}{8}\left(\frac{s}{h_0}\right)^{8} - \cdots,$$

und bei Einführung einer ebenfalls aus einer hier beigegebenen Tafel zu entnehmenden Funktion

$$\Psi\left(\frac{h}{h_0}\right) = \frac{1}{4,5}\left(\frac{h}{h_0}\right)^{4,5} + \frac{1}{8}\left(\frac{h}{h_0}\right)^{8} + \cdots$$

---

1) Grundlagen d. Wasserbauk. 2. Aufl., S. 127.

2) Bisher unveröffentlicht.

Stau:

$$l_{Hh} = \frac{ho}{i}\left[\Phi\left(\frac{H}{ho}\right) - \Phi\left(\frac{H}{ho}\right)\right]$$

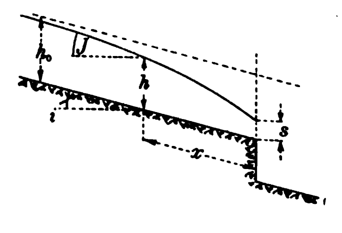
$$\Phi\left(\frac{h}{ho}\right) = \frac{h}{ho} - \left[\frac{1}{2,5}\left(\frac{ho}{h}\right)^{2,5} + \frac{1}{6}\left(\frac{ho}{h}\right)^{6} + \cdots\right]$$

$\frac{h}{ho}$ ↑ $\Phi\left(\frac{h}{ho}\right)$ →

3,7 3,8 3,9 4,0 4,1 4,2 4,3 4,4 4,5 4,6 4,7 4,8 4,9 5,0

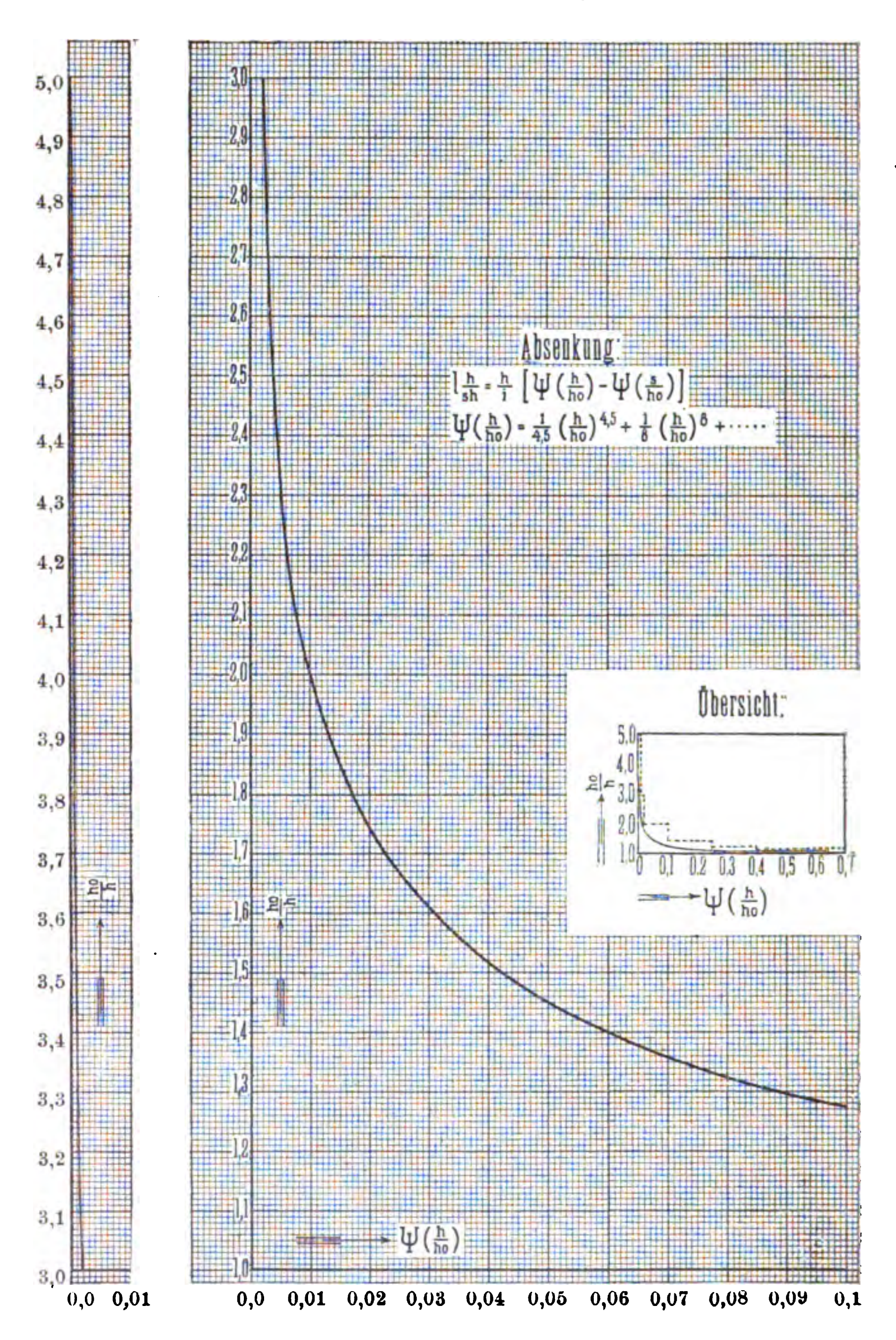
die Länge der Strecke, in der die Tiefe von s auf h wächst,

(66 k) $$l_{sh} = \Psi\left(\frac{h}{h_0}\right) - \Psi\left(\frac{s}{h_0}\right).$$

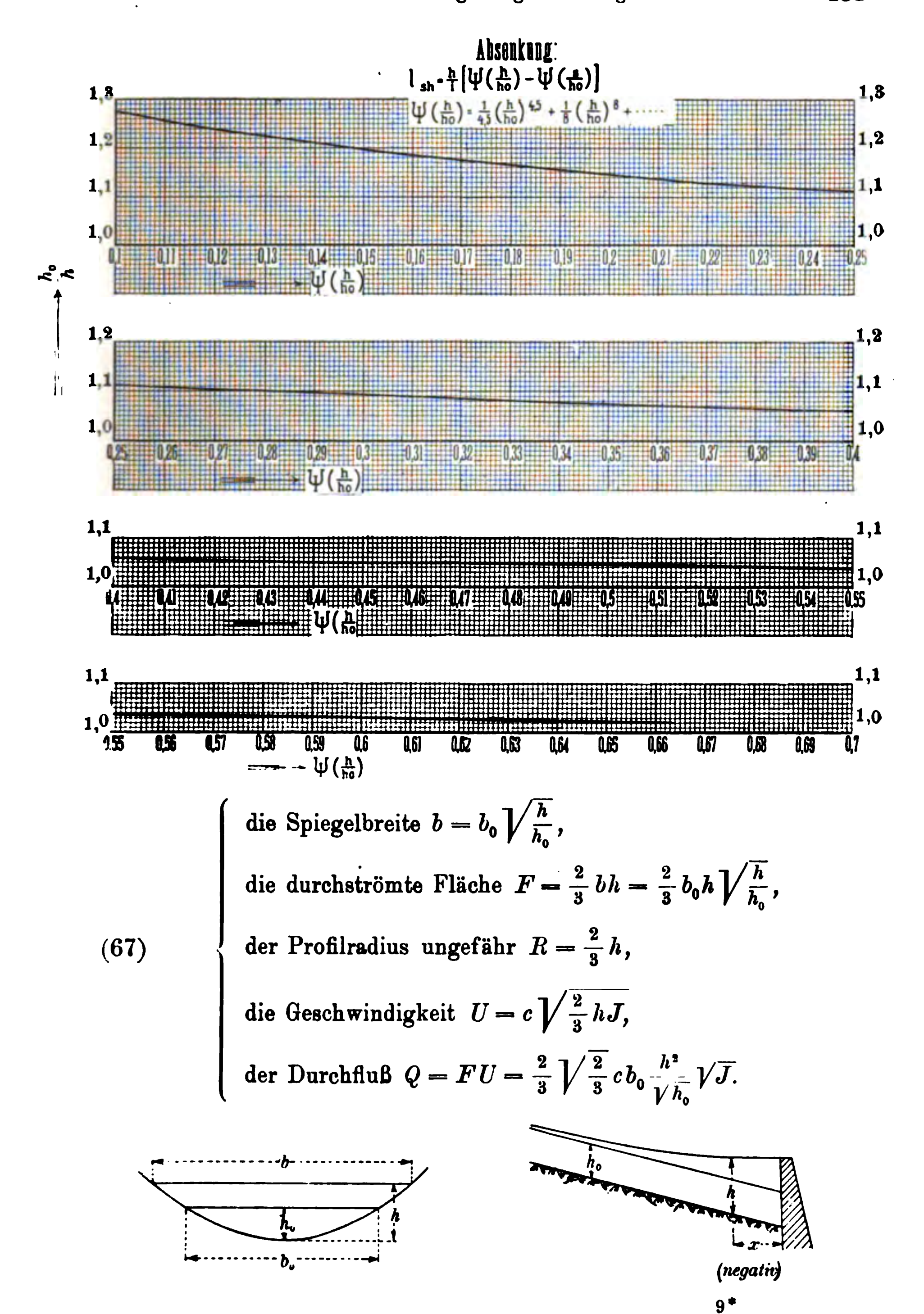


Mit dem Stau in Betten von *parabolischem Umriß* hat sich, wie angedeutet, *G. Tolkmitt*[1]) befaßt und die nötige Hilfstafel berechnet. Wenn er sich auch darin irrte, daß sein Verfahren sich für natürliche Läufe besser als das von *Rühlmann* bevorzugte *Dupuit*sche eigne, so behält es doch Wert, weil es für manche künstliche Gerinne paßt. Bei einer Parabel, die bei einer Füllhöhe h_0 eine Spiegelbreite b_0 bietet, ist bei einem

1) Handbuch der Ing.-Wissensch. 3: Wasserbau, 1. Abt. 1. Hälfte, 3. Aufl. (1892), S. 234. S. a. Wochenbl. f. Arch. u. Ing. 3 (1881), S. 98, 106; *G. Tolkmitt*, Grundlagen der Wasserbaukunst, 2. Aufl., Berlin 1907, S. 123.



Spiegelgefälle J, so lange das Bett im Vergleich zur Breite seicht bleibt, wenn die Füllhöhe h beträgt,



$$
(67)\quad \begin{cases}
\text{die Spiegelbreite } b = b_0\sqrt{\dfrac{h}{h_0}}, \\
\text{die durchströmte Fläche } F = \dfrac{2}{3}bh = \dfrac{2}{3}b_0 h\sqrt{\dfrac{h}{h_0}}, \\
\text{der Profilradius ungefähr } R = \dfrac{2}{3}h, \\
\text{die Geschwindigkeit } U = c\sqrt{\dfrac{2}{3}hJ}, \\
\text{der Durchfluß } Q = FU = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,c\,b_0\dfrac{h^2}{\sqrt{h_0}}\sqrt{J}.
\end{cases}
$$

Wird das Spiegelgefälle J durch das Sohlengefälle i ersetzt, so folgt, wenn man die Länge x stromab mißt,

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\, c b_0 \frac{h^2}{\sqrt{h_0}} \sqrt{i - \frac{dh}{dx}}.$$

Im Unendlichen (oder für gleichförmige Bewegung) ist $\frac{dh}{hx} = 0$ und sei die Wassertiefe h_0; dann ist auch

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\, c b_0 h_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{i}.$$

Die beiden Ausdrücke für Q geben als Differentialgleichung der Staukurve

$$\text{(67 a)} \qquad \left(i - \frac{dh}{dx}\right) h^4 = i h_0^4 \quad \text{oder} \quad i\,dx = \frac{h^4 dh}{h^4 - h_0^4},$$

deren Integration, wie man sich durch Differenzieren von (67 b) überzeugen kann,

$$\text{(67 b)} \qquad \frac{ix}{h_0} = \frac{h}{h_0} - \left[\frac{1}{4}\log\text{nat}\frac{h+h_0}{h-h_0} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{h}{h_0}\right] + C$$

gibt, worin, wenn der Anfangspunkt der x ans Wehr gelegt wird und hier die Tiefe H beträgt,

$$-C = \frac{H}{h_0} - \left[\frac{1}{4}\log\text{nat}\frac{H+h_0}{H-h_0} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{H}{h_0}\right]$$

ist. In der Tat liefert die Differentiation von (67 b)

$$\frac{i\,dx}{h_0} = \frac{dh}{h_0} - \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{h+h_0} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{h-h_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{h_0}{h^2+h_0^2}\right]dh$$
$$= \frac{dh}{h_0} + \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{h_0}{h^2-h_0^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h_0}{h^2+h_0^2}\right]dh$$

oder

$$i\,dx = dh\left(1 + \frac{h_0^4}{h^4-h_0^4}\right) = \frac{h^4}{h^4-h_0^4}\,dh.$$

Zur Erleichterung des Ausrechnens dienen Zahlentafeln, aus denen man die Werte von

$$\text{(67 c)} \qquad F\left(\frac{h}{h_0}\right) = \frac{h}{h_0} - \left[\frac{1}{4}\log\text{nat}\frac{h+h_0}{h-h_0} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{h}{h_0}\right]$$

entnehmen kann[1]. Wieder gilt Gl. (66 h), allerdings mit den Funktionen F statt Φ, also

$$\text{(67 d)} \qquad l_{Hh} = \frac{h_0}{i}\left[F\left(\frac{H}{h_0}\right) - F\left(\frac{h}{h_0}\right)\right].$$

Die *Rühlmann*schen und *Tolkmitt*schen Rechnungen wurden von *J. Danckwerts*[2]) fortgesetzt, indem er von einer unter 45° ansteigenden Geraden, welche dem ungestauten Spiegel entspricht, die Verhältnisse $y : h_0$ als lotrechte Ordi-

1) S. Anhang Tabellen VII und VIII.

2) Zeitschr. f. Architektur u. Ing. (2) 8 (1903), col. 257, auch als S. A.

naten auftrug und so je eine Kurvenschar erhielt, aus der der ganze Verlauf eines Staues sich leicht entnehmen läßt. Die graphische Auftragung vervollständigte er durch eine Zahlentafel.

Eine Aufnahme von Staulinien von 16 km Länge und bis zu 4,5 m Stauhöhe am Wiener Donaukanal[1]) gestattet einen Vergleich der Verfahren von *Schaffernak* (Gl. 66 f), *Rühlmann* (Gl. 66 c) und *Tolkmitt* (Gl. 67 b) und spricht sehr für ersteres, denn dieses ergab als maximale Abweichung einer Staulinie 9 cm gegen 15 und 17 cm der beiden anderen Verfahren, ferner 3 cm gegen 11 und 15 cm bei einer zweiten Linie, 11 cm gegen 19 und 21 cm bei einer dritten Linie usw.

45. Stationäre Strömung mit der Reibung der gleichförmigen Strömung bei Berücksichtigung der lebendigen Kraft. Bei geringer Geschwindigkeit sind die entwickelten Verfahren brauchbar, bei größerer führen sie aber, wegen der Vernachlässigung der lebendigen Kräfte zu unrichtigen Ergebnissen. Für diesen Fall haben unter der Voraussetzung, daß nur allmähliche Änderungen des Bewegungsstandes eintreten sollen (mouvement permanent graduellement varié), von dem *Bernoulli*schen Theorem ausgehend, zuerst *J. B. Belanger*[2]), *P. Vauthier*[3]) und *G. Coriolis*[4]) Beziehungen abgeleitet[5]). Die von *P. Vauthier* etwas modifizierte *Belanger*sche Gleichung lautet, wenn x stromab gemessen wird,

$$J = \zeta_1 \frac{U^2}{2g} + \frac{d}{dx}\frac{U^2}{2g}, \tag{68}$$

welche sich sofort für $\alpha = 1$ aus der oben abgeleiteten Gleichung (20) ergibt, falls man diese auf das Längselement dx eines Wasserspiegels (für den p allenthalben gleich ist) bezieht. *Coriolis* führte zuerst in das letzte Glied den Koeffizienten α ein, der dadurch begründet ist, daß die Geschwindigkeiten nicht gleichförmig verteilt sind, und zwar berechnete er auf Grund zweier verschiedener Annahmen über die Geschwindigkeitsverteilung α zu 1,16 oder 1,47, während *P. Vautier* α weit kleiner schätzte. Man kann sich die Gleichung (68) auch klar machen, indem man von der gleichförmigen Bewegung in offenen Läufen ausgeht und annimmt, daß jedes niedersinkende kg Wasser durchschnittlich dieselbe Reibung

---

1) *K. Kovařik* u. *R. Ehrenberger*, Öst. Wochenschr. f. d. öff. Baudienst 18 (1912), S. 746.

2) *J. B. Belanger,* Essai sur la solution de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes, Paris 1828, S. 10 u. 24.

3) Ann. d. ponts et chauss. 1836, 2. sem., S. 362 f.

4) Ann. d. ponts et chauss. 1836, 1. sem., S. 314 f.

5) Vgl. zur Geschichte des Problems *B. de Saint-Venant,* Des diverses manières de poser les équations du mouvement varié des eaux courantes, Ann. d. ponts et chauss. (6) 13 (1887[1]), S. 148 f.

zu überwinden habe wie bei der gleichförmigen Bewegung und daß es sich außerdem beschleunigen (oder verzögern) muß. Zu dem Gefälle der gleichförmigen Bewegung tritt dann ein Zusatzgefälle für die Beschleunigung hinzu. Betrachtet man eine Flußlänge dx, so ist die Gefällshöhe zur Überwindung der Reibung nach *de Chézy* (Gl. (35))

$$\frac{1}{c^2 R} U^2 dx,$$

die zur Beschleunigung nötige bei gleicher Geschwindigkeit aller Teilchen

$$\frac{d}{dx}\frac{U^2}{2g}\,dx,$$

der Höhenaufwand, der als Höhenunterschied der Spiegelpunkte zum Ausdruck kommt, daher übereinstimmend mit (68)

$$J\,dx = \frac{1}{c^2 R} U^2 dx + \frac{d}{dx}\frac{U^2}{2g} dx.$$

Berücksichtigt man dann wieder die ungleiche Geschwindigkeit der Einzelteilchen, so folgt

$$J = \frac{1}{c^2 R} U^2 + \alpha \frac{d}{dx}\frac{U^2}{2g}. \tag{69}$$

worin man $\alpha = 1{,}1$ oder $^{10}/_9$ zu setzen pflegt. Daß bei einer Beschleunigung ein größerer Kraftaufwand als $\frac{d}{dx}\frac{U^2}{2g}$ nötig ist, erscheint, wenn man dem Gedankengang *Coriolis'* folgt, einleuchtend, keineswegs so sicher wäre es aber dann, ob bei einer Verzögerung die aufgespeicherte lebendige Kraft wieder voll zur Verwendung käme, mit anderen Worten, ob für Beschleunigung und Verzögerung α denselben Wert hat. Erst die Betrachtungen *Boussinesqs*, der aber α anders begründet, machten dies wahrscheinlich[1]).

In (69) kann für gleichmäßiges Sohlengefälle i, das Spiegelgefälle, wenn h die Wassertiefe bedeutet,

$$J = i - \frac{dh}{dx}$$

gesetzt werden. Der Durchfluß FU ist unabhängig vom Querschnitt F an allen Laufstellen gleich groß, daher

$$F\,dU + U\,dF = 0$$

und

$$\frac{d}{dx}\frac{U^2}{2g} = \frac{U}{g}\frac{dU}{dx} = -\frac{U^2}{gF}\frac{dF}{dx},$$

---

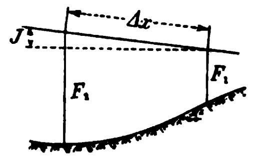
1) *Tolkmitt* im Handbuch d. Ingen.-Wissenschaften, 3. Teil, Wasserbau, 1. Abt., 1. Hälfte, 3. Aufl., 1892, S. 231 berücksichtigt die Geschwindigkeitshöhe nur, wenn die Geschwindigkeit stromab wächst, also Gefälle verbraucht wird, nicht aber, wenn sie sich stromab vermindert. Damit geht er wohl zu weit.

wonach bei Fortlassung des Koeffizienten α die Gl. (69) auch in der von *A. Ritter*[1]) gegebenen Form

$$\frac{dh}{dx} - \frac{U^2}{gF}\frac{dF}{dx} = i - \frac{U^2}{c^2 R} \tag{69a}$$

schreibbar ist.

Zur Beziehung (69) sei zunächst bemerkt, daß man mit ihr nach Umwandlung der Differentiale in Differenzen die für ein unregelmäßiges sowie für ein zylindrisches Bett ohne Rücksichtnahme auf die lebendige Kraft entwickelten Verfahren ohne Schwierigkeit so erweitern kann, daß sie auch die lebendige Kraft berücksichtigen. Ist nämlich für eine Strecke Δx der Spiegel zunächst näherungsweise bekannt, so sind es bei *bekannter* Sohle, auch die Querschnitte F_1 und F_2, sowie die Profilradien R_1 und R_2 und gilt bei gegebenem Durchfluß Q



$$U_1 = \frac{Q}{F_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{F_2},$$

ferner näherungsweise für das Spiegelgefälle dieses Abschnittes, wenn F_2 stromauf von F_1 liegt,

$$J_{12} = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{U_1^2}{R_1} + \frac{U_2^2}{R_2}\right) + \frac{\alpha}{2g}(U_1^2 - U_2^2), \tag{70}$$

oder wenn man die Koeffizienten c vom Querschnitt selbst abhängen, statt überall gleich sein läßt,

$$J_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_1^2}{c_1^2 R_1} + \frac{U_2^2}{c_2^2 R_2}\right) + \frac{\alpha}{2g}(U_1^2 - U_2^2). \tag{70a}$$

Die Beziehungen (70) und (70a) gelten auch für zylindrische Betten, ohne daß (66a) seine Geltung verlieren würde, wenn man die lebendige Kraft in Rücksicht zieht. Man hat im Gegenteil in letzterem Falle den nach (70) oder (70a) berechneten Wert von J zur Ermittelung der Streckenlänge Δx wie vordem in (66a) einzusetzen.

46. Die Staukurve bei Berücksichtigung der lebendigen Kraft und rechteckigem Gerinne. Die Integration der Gleichung (69) leistete für *Kanäle von rechteckigem Querschnitt* bereits *J. Dupuit* für $\alpha = 1$; für ein beliebiges α tat dies *U. Masoni*[2]). Im Unendlichen sei i das mit dem Sohlengefälle übereinstimmende Spiegelgefälle, h_0 die Tiefe, p der benetzte Umfang (périmètre mouillé) und daher

---

1) *A. Ritter*, Lehrb. d. höheren Mechanik 2 = Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik, Hannover 1876, S. 484. Die Bezeichnungsweise ist hier freilich eine recht abweichende.

2) *U. Masoni*, Idraulica, 2. Aufl., S. 488.

die Breite $= p - 2h_0$,
der Querschnitt $= h_0(p - 2h_0)$,
der Profilradius $= h_0(p - 2h_0) : p$;

es muß weiter, wenn daselbst die Geschwindigkeit U_0 herrscht,

$$i = \frac{p}{c^2 h_0 (p - 2h_0)} U_0^2 \quad \text{oder} \quad U_0^2 = \frac{c^2 h_0 (p - 2h_0)}{p} i$$

sein. Ist nun h die Tiefe an beliebiger Stelle, so muß des überall gleichen Durchflusses wegen

$$h U = h_0 U_0$$

zutreffen, wonach

$$U^2 = \frac{c^2 i h_0^3 (p - 2h_0)}{p h^2}$$

gilt. Das Gefälle ist, wenn die Längen x stromab gemessen werden,

$$J = i - \frac{dh}{dx},$$

der Profilradius

$$R = \frac{h(p - 2h_0)}{2h + p - 2h_0}$$

und daher wird (69) zu

$$i - \frac{dh}{dx} = \frac{2h + p - 2h_0}{c^2 h (p - 2h_0)} \cdot \frac{c^2 i h_0^3 (p - 2h_0)}{p h^2} + \alpha \frac{d}{dx} \frac{c^2 i h_0^3 (p - 2h_0)}{2 g p h^2},$$

oder da im letzten Glied nur h variabel ist, nach Differentiation zu

$$i - \frac{dh}{dx} = \frac{2h + p - 2h_0}{h^3} \cdot \frac{i h_0^3}{p} - \frac{\alpha c^2 i}{g} \cdot \frac{h_0^3 (p - 2h_0)}{p h^3} \frac{dh}{dx}$$

oder zu

$$i\,dx - \frac{2h + p - 2h_0}{h^3} \cdot \frac{i h_0^3}{p} dx = dh - \frac{\alpha c^2 i}{g} \cdot \frac{h_0^3 (p - 2h_0)}{p h^3} dh,$$

$$(71) \qquad i\,dx = \frac{1 - \frac{\alpha c^2 i}{g} \frac{h_0^3 (p - 2h_0)}{p h^3}}{1 - \frac{2h + p - 2h_0}{h^3} \frac{h_0^3}{p}} dh = \frac{h^3 - \frac{\alpha c^2 i}{g} h_0^3 \left(1 - 2\frac{h_0}{p}\right)}{h^3 - h_0^3 - \frac{2 h_0^3}{p}(h - h_0)} dh.$$

Wird der Einfachheit wegen der unveränderliche Bruch

$$\alpha \frac{c^2 i}{g} = \beta$$

gesetzt, so entsteht aus (71)

$$(71\text{a}) \qquad i\,dx = \frac{h^3 - \beta h_0^3 \left(1 - 2\frac{h_0}{p}\right)}{h^3 - h_0^3 - \frac{2 h_0^3}{p}(h - h_0)} dh.$$

Die Integration von (71a) ist nicht schwierig, aber langwierig, und so soll die Lösung angegeben und durch Differentiation ihre Richtigkeit bewiesen werden. Die Lösung lautet

$$(72)\qquad ix = h + \frac{h_0}{2}\,\frac{1-\beta+2\beta\frac{h_0}{p}}{3-2\frac{h_0}{p}}\log\text{nat}\,\frac{(h-h_0)^2}{h^2+h_0h+h_0^2-2\frac{h_0^3}{p}}$$

$$+\frac{h_0^2}{3-2\frac{h_0}{p}}\,\frac{-3+3\beta+12\frac{h_0}{p}-6\beta\frac{h_0}{p}-8\frac{h_0^2}{p^2}}{h_0\sqrt{3-\frac{8h_0}{p}}}\,\text{arc tang}\,\frac{2h+h_0}{h_0\sqrt{3-8\frac{h_0}{p}}}+C.$$

Die Differentiation des Logarithmus gibt

$$\frac{2}{h-h_0}-\frac{2h+h_0}{h^2+h_0h+h_0^2-2\frac{h_0^3}{p}}=\frac{3h_0h+3h_0^2-4\frac{h_0^3}{p}}{(h-h_0)\left(h^2+h_0h+h_0^2-2\frac{h_0^3}{p}\right)}$$

und daher die des betreffenden Gliedes

$$\frac{h_0^2}{2}\,\frac{3h-3\beta h+6\beta\frac{h_0}{p}h+3h_0-3\beta h_0+6\beta\frac{h_0^2}{p}-4\frac{h_0^2}{p}+4\beta\frac{h_0^2}{p}-8\beta\frac{h_0^3}{p^2}}{\left(3-2\frac{h_0}{p}\right)(h-h_0)\left(h^2+h_0h+h_0^2-2\frac{h_0^3}{p}\right)}$$

Die Differentiation des Arcustangens gibt

$$\frac{2}{h_0\sqrt{3-8\frac{h_0}{p}}}\,\frac{1}{1+\frac{4h^2+4h_0h+h_0^2}{h_0^2\left(3-8\frac{h_0}{p}\right)}}=\frac{h_0\sqrt{3-8\frac{h_0}{p}}}{2\left(h^2+h_0h+h_0^2-2\frac{h_0^3}{p}\right)}$$

und daher sein vollständiges Glied

$$\frac{h_0^2\left(-3+3\beta+12\frac{h_0}{p}-6\beta\frac{h_0}{p}-8\frac{h^2}{p^2}\right)}{2\left(3-2\frac{h_0}{p}\right)\left(h^2+h_0h+h_0^2-2\frac{h_0^3}{p}\right)}.$$

Wenn man (72) differenziert, erhält man hiernach

$$(72\text{a})\qquad i\frac{dx}{dh}=1+\frac{h_0^2Z}{2\left(3-2\frac{h_0}{p}\right)\left(h^2+h_0h+h_0^2-2\frac{h_0^3}{p}\right)(h-h_0)},$$

worin

$$Z=3h-3\beta h+6\beta\frac{h_0}{p}h+3h_0-3\beta h_0+6\beta\frac{h_0^2}{p}-4\frac{h_0^2}{p}+4\beta\frac{h_0^2}{p}-8\beta\frac{h_0^3}{p^2}$$

$$+(h-h_0)\left(-3+3\beta+12\frac{h_0}{p}-6\beta\frac{h_0}{p}-8\frac{h_0^2}{p^2}\right)$$

$$=12\frac{h_0}{p}h-8\frac{h_0^2}{p^2}h+6h_0-6\beta h_0-16\frac{h_0^2}{p}+16\beta\frac{h_0^2}{p}+8\frac{h_0^3}{p^2}-8\beta\frac{h_0^3}{p^2}$$

$$=4\frac{h_0}{p}h\left(3-2\frac{h_0}{p}\right)+2h_0(1-\beta)\left(3-8\frac{h_0}{p}+4\frac{h_0^2}{p^2}\right).$$

Z ist offenbar durch $\left(3 - 2\frac{h_0}{p}\right)$ teilbar und so läßt sich Gl. (72a) zur Gleichung

$$(72\text{b}) \qquad i\frac{dx}{dh} = 1 + \frac{2\frac{h_0^3}{p}h + h_0^3(1-\beta)\left(1 - 2\frac{h_0}{p}\right)}{\left(h^2 + h_0 h + h_0^2 - 2\frac{h^3}{p}\right)(h - h_0)}$$

vereinfachen, die bei anderer Schreibweise von Zähler und Nenner des Bruches, die Form

$$i\frac{dx}{dh} = 1 + \frac{h_0^3 + 2\frac{h_0^3}{p}(h - h_0) - \beta h_0^3\left(1 - 2\frac{h_0}{p}\right)}{h^3 - h_0^3 - \frac{2h^3}{p}(h - h_0)}$$

annimmt, in welcher man ihre Übereinstimmung mit dem Ausdrucke (71a) sofort erkennt. Die angesetzte Lösung (72) trifft also tatsächlich zu. Wenn in (72) für $x = 0$ die Wassertiefe $h = 0$ sein soll, so bedeutet dies, daß die Konstante

$$C = -\frac{h_0}{2}\cdot\frac{1 - \beta + 2\beta\frac{h_0}{p}}{3 - 2\frac{h_0}{p}}\log\text{nat}\frac{1}{1 - 2\frac{h_0}{p}}$$

$$-\frac{h_0^2}{3 - 2\frac{h}{p}}\cdot\frac{-3 + 3\beta + 12\frac{h_0}{p} - 6\beta\frac{h_0}{p} - 8\frac{h_0^2}{p^2}}{h\sqrt{3 - \frac{8h_0}{p}}}\text{arc tang}\frac{1}{\sqrt{3 - \frac{8h_0}{p}}}$$

zu machen ist, womit sich für die Spiegelkurve der Ausdruck

$$(72\text{c}) \qquad ix = h + \frac{h_0}{2}\cdot\frac{1 - \beta + 2\beta\frac{h_0}{p}}{3 - 2\frac{h_0}{p}}\log\text{nat}\frac{(h - h_0)^2\left(1 - 2\frac{h_0}{p}\right)}{h^2 + h_0 h + h_0^2 - 2\frac{h_0^3}{p}}$$

$$+\frac{h_0^2}{3 - 2\frac{h_0}{p}}\cdot\frac{-3 + 3\beta + \frac{12h_0}{p} - 6\beta\frac{h_0}{p} - 8\frac{h_0^2}{p^2}}{h_0\sqrt{3 - 8\frac{h_0}{p}}}$$

$$\cdot\left[\text{arc tang}\frac{2h + h_0}{h_0\sqrt{3 - 8\frac{h_0}{p}}} - \text{arc tang}\frac{1}{\sqrt{3 - 8\frac{h_0}{p}}}\right]$$

ergibt. Die Besprechung der Kurveneigenschaften soll hier unterbleiben, weil diese Kurve im allgemeinen jener ähnelt, die sich bei großer Breite, also $p = \infty$, ergibt. Es werde nur bemerkt, daß der Logarithmus für $h = h_0$ negativ unendlich wird, also auch $x = -\infty$ wird. Im Unendlichen stromauf fällt daher der Stauspiegel mit dem der gleichförmigen Bewegung zusammen. Die Neigung der Kurve gegen die Sohle, nämlich

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h^3 - h_0^3 - 2\frac{h_0^3}{p}(h - h_0)}{h^3 - \beta h_0^3\left(1 - 2\frac{h_0}{p}\right)}$$

wird dort Null, also der Spiegel zur Sohle parallel, während für

$$h = h_0 \sqrt[3]{\beta\left(1 - 2\frac{h_0}{p}\right)}$$

die Kurventangente senkrecht zur Sohle abfällt.

47. Die Staukurve bei Berücksichtigung der lebendigen Kraft und parabolischem Gerinne. Bei flachem, parabolischem Querschnitt gelten wieder die Ausdrücke (67) und da im Unendlichen abermals gleichförmige Bewegung herrscht, hat man bei gleicher Bezeichnung wie oben

$$U = \frac{Q}{F} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\, c b_0 h_0 \sqrt{i h_0} : \frac{2}{3} b_0 h \sqrt{\frac{h}{h_0}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \frac{c\sqrt{i}\, h_0^2}{\sqrt{h^3}}$$

oder als Gl. (69)

$$J = i - \frac{dh}{dx} = \frac{\frac{2}{3}\frac{c^2 i h_0^4}{h^3}}{\frac{2}{3}c^2 h} - \frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{2c^2 i h_0^4}{h^4}\frac{dh}{dx} = \frac{i h_0^4}{h^4} - \frac{\alpha c^2 i}{g}\frac{h_0^4}{h^4}\frac{dh}{dx}$$

oder

$$i\,dx - dh = i\frac{h_0^4}{h^4}dx - \frac{k_1^4}{h^4}dh,$$

wenn man

$$k_1 = h_0 \sqrt[4]{\frac{\alpha c^2 i}{g}} \tag{73}$$

setzt. Es folgt weiter

$$(h^4 - h_0^4)\, i = (h^4 - k_1^4)\frac{dh}{dx} \quad \text{oder} \quad i\,dx = \frac{h^4 - k_1^4}{h^4 - h_0^4}dh, \tag{73a}$$

deren Integral

$$i x = h - \frac{h_0^4 - k_1^4}{4h_0^3}\left[\log\text{nat}\,\frac{h + h_0}{h - h_0} + 2\,\text{arc tang}\,\frac{h}{h_0}\right] + C \tag{73b}$$

lautet. In der Tat gibt (73b) differenziert

$$i\,dx = dh - \frac{h_0^4 - k_1^4}{4h_0^3}\left[\frac{1}{h + h_0} - \frac{1}{h - h_0} + 2\frac{\frac{1}{h_0}}{1 + \left(\frac{h}{h_0}\right)^2}\right]dh$$

$$= dh + \frac{h_0^4 - k_1^4}{4h_0^3}\left[\frac{2h_0}{h^2 - h_0^2} - \frac{2h_0}{h^2 + h_0^2}\right]dh$$

$$= dh + \frac{h_0^4 - k_1^4}{h^4 - h_0^4}dh = \frac{h^4 - k_1^4}{h^4 - h_0^4}dh,$$

also wieder die integrierte Gleichung. Um die *Tolkmitt*sche Tafel für diesen Staufall benutzbar zu machen, werde berücksichtigt, daß in ihr

$$\left[\frac{1}{4}\log\text{nat}\frac{h+h_0}{h-h_0}+\frac{1}{2}\text{arc tang}\frac{h}{h_0}\right]=\frac{h}{h_0}-F\left(\frac{h}{h_0}\right)$$

ist, daß sonach (73b) in

$$\frac{ix}{h_0}=\frac{h}{h_0}-\left(1-\frac{k_1^4}{h_0^4}\right)\left[\frac{h}{h_0}-F\left(\frac{h}{h_0}\right)\right]+C$$

oder in

$$\frac{ix}{h_0}=\frac{h}{h_0}\cdot\frac{k_1^4}{h_0^4}+\left(1-\frac{k_1^4}{h_0}\right)F\left(\frac{h}{h_0}\right)+C$$

verwandelt werden kann, wonach die Entfernung zweier Punkte, welche die Wassertiefen h und H haben, bei Berücksichtigung der lebendigen Kraft (vgl. (67d))

(73c) $$l_{Hh}=\frac{h_0}{i}\left\{\frac{H-h}{h_0}\frac{k_1^4}{h_0^4}+\left(1-\frac{k_1^4}{h^4}\right)\left[F\left(\frac{H}{h_0}\right)-F\left(\frac{h}{h_0}\right)\right]\right\}$$

beträgt. Aus (73a) geht

(73d) $$i\frac{d^2x}{dh^2}=\frac{4h^3(k_1^4-h_0^4)}{(h^4-h_0^4)^2}$$

hervor, wonach der zweite Differentialquotient für den ganzen Verlauf der Kurve dasselbe Vorzeichen hat und zwar das positive oder negative, je nachdem $k_1 \gtrless h_0$ ist. Wenn $\frac{d^2x}{dh^2}$ positiv ist, wächst $\frac{dx}{dh}$ stromab, das heißt, wird die Spiegelneigung stromab immer flacher. Je nachdem $k_1 > h_0$ oder $k_1 < h_0$ ist, kehrt also die ganze Kurve (73b) ihre Hohlseite stromab oder stromauf (was nicht mit unten und oben zu verwechseln ist).

48. Die Staukurve bei Berücksichtigung der lebendigen Kraft und sehr großer Breite. Breite Gerinne von flacher Sohle können als rechteckige, von endlicher Tiefe aber unendlichem benetztem Umfang aufgefaßt werden, so daß die Gl. (71) mit $p=\infty$ oder

$$i\,dx=\frac{h^3-\frac{\alpha c^2 i}{g}h_0^3}{h^3-h_0^3}dh$$

gelten muß oder, wenn

(74) $$k=h_0\sqrt[3]{\frac{\alpha c^2 i}{g}}$$

gesetzt wird,

(74a) $$i\,dx=\frac{h^3-k^3}{h^3-h_0^3}dh=dh+\frac{h_0^3-k^3}{h^3-h_0^3}dh,$$

woraus

(74b) $$\frac{ix}{h_0}=\frac{h}{h_0}-\frac{h_0^3-k^3}{h_0^3}\left\{\frac{1}{6}\log\text{nat}\frac{h^2+hh_0+h_0^2}{(h-h_0)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc cotg}\frac{2h+h_0}{\sqrt{3}h_0}\right\}+C$$

hervorgeht. In der Tat gibt (74b) differenziert

$$\frac{i\,dx}{h_0} = \frac{dh}{h_0} - \frac{h_0^3 - k^3}{h_0^3}\left\{\frac{1}{6}\,\frac{2h+h_0}{h^2+hh_0+h_0^2} - \frac{1}{6}\,\frac{2}{h-h_0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{2:\sqrt{3}h_0}{1+\frac{4h^2+4hh_0+h_0^2}{3h_0^2}}\right\}dh$$

$$= \frac{dh}{h_0} - \frac{h_0^3-k^3}{h_0^3}\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{hh_0+h_0^2}{h^3-h_0^3} + \frac{h_0}{2(h^2+hh_0+h_0^2)}\right\}dh$$

$$= \frac{dh}{h_0} - \frac{h_0^3-k^3}{h_0^3}\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{2h_0^2}{h^3-h_0^3}\right\}dh,$$

also die gegebene Differentialgleichung (74 a). Natürlich läßt sich (74b) auch unmittelbar aus (72) ableiten, indem man den benetzten Umfang p unendlich groß werden läßt, β durch $k^3 : h_0^3$ ersetzt und beachtet, daß $\operatorname{arc\,tang} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cotg}$ ist, also mit dem Übergang von der Winkelfunktion zur Kofunktion eine in der Formel nicht bemerkbare Änderung der Integrationskonstanten verbunden ist.

J. J. Ch. Bresse[1]) hat Zahlentafeln (siehe Tabelle IX im Anhang) berechnet, in denen für verschiedene Werte von $\frac{h}{h_0}$ die entsprechenden von

$$B\left(\frac{h}{h_0}\right) = \frac{1}{6}\log\operatorname{nat}\frac{h^2+hh_0+h_0^2}{(h-h_0)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,cotg}\frac{2h+h_0}{\sqrt{3}h_0}$$

angegeben sind, so daß man die Entfernung zweier Punkte von den Wassertiefen H und h, also

$$l_{Hh} = \frac{H-h}{i} - \frac{h_0}{i}\left[1-\frac{k^3}{h_0^3}\right]\left\{B\left(\frac{H}{h_0}\right) - B\left(\frac{h}{h_0}\right)\right\} \tag{74 c}$$

hat.

Die Differentialgleichung

$$i\,dx = \frac{h^3-k^3}{h^3-h_0^3}\,dh \tag{74 a}$$

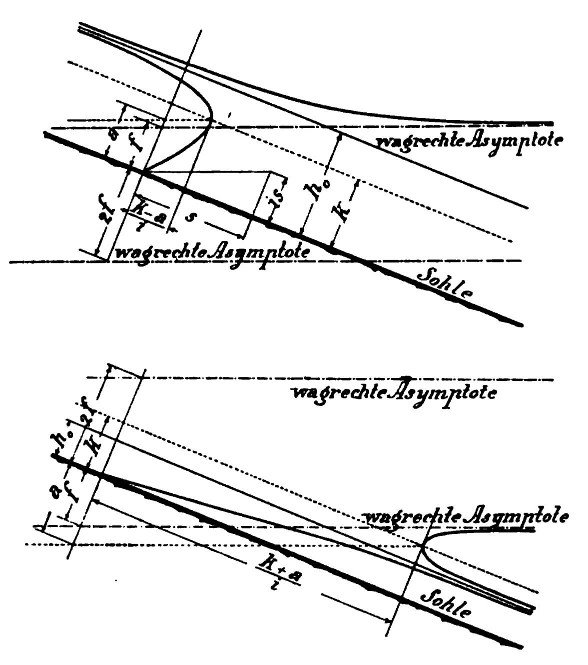
eignet sich zur Diskussion der Staukurve. Nach (74 a) ist

$$i\frac{d^2x}{dh^2} = \frac{3h^2(k^3-h_0^3)}{(h^3-h_0^3)^2}, \tag{74 d}$$

wonach (wie beim parobolischen Umriß) die gesamte Kurve ihre Hohlseite der h-Achse entweder zukehrt oder abkehrt. Für $k > h_0$, ist $\frac{d^2x}{dh^2}$ positiv, wächst also $\frac{dx}{dh}$ ständig stromab, oder wird der Spiegel stromab immer flacher, wendet also die Kurve ihre Hohlseite dem Unterlauf zu, während für $k < h_0$ das Gegenteil der Fall ist und die Hohlseite der Kurve dem Oberlauf zugekehrt ist. Dabei kann in beiden Fällen die Hohlseite sowohl nach oben (gegen den Himmel) als nach unten (gegen die Sohle) zu liegen kommen. Unendlich wird $\frac{dh}{dx}$ für $h = k = h_0\sqrt[3]{\frac{\alpha c^2 i}{g}}$;

1) *Bresse* entwickelte die Differentialgleichung mit $\alpha = 1$. Cours de mécanique appliquée, 2. partie, Hydraulique, Paris 1860, S. 221.

es gibt also einen — aber auch nur einen einzigen — Punkt mit senkrecht zur Sohle abfallendem Spiegel. Freilich verlieren die für die ungleichförmige Bewegung aufgestellten Beziehungen in der Nähe dieses Punktes ihre Gültigkeit.



Der Spiegel wird nahezu parallel zur Sohle, oder $\frac{dh}{dx}$ wird sehr klein, wenn $h^3 - h_0^3$ verschwindet, dann verlieren im Ausdruck (74 b) für $\frac{ix}{h_0}$ (in dem man sich den Logarithmus des Bruches als Differenz geschrieben denken möge) alle Glieder an Bedeutung neben

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{h_0^3 - k^3}{h_0^3} \cdot \log \text{nat}\,(h - h_0),$$

welch letzteres Glied für $k < h_0$ negativ, für $k > h_0$ positiv unendlich wird. Der Übergang in gleichförmige Bewegung liegt daher im ersteren Falle unendlich weit stromauf, im zweiten unendlich weit stromab. Die Ursache, daß die gleichförmige Bewegung nicht überall herrscht, ist dann umgekehrt im ersten Falle stromab, im zweiten stromauf zu suchen. Für diese Kurvenäste läßt sich also sagen, daß sie für $k < h_0$ von den Bauten im Unterlauf (z. B. Stauwehr, Stufe in der Sohle) abhängen, für $k > h_0$ von jenen im Oberlauf (z. B. Schütz, zwischen dessen Unterkante und der Sohle das Wasser aus einem Teich ins Gerinne fließt). Wird willkürlich festgesetzt, daß der Anfangspunkt der x im Schnittpunkte der Staukurve mit der Sohle liegen soll, also daß für $h = 0$ auch $x = 0$ sei, so muß

$$0 = -\frac{h_0^3 - k^3}{h_0^3} \left\{\frac{1}{6} \log \text{nat}\, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tang} \sqrt{3}\right\} + C$$

$$= \frac{h_0^3 - k^3}{h_0^3} \cdot \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + C$$

sein, wodurch (74 b) zu

$$\text{(74e)}\quad ix = h - \frac{h_0^3 - k^3}{h_0^2} \left\{\frac{1}{6} \log \text{nat} \frac{h^2 + hh_0 + h_0^2}{(h - h_0)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc cotg} \frac{2h + h_0}{\sqrt{3}\, h_0} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right\}$$

wird. Für den Kurvenpunkt $h = k$ (das ist der, dessen Tangente senkrecht zur Sohle steht), ist dann, falls man den *absoluten* Wert des zweiten Gliedes der rechten Seite mit

$$a = \pm\left(\frac{h_0^3 - k^3}{h_0^2}\right)\left\{\frac{1}{6}\log\operatorname{nat}\frac{h_0^2 + h_0 k + k^2}{(h_0 - k)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,cotg}\frac{h_0 + 2k}{\sqrt{3}h_0} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right\}$$

bezeichnet, die Abszisse

$$x_k = \frac{k \mp a}{i},$$

wobei das Minuszeichen für $k < h_0$ und das Pluszeichen für $k > h_0$ gilt. Für h unendlich groß positiv oder negativ vereinfacht sich (74e) zu

$$ix = h - \frac{h_0^3 - k^3}{h_0^2}\left\{\frac{-1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,cotg}\frac{2h}{\sqrt{3}h_0} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right\},$$

welchem Ausdruck unendlich viele Lösungen entsprechen. Dasselbe war aber eigentlich auch bei Gl. (74e) der Fall, welcher unendlich viele Kurven entsprechen, die alle um je $\frac{h_0^3 - k^3}{ih_0^2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ gegeneinander in der x-Richtung verschoben sind. Es werde daher nun die Festsetzung getroffen, daß der arc cotg nur von 0 bis π zugelassen werde. Für die großen positiven oder negativen h ist dann

$$ix = h - \frac{(h_0^3 - k^3)\pi}{3\sqrt{3}h_0^2} \quad \text{bzw.} \quad = h + \frac{2(h_0^3 - k^3)\pi}{3\sqrt{3}h_0^2}.$$

Nun beträgt die, allerdings nicht lotrechte, sondern in der h-Richtung gemessene Erhebung eines Punktes über eine durch den Ursprung ($h = x = 0$) gelegte Wagrechte

$$h - ix.$$

Vorstehender Ausdruck besagt daher, daß die betrachtete Staukurve sich bis zur senkrecht zur Sohle gemessenen Höhe

$$f = \frac{h_0^3 - k^3}{3\sqrt{3}h_0^2} \tag{74f}$$

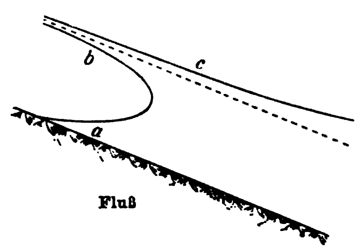
über den Ursprung erhebt, bzw. bis zur Tiefe $2f$ unter ihn hinabsinkt, wenn $k < h_0$ ist, wobei freilich der Kurve in dieser Tiefe, wo sie bereits unter die Sohle fällt, keine hydraulische Bedeutung mehr zukommt. Für $k > h_0$ ist

$$f = \frac{k^3 - h_0^3}{3\sqrt{3}h_0^2}$$

zu setzen, wenn es positiv sein soll, und ist der eben ausgesprochene Satz dahin zu ändern, daß senkrecht zur Sohle gemessen die Kurve bis zur Tiefe f hinabsinkt und bis zur Höhe $2f$ hinaufreicht. Wenn h unendlich groß wird, wie dies vorausgesetzt wurde,

wird gemäß (74 a) $\frac{dh}{dx} = i$, daher die Tangente im betreffenden Kurvenpunkte wagrecht. Die in schräggemessenen Abständen f bzw. $2f$ vom Ursprung gezogenen Wagrechten bilden daher Asymptoten der Staukurve.

Bei allen bisherigen Betrachtungen hat es sich gezeigt, daß die Staukurve einen verschiedenen Charakter besitzt, je nachdem k kleiner oder größer als die Tiefe h ist, die das Wasser bei gleichförmiger Bewegung annimmt. In der Zeichnung der Staukurven auf Seite 142 kommt dies noch klarer zum Ausdruck. Dieser verschiedene Charakter hat *B. de St. Venant*[1]) bewogen, die Wasserläufe für die $k < h_0$ oder das Sohlengefälle $i < \frac{g}{\alpha c^2}$ ist als *Flüsse*, jene für die $k > h_0$ oder $i > \frac{g}{\alpha c^2}$ ist, *als Wildbäche* zu bezeichnen. Bei beiden Läufen kann man die Staukurve als aus drei Ästen bestehend betrachten, von denen zwei an der Stelle zusammenhängen, wo die Kurventangente senkrecht zur Sohle gerichtet ist; ein dritter Ast verläuft, ohne die beiden anderen zu treffen, vom positiv zum negativ Unendlichen und läßt bei den Flüssen das zusammenhängende Ästepaar unter sich liegen, während er bei den Wildbächen unter das Paar taucht. Die drei Äste entstehen bei den Flüssen etwa folgendermaßen:

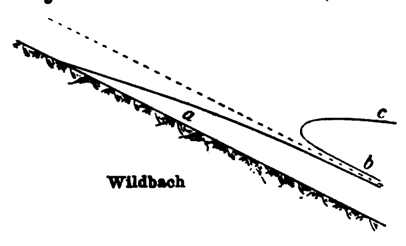


Der aufsteigende Ast a durch Austritt von Wasser unter der Kante eines etwas gelüfteten Schützes,

der anschließende Ast b durch eine Stufe oder einen Knick in der Sohle,

der Einzelast c durch ein stauendes Hindernis.

Die Äste b und c werden, wie schon gesagt, in ihrer Lage durch die Beschaffenheit festgelegt, die der Fluß stromab aufweist, der Ast a jedoch durch einen Bau, der sich stromaufwärts befindet. Hieraus geht hervor, daß sich für die betreffende Flußstrecke b und c ausschließen, ferner daß a keineswegs jene Lage gegenüber b und c besitzen muß, die er gemäß der einheitlichen Gleichung (also auch gemäß der Figur) haben müßte. Im Gegenteil *kann* a gegenüber c in der x-Richtung sowohl stromauf als stromab verschoben werden, und *muß* a stromauf gerückt werden, wenn ein Ast b folgen soll. Den Übergang von a in b oder c vermittelt die Stelle, in der $h = k$ wird, da hier eben die Stau-



1) Ann. des mines (4) 20 (1851), S. 320 u. Paris C. R. 71 (1870), S. 194.

kurve nicht mehr den wahren Wasserspiegel wiedergibt. — Bei den Wildbächen entsteht der Einzelast a durch Austritt unter einem Schütz, der untere Ast b des Paares durch Zulauf aus einer Strecke mit flacherem Spiegel, der obere Ast c des Paares durch ein stauendes Hindernis. Hier schließen sich a und b gegenseitig aus, während sowohl a als b gemeinschaftlich mit c auftreten können, wobei der Anschluß durch einen plötzlichen Sprung über die Stelle von der Tiefe $h = k$ vor sich geht. Der Ast a ist gegen c recht verschiebbar, und b muß gegenüber c in der x-Richtung stromauf gerückt werden, wenn b und c in gleicher Bachstrecke liegen sollen. Den erwähnten Sprung hat *G. Bidone*[1]) zuerst beobachtet und *J. B. Belanger*[2]) der Rechnung unterzogen. Er bildet den auffallendsten Unterschied zwischen den „Flüssen" und „Wildbächen". Übrigens macht *Boussinesq*[3]) aufmerksam, daß auf der Strecke zwischen Wehr und Wassersprung, also für $h > k$, jeder Wildbach „still" verläuft, nämlich unfähig ist, sich zu erheben, jeder Fluß hingegen zwischen einem Spannschütz und dem nachfolgenden Wassersprung, also soweit $h < k$ bleibt, „wild" sei. Diese Ungleichungen kann man weiter umwandeln, wenn man bedenkt, daß nach (74)

$$k = h_0 \sqrt[3]{\frac{\alpha c^2 i}{g}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha h_0^2 U_0^2}{g}} \tag{74 g}$$

ist, worin U_0 die Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung bedeutet. Aus der Gleichheit des Durchflusses an allen Laufstellen folgt nämlich weiter

$$h_0 U_0 = h U$$

und

$$k = \sqrt[3]{\frac{\alpha h^2 U^2}{g}},$$

wonach statt $h \gtrless k$ auch

$$U^2 \lessgtr \frac{gh}{\alpha}$$

geschrieben werden kann und man ein Geschwindigkeitskriterium für die Entscheidung der Frage besitzt, ob das Wasser „still" oder „wild" läuft.

49. Boussinesqs Staukurve bei gleichförmigem Sohlengefälle mit Vernachlässigung der Spiegelkrümmung. In vollkommenerer Weise als bei den bisher wiedergegebenen Theorien behandelt *J. Boussinesq*[4]) das Stauproblem. Er weist darauf hin, daß es in letzter Linie

1) *Torino,* Memorie 25 (1820), S. 27 f. — Siehe auch unten S. 192.

2) *J. B. Belanger,* Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent, Paris 1828, S. 31.

3) *J. Boussinesq,* Eaux courantes, S. 154.

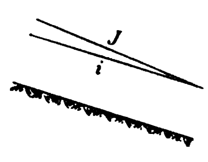
4) Ebenda, S. 102, 487.

doch nur die Außenreibung sei, welche eine fortgesetzte Beschleunigung des abwärts fließenden Wassers hintanhalte, daß also eine begründete Stautheorie auf einer richtigen Bewertung jener Außenreibung beruhen müsse. *Boussinesq* trachtet daher die durch die Ungleichförmigkeit veranlaßte Änderung der Umfangsreibung zu bestimmen, wobei er mit der Behandlung der wenig gekrümmten Stauspiegel beginnt, nach deren Ermittelung er zur Berechnung der Stellen starker Krümmung fortschreitet.

Gemäß diesem Vorgange seien vorerst wenig gebogene Stromfäden und gleichmäßiges Sohlengefälle i und Spiegelgefälle J vorausgesetzt. Ferner werde angenommen, daß i und J klein seien und daß man es mit einem breiten rechteckigen Querschnitte zu tun habe, so daß, wenn y die Ordinaten in der Querrichtung bedeutet, die Ableitungen nach y, sowie die von der Geschwindigkeit v in der y-Richtung Null werden, ebenso wie die nach t, weil eine von der Zeit t unabhängige Bewegung betrachtet wird. Die *Navier*schen Gleichungen (14g) vereinfachen sich dann, wenn man die x in der Längsrichtung stromab parallel zur Sohle mißt, auf

$$(75)\qquad \begin{cases} \frac{\gamma}{g} X - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\gamma}{g} Z - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g}\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \varepsilon\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \end{cases}$$

wobei es bei der als gering anzunehmenden Sohlen- und Spiegelneigung gleichgültig ist, ob man die z lotrecht oder senkrecht zum Spiegel oder senkrecht zur Sohle mißt. Nähere Überlegung zeigt, daß sich die erste der Gl. (75) noch weiter vereinfachen läßt. Wenn die Strömungslinien nur wenig gekrümmt sind, so nimmt der Abstand zweier naher Stromlinien nur allmählich zu oder ab und daher die Geschwindigkeit u zwischen diesen Linien ziemlich gleichmäßig ab oder zu, so daß $\frac{d^2 u}{dx^2}$ vernachlässigt werden kann. Ferner ist die Massenkraft X als zur Sohle parallele Gewichtskomponente $= gi$ zu setzen; andererseits hängt bei geringer Stromfadenkrümmung der Druck p fast nur von der Tiefenlage unter der Oberfläche ab, von welcher er nach unten hydrostatisch zunimmt, während bei starker Krümmung die Fliehkraft eine Entlastung oder Belastung bewirkt. Da nun die Tiefenlage längs dx um $dx(J-i)$ abnimmt, muß



$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma(J - i)$$

sein, woraus

$$\frac{\gamma}{g} X - \frac{\partial p}{\partial x} = \gamma J$$

hervorgeht, und weiter als *Navier*sche Gleichung

$$\gamma J = \frac{\gamma}{g}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{75 a}$$

Für sehr breite rechteckige Gerinne hatte *Boussinesq* auf Grund der *Bazin*schen Beobachtungen gefunden, daß die Turbulenz ε überall gleich groß und zwar, daß bei einer Sohlengeschwindigkeit u_s

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{K}\sqrt{B}\,h\,u_s \tag{59}$$

sei. Dieser Wert verwandelt (75 a) in

$$\frac{1}{g}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = J + \frac{\sqrt{B}}{K}h\,u_s\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{75 b}$$

Bei Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

kann der letzte Klammerausdruck in

$$-u\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -u^2\frac{u\frac{\partial w}{\partial z} - w\frac{\partial u}{\partial z}}{u^2} = -u^2\frac{\partial\frac{w}{u}}{\partial z}$$

verwandelt werden und liefert die Einsetzung in (75 b)

$$-\frac{u^2}{g}\frac{\partial\frac{w}{u}}{\partial z} = J + \frac{\sqrt{B}}{K}h\,u_s\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{75 c}$$

Neben dieser Differentialgleichung (75 c) sind es die oben in *Boussinesqs* Ansatz für die Reibung besprochenen Randbedingungen[1])

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad p = 0 & \text{an der freien Oberfläche,} \\ \varepsilon\frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma B u_s^2 & \text{an der Sohle (vgl. (61 d)),} \end{array}\right. \tag{75 d}$$

welche bei der zu lösenden Aufgabe als gegeben zu betrachten sind. *Boussinesq* macht nun noch die Annahme,[2]) daß sich die Tangenten aller übereinander liegenden Stromfadenelemente einschließlich Spiegeltangente und Sohle im selben Punkte treffen. Algebraisch ausgedrückt lautet dies

$$\frac{w}{u} = \frac{z}{h}\frac{dh}{dx}, \tag{75 e}$$

oder differenziert, weil weder h noch $\frac{dh}{dx}$ von z abhängen,

---

1) Eaux courantes, Gl. (23), (24) u. (36). Obige Gl. (75 c) ist = Gl. (34) *Boussinesqs*.

2) Ebenda, Gl. (32).

$$\frac{\partial \frac{w}{u}}{\partial z} = \frac{1}{h}\frac{dh}{dx},$$

so daß (75c) auch

$$(75\,\mathrm{f}) \qquad -\frac{u^2}{g}\frac{1}{h}\frac{dh}{dx} = J + \frac{\sqrt{B}}{K} h u_s \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

geschrieben werden kann. Die weitere Ableitung besteht darin, aus dieser Gleichung J fortzuschaffen, dann $\frac{u}{u_s}$ und zuletzt das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeit, also $U:u_s$, aufzusuchen. Im einzelnen gestaltet sich der Vorgang folgendermaßen. Indem man auf beiden Seiten dasselbe Integral addiert, erhält man aus (75f)

$$-\frac{u_s^2}{gh}\frac{dh}{dx}\left(\frac{u^2}{u_s^2} - \int_0^h \frac{u^2}{u_s^2}\frac{dz}{h}\right) = J + \frac{1}{gh}\frac{dh}{dx}\int_0^h u^2 \frac{dz}{h} + \frac{\sqrt{B}}{K} h u_s \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

und nach Multiplikation beider Seiten mit dz und nachfolgender Integration zwischen den Grenzen 0 und z

$$(75\,\mathrm{g}) \qquad \begin{aligned} &-\frac{u_s^2}{gh}\frac{dh}{dx}\int_0^z \left(\frac{u^2}{u_s^2} - \int_0^h \frac{u^2}{u_s^2}\frac{dz}{h}\right) dz \\ &= \left(J + \frac{1}{gh}\frac{dh}{dx}\int_0^h u^2 \frac{dz}{h}\right) z + \frac{\sqrt{B}}{K} h u_s \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0^z. \end{aligned}$$

Bei dieser Integration ist $\int_0^h \frac{u^2}{u_s^2}\frac{dz}{h}$, weil ein bestimmtes Integral, als konstant zu betrachten, so daß die angegebene abermalige Integration einer Multiplikation mit z gleichkommt. Auch wird $\frac{\partial u}{\partial z}$ am Spiegel ($z=0$) zu Null, während an der Sohle gemäß (59) und (75d)

$$\frac{\sqrt{B}}{K} h u_s \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h} = -B u_s^2$$

wird. Dehnt man die Integration bis zur Grenze $z = h$ aus, so erhält man, weil die linke Seite zur Differenz zweier gleicher Integrale oder zu Null wird,

$$0 = \left(J + \frac{1}{gh}\frac{dh}{dx}\int_0^h u^2 \frac{dz}{h}\right) h - B u_s^2.$$

Durch Ersatz des Klammerausdruckes in (75g) resultiert[1])

$$-\frac{u_s^2}{gh}\frac{dh}{dx}\int_0^z \left(\frac{u^2}{u_s^2} - \int_0^h \frac{u^2}{u_s^2}\frac{dz}{h}\right) dz = B u_s^2 \frac{z}{h} + \frac{\sqrt{B}}{K} h u_s \frac{du}{dz},$$

1) Eaux courantes, Gl. (76), S. 89.

oder nach Multiplikation mit $\frac{K\,dz}{\sqrt{B}\,u_s^2}$ zwischen den Grenzen z und h wieder integriert,

$$(75\text{h})\quad \frac{u}{u_s} - 1 - \frac{K\sqrt{B}}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) = \frac{K}{\sqrt{B}\,g}\frac{dh}{dx}\int\limits_z^h \frac{dz}{h}\int\limits_0^z\left(\frac{u^2}{u_s^2} - \int\limits_0^h \frac{u^2}{u_s^2}\frac{dz}{h}\right)\frac{dz}{h}.$$

Das ist eine Gleichung für $\frac{u}{u_s}$, in der aber die Integrale der rechten Seite nur berechenbar sind, wenn man $\frac{u}{u_s}$ bereits kennt. Bei der gleichförmigen Bewegung wäre zufolge (62) die linke und daher auch die rechte Seite Null, und jedenfalls ist letztere eine recht kleine Größe. Man kann daher ihre Integrale genügend genau berechnen, wenn man in ihnen für $u : u_s$ dieselben Werte, wie bei der gleichförmigen Bewegung annimmt. Man hat dann

$$\frac{u^2}{u_s^2} = 1 + K\sqrt{B}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) + \frac{K^2B}{4}\left(1 - 2\frac{z^2}{h^2} + \frac{z^4}{h^4}\right),$$

$$\int\limits_0^h \frac{u^2}{u_s^2}\frac{dz}{h} = 1 + \frac{2}{3}K\sqrt{B} + \frac{2}{15}K^2B,$$

$$\frac{u^2}{u_s^2} - \int\limits_0^h \frac{u^2}{u_s^2}\frac{dz}{h} = K\sqrt{B}\left(\frac{1}{3} - \frac{z^2}{h^2}\right) + \frac{K^2B}{4}\left(\frac{7}{15} - 2\frac{z^2}{h^2} + \frac{z^4}{h^4}\right),$$

$$\int\limits_0^z\left(\frac{u}{u_s^2} - \int\limits_0^h \frac{u^2}{u_s^2}\frac{dz}{h}\right)\frac{dz}{h} = K\sqrt{B}\left(\frac{z}{3h} - \frac{z^3}{3h^3}\right)$$
$$+ \frac{K^2B}{4}\left(\frac{7}{15}\frac{z}{h} - \frac{2}{3}\frac{z^3}{h^3} + \frac{1}{5}\frac{z^5}{h^5}\right),$$

welcher Ausdruck nach Multiplikation mit $\frac{dz}{h}$ zwischen z und h integriert

$$K\sqrt{B}\left(\frac{1}{12} - \frac{z^2}{6h^2} + \frac{z^4}{12h^4}\right) + \frac{K^2B}{4}\left(\frac{1}{10} - \frac{7z^2}{30h^2} + \frac{z^4}{6h^4} - \frac{z^6}{30h^6}\right)$$

liefert. Man erhält also das Ergebnis

$$(75\text{i})\quad \begin{aligned} \frac{u}{u_s} &= 1 + \frac{K\sqrt{B}}{2}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \\ &+ \frac{K^2}{6g}\frac{dh}{dx}\left[\frac{1}{2} - \frac{z^2}{h^2} + \frac{z^4}{2h^4} + \frac{K\sqrt{B}}{20}\left(3 - 7\frac{z^2}{h^2} + 5\frac{z^4}{h^4} - \frac{z^6}{h^6}\right)\right]. \end{aligned}$$

Die mittlere Geschwindigkeit U ist offenbar $= \int\limits_0^h u\,dz : h$, kann daher aus (75 i) leicht gefolgert werden, und zwar zeigt sich

$$(76)\qquad \frac{U}{u_s} = 1 + \frac{K\sqrt{B}}{3} + \frac{2}{45}\frac{K^2}{g}\left(1 + \frac{2}{7}K\sqrt{B}\right)\frac{dh}{dx},$$

während bei gleichförmiger Bewegung $\frac{dh}{dx} = 0$ ist und das $\frac{dh}{dx}$ enthaltende Glied daher entfällt (vgl. Gl. (61d) und (62a)).

Aus (76) geht hervor, daß bei beschleunigt fließendem Wasser, d. i. bei negativem $\frac{dh}{dx}$, das Verhältnis $u_s : U$ wächst, also die Umfangsreibung Bu_s^2 größer als bei gleichförmiger Bewegung ausfällt. Die Berechnung dieser Zunahme kann wie folgt durchgeführt werden. Wird der *Chézy*sche Koeffizient c (aus 62a) eingeführt, so nimmt (76) die neue Form

$$\frac{U}{u_s} = \sqrt{B}c + \frac{2}{45}\frac{K^2}{g}\left(1 + \frac{2}{7}K\sqrt{B}\right)\frac{dh}{dx}$$

oder[1])

$$\frac{U}{c\sqrt{B} \cdot u_s} = 1 + \frac{2}{45}\frac{K^2}{g}\frac{1 + \frac{2}{7}K\sqrt{B}}{1 + \frac{1}{3}K\sqrt{B}}\frac{dh}{dx}$$

oder, wenn man wie in Gl. (63)

$$K = 44{,}55 \text{ m}^{1/2}\text{sec}^{-1}, \quad \sqrt{B} = \sqrt{0{,}00081} \text{ m}^{-1/2}\text{sec}$$

setzt,

$$\frac{U}{c\sqrt{B} \cdot u_s} = 1 + \frac{84{,}42}{g}\frac{dh}{dx} \tag{76a}$$

an. Bei geringer Neigung $\frac{dh}{dx}$ des Spiegels zur Sohle ist das zweite Glied der Summe klein genug, damit man statt (76a)

$$\frac{c\sqrt{B} \cdot u_s}{U} = 1 - \frac{84{,}42}{g}\frac{dh}{dx}, \quad \frac{Bc^2u_s^2}{U^2} = 1 - \frac{168{,}8}{g}\frac{dh}{dx}$$

schreiben kann, oder auch, weil $K = 44{,}55$ einem $c = 50 \text{ m}^{1/2}\text{sec}^{-1}$ entspricht,

$$Bu_s^2 = \frac{U^2}{c^2} - 0{,}0675\frac{U^2}{g}\frac{dh}{dx}.$$

Wegen der Gleichheit des Durchflusses Uh an allen Laufstellen ist

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{h}{U}\frac{dU}{dx}$$

und hiermit[2]) die Außenreibung in kg, welche auf h kg Wasser entfällt, wenn man h in m mißt,

$$Bu_s^2 = \frac{U^2}{c^2} + \beta h\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right) = \frac{U^2}{c^2} + 0{,}0675\,h\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right). \tag{76b}$$

Die in der Stromrichtung wirkende Teilkraft des Gewichtes eines kg Wassers kann genau genug mit

J

1) Eaux courantes, Formel 80, S. 91.

2) Ebenda, Formel 83[bis], S. 92.

angesetzt werden. Die Beschleunigung eines Wasserteilchens beträgt, wenn t die Zeit bedeutet,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u = \frac{1}{2} \frac{\partial (u^2)}{\partial x};$$

sie erfordert, wenn 1 kg in gleicher Höhe befindliche Teilchen betrachtet werden, eine beschleunigende Kraft

$$\frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial (u^2)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2g}\right).$$

Wenn nun das kg als lotrechte Säule, statt quer und wagrecht, verteilt wird, so beträgt die erforderliche Kraft, wie *Boussinesq*[1]) für zutreffend hält,

$$\text{(76c)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2g}\right) \cdot \frac{\int_0^h u^2\,dz}{h U^2} = (1+\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{2g}\right),$$

worin η bei der bekannten Geschwindigkeitsverteilung offenbar berechenbar und zwar $= 0{,}0176$ ist[2]). Das Gleichgewicht der Kräfte erfordert schließlich, daß

$$\text{(76d)} \qquad J = \frac{B u_s^2}{h} + (1+\eta)\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right) = \frac{U^2}{c^2 h} + (1+\beta+\eta)\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

sei, worin bei breitem, rechteckigem Querschnitt nach den angegebenen Zahlen

$$\text{(76e)} \qquad 1+\beta+\eta = 1{,}085,$$

während bei Röhren und Halbröhren, für die *Boussinesq* ähnliche Betrachtungen wie die dargelegten anstellt und eine Gleichung findet, die sich von (76d) nur dadurch unterscheidet, daß der Profilradius (Vierteldurchmesser) R an die Stelle von h zu setzen ist, sich

$$\text{(76f)} \qquad 1+\beta+\eta = 1{,}138$$

ergibt. Man kann für Querschnittsformen, wie sie im allgemeinen vorkommen, Mittelwerte nehmen und daher für sie[3])

$$\text{(76g)} \qquad J = \frac{U^2}{c^2 R} + 1{,}11\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

setzen, also wenn auch mit abweichender Begründung zur Formel (69) zurückkehren.

---

1) Eaux courantes, Formel S. 66.

2) Ebenda S. 86, Gl. (70), S. 112.

3) Ebenda S. 112. Vgl. *B. de Saint-Venant*, Des diverses manières de poser les équations du mouvement varié des eaux courantes, Ann. d. ponts et chauss. (6) 13 (1887), S. 148f.

50. Boussinesqs Staukurve bei gleichförmigem Sohlengefälle bei Berücksichtigung der Krümmung der Stromfäden. Gegenüber der vorhergehenden Ableitung für stationäre Strömung ist *Boussinesqs* Ableitung der genaueren Staugleichung durch die Annahme kompliziert, daß auch stärkere Krümmungen der Stromfäden zulässig sind. Dies läuft darauf hinaus, daß der Druck in dem zur Stromrichtung (der x-Richtung) senkrechten Querschnitt nicht mehr hydrostatisch verteilt ist, so daß (wenn die z nunmehr, da der Spiegel gekrümmt ist, von der unter i geneigten Sohle aufwärts gemessen werden) von den beiden *Navier*schen Gleichungen (s. oben Gl. (14g))

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = g \sin i - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g\varepsilon}{\gamma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -g \cos i - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g\varepsilon}{\gamma}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

auszugehen ist, die sich bei kleinem Sohlengefälle und geringer Geschwindigkeit w unter Berücksichtigung, daß die Geschwindigkeitsab- oder Zunahme in der Stromrichtung ziemlich gleichmäßig sein dürfte, zu (vgl. die Verwandlung von (75b) in (75c))

$$(77)\qquad \begin{cases} -\dfrac{u^2}{g}\dfrac{\partial \frac{w}{u}}{\partial z} = i - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\[2ex] \dfrac{u^2}{g}\dfrac{\partial \frac{w}{u}}{\partial x} = -1 - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

vereinfachen lassen[1]). Hierzu treten noch die bekannten Randbedingungen (75d). Indem man hier dieselbe geometrische Annahme wie zuvor macht, gilt Gl. (75e) abermals, trotz der verschiedenen Bedeutung von z, und obwohl $w:u$ nunmehr die Neigung gegen die Sohle bedeutet. Man hat wieder, weil h und $\frac{\partial h}{\partial x}$ wie früher nicht von z abhängen,

$$\frac{\partial \frac{w}{u}}{\partial z} = \frac{1}{h}\frac{dh}{dx},$$

ferner

$$\frac{\partial \frac{w}{u}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{z}{h}\frac{dh}{dx}}{\partial x} = \frac{z}{h}\frac{d^2 h}{dx^2}$$

und daher

$$(77\text{a})\qquad \begin{cases} -\dfrac{u^2}{g}\dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{dx} = i - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\[2ex] \dfrac{u^2}{g}\dfrac{z}{h}\dfrac{d^2 h}{dx^2} = -1 - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

1) Eaux courantes, Gl. (135).

Begeht man, um die Integration zu ermöglichen, die Ungenauigkeit den veränderlichen Wert von u durch den Mittelwert U zu ersetzen, so erhält man zunächst aus der zweiten Beziehung (77a)

$$\frac{dp}{\gamma} = -\frac{U^2}{g}\frac{z}{h}\frac{d^2h}{dx^2}dz - dz$$

und nach vollzogener Integration, wenn man bedenkt, daß an der Oberfläche, das ist für $z = h$, der Druck $p = 0$ sein muß,

$$\frac{p}{\gamma} = h - z + \frac{U^2}{g}\frac{d^2h}{dx^2}\frac{h^2 - z^2}{2h}.$$

Differenziert man nunmehr und vernachlässigt man die Produkte von $\frac{d^2h}{dx^2}$ ihrer Kleinheit wegen, so hat man

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dh}{dx} + \frac{U^2}{g}\frac{d^3h}{dx^3}\frac{h^2 - z^2}{2h},$$

wonach endlich aus der ersten Gl. (77a) $\frac{\partial p}{\partial x}$ fortgeschafft und diese in

$$-\frac{u^2}{g}\frac{1}{h}\frac{dh}{dx} = i - \frac{dh}{dx} - \frac{U^2}{g}\frac{d^3h}{dx^3}\frac{h^2 - z^2}{2h} + \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

verwandelt werden kann. Hier sind nur mehr u^2, z^2 und $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ Funktionen von z, so daß die Integration nach dz liefert

$$\text{(77b)} \quad -\frac{1}{gh}\frac{dh}{dx}\int^z u^2\,dz = iz - \frac{dh}{dx}z - \frac{U^2}{g}\frac{d^3h}{dx^3}\left(\frac{hz}{2} - \frac{z^3}{6h}\right) + \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial z} + \text{konst.}$$

Bei Ausdehnung der Integration über den ganzen Querschnitt von $z = 0$ bis $z = h$ wird $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}$ an der oberen Grenze zu Null und an der unteren zur Außenreibung, also das betreffende Glied gemäß (76b)

$$Bu_s^2 = \frac{U^2}{c^2} + \beta h\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right) = \frac{U^2}{c^2} + \frac{\beta U}{g}\frac{h\,dU}{dx},$$

wofür, weil Uh längs des Laufes sich nicht ändert, auch

$$\frac{U^2}{c^2} - \frac{\beta U}{g}\cdot\frac{U\,dh}{dx} = \frac{U^2}{c^2} - \frac{\beta U^2}{g}\frac{dh}{dx}$$

geschrieben werden kann. Desgleichen kann man wie zuvor in (76c)

$$\frac{1}{h}\int_0^h u^2\,dz = (1 + \eta)\,U^2$$

setzen und man erhält daher durch Einführung der Grenzen in (77b)

$$-\frac{1}{g}\frac{dh}{dx}(1 + \eta)\,U^2 = ih - h\frac{dh}{dx} - \frac{U^2}{g}\frac{h^2}{3}\frac{d^3h}{dx^3} - \frac{U^2}{c^2} + \frac{\beta U^2}{g}\frac{dh}{dx}$$

oder

$$\text{(77c)} \quad \begin{cases} h i - \dfrac{U^2}{c^2} = \left(h - \dfrac{1+\eta+\beta}{g} U^2\right)\dfrac{dh}{dx} + \dfrac{h^2 U^2}{3g}\cdot\dfrac{d^3h}{dx^3} \\ \qquad = \left(h - \dfrac{\alpha'}{g} U^2\right)\dfrac{dh}{dx} + \dfrac{h^2 U^2}{3g}\dfrac{d^3h}{dx^3}. \end{cases}$$

Dies ist *J. Boussinesqs* Endgleichung[1]), die bei Vernachlässigung der Spiegelkrümmung, d. h. des Differentialquotienten $\dfrac{d^3h}{dx^3}$, sich auf den alten Ausdruck (76 d) reduziert. Der Koeffizient α' hat in ihr den Mittelwert 1,11 (für breite Rechtecke allerdings den Wert 1,085).

Durch Multiplikation der Gl. (77c) mit h^2 und Ersatz von hU durch den Durchfluß q der Breiteneinheit des Wasserlaufes verwandelt man (77c) in

$$\text{(78)} \quad \left(h^3 - \frac{q^2}{c^2 i}\right) i = \left(h^3 - \frac{\alpha' q^2}{g}\right)\frac{dh}{dx} + \frac{h^2 q^2}{3g}\frac{d^3h}{dx^3}.$$

Wird nun die bei gleichförmiger Bewegung herrschende Tiefe

$$\text{(78a)} \quad h_0 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{c^2 i}}$$

und die Größe

$$\text{(78b)} \quad k = \sqrt[3]{\frac{\alpha' q^2}{g}} = h_0 \sqrt[3]{\frac{\alpha' i c^2}{g}}$$

eingeführt, so gewinnt (78) die der Gl. (74a) entsprechende Form

$$\text{(78c)} \quad (h^3 - h_0^3)\, i = (h^3 - k^3)\frac{dh}{dx} + \frac{h^2 q^2}{3g}\frac{d^3h}{dx^3}.$$

Boussinesq knüpft seine Ausführungen an die Annahme, daß das Verhältnis $h : h_0$ wenig von 1 verschieden sei, sonach statt des letzten Gliedes von (78c)

$$\frac{h^3 q^2}{3g h_0}\frac{d^3h}{dx^3} = \frac{h^3 h_0^2 c^2 i}{3g}\frac{d^3h}{dx^3}$$

gesetzt werden könne, sich also (78c) in

$$\frac{3g}{c^2 h_0^2}\left(1 - \frac{h_0^3}{h^3}\right) = \frac{3\alpha'}{h_0^2}\left(\frac{g}{c^2\alpha' i} - \frac{h_0^3}{h^3}\right)\frac{dh}{dx} + \frac{d^3h}{dx^3}$$

oder in

$$\text{(78d)} \quad \frac{3g}{c^2 h_0^2}\,\frac{h^3 - h_0^3}{h^3} = \frac{3\alpha'}{h_0^2}\left(\frac{g}{c^2\alpha' i} - 1 + \frac{h^3 - h_0^3}{h^3}\right)\frac{dh}{dx} + \frac{d^3h}{dx^3}$$

verwandeln lasse. Hierin ist gemäß Voraussetzung

$$\frac{h^3 - h_0^3}{h^3} = \frac{h - h_0}{h}\cdot\frac{h^2 + h h_0 + h_0^2}{h^2} \quad \text{nahezu} \quad \frac{3(h - h_0)}{h_0},$$

so daß die weitere Änderung in

$$\text{(78e)} \quad \frac{9g}{c^2 h_0^2}\cdot\frac{h - h_0}{h_0} = \frac{3\alpha'}{h_0^2}\left(\frac{g}{c^2\alpha' i} - 1 + 3\frac{h - h_0}{h_0}\right)\frac{dh}{dx} + \frac{d^3h}{dx^3}$$

---

1) Eaux courantes, Gl. (156), S. 192.

statthaft ist. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, daß i wesentlich kleiner oder wesentlich größer als $\frac{g}{c^2 \alpha'}$ sei, so wird das Glied $3 \frac{h - h_0}{h_0}$ vernachlässigbar und (78e) vereinfacht sich zu

$$\text{(78f)} \qquad \frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{3\alpha'}{h_0^2}\left(1 - \frac{g}{c^2 \alpha' i}\right)\frac{dh}{dx} - \frac{9g}{c^2 h_0^3}(h - h_0) = 0 .$$

Boussinesq berücksichtigt nun noch, daß die Formel $U = c\sqrt{RJ}$ eigentlich nicht genau gilt, sondern bei wachsender Tiefe mehr Wasser fließt, als ihr entspräche, und er ist der Ansicht, daß man dem dadurch Rechnung tragen könne, daß man dem letzten Gliede von (78f) einen Faktor

$$f = \text{ungefähr } 1{,}1$$

beifügt, also

$$\text{(78g)} \qquad \frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{3\alpha'}{h_0^2}\left(1 - \frac{g}{c^2 \alpha' i}\right)\frac{dh}{dx} - \frac{9gf}{c^2 h_0^3}(h - h_0) = 0$$

schreibt. Die allgemeine Lösung[1]) von (78g) lautet

$$\frac{h - h_0}{h_0} = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x},$$

worin m_1, m_2 und m_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$m^3 - \frac{3\alpha'}{h_0^2}\left(1 - \frac{g}{c^2 \alpha' i}\right) m - \frac{9gf}{c^2 h_0^3} = 0$$

bilden. Auf Grund dieser Lösung findet nun *Boussinesq*, daß man die betrachteten Wasserläufe in *zwei Gattungen* scheiden kann, je nachdem

$$\text{(78h)} \qquad \begin{cases} i < \frac{g}{c^2 \alpha'}\left(1 - \frac{3}{\alpha'}\left(\frac{gf}{c^2}\right)^{2/3}\right) & \text{oder} \quad i < 0{,}0033, \\ i > \frac{g}{c^2 \alpha'}\left(1 + \frac{3}{\alpha'}\left(\frac{gf}{c^2}\right)^{2/3}\right) & \text{oder} \quad i > 0{,}0039 \end{cases}$$

ist.

Im ersteren Falle geschehe der Übergang *von der ungleichförmigen zur gleichförmigen Bewegung durch aufeinanderfolgende Wellen gleicher Länge, aber stromab abnehmender Höhe,* der entgegengesetzte Übergang *ohne* Wellung. Die halbe Wellenlänge betrage

$$l = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{9gf}{h_0^3 m_1} - \frac{m_1^2}{4}}},$$

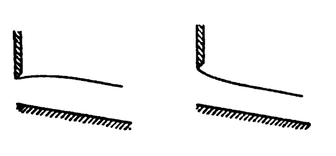
worin[2])

$$m_1 = \sqrt[3]{\frac{9gf}{9c^2 h_0^3} + \sqrt{\left(\frac{9gf}{9c^2 h_0^3}\right)^2 + \left[\frac{\alpha'}{h_0^2}\left(1 - \frac{g}{c^2 \alpha' i}\right)\right]^3}}.$$

1) Eaux courantes, Gl. (169), S. 198.

2) Eaux courantes, S. 200.

Im zweiten Fall *stelle sich* die *gleichförmige Bewegung stromab allmählich* ein und *höre* durch einen Sprung *plötzlich auf*[1]).



Nach dem S. 144 Gesagten sind demnach die Wasserläufe der ersten Gattung, bei denen ein Wehr eine sanfte Stauung hervorruft, als *Flüsse* (*rivières*), solche der zweiten, bei denen ein Sprung eintritt, als *Wildbäche* (*torrents rapides*) zu bezeichnen.

Für zwischenliegende Gefälle, nämlich für

$$i > \frac{g}{c^2\alpha'} \cdot \left(1 - \frac{3}{\alpha'}\left(\frac{fg}{c^2}\right)^{2/3}\right), \quad \text{d. h.} > 0{,}0033$$

und

$$i < \frac{g}{c^2\alpha'} \cdot \left(1 + \frac{3}{\alpha'}\left(\frac{fg}{c^2}\right)^{2/3}\right), \quad \text{d. h.} < 0{,}0039,$$

also für i nahezu gleich $\frac{g}{c^2\alpha'}$, darf das Glied $-3\frac{h-h_0}{h_0}$ in (78e) nicht mehr vernachlässigt werden. Dafür wird, wenn z. B. $i = \frac{g}{c^2\alpha'}$ ist, $k = h_0$ (siehe 78b) und aus Gl. (78c)

$$(79) \qquad (h^3 - h_0^3)\,i = (h^3 - h_0^3)\frac{dh}{dx} + \frac{h^2q^2}{3g}\frac{d^3h}{dx^3},$$

wobei wieder ähnlich wie in (78d)

$$h^3 - h_0^3 = 3h^2(h - h_0)$$

gesetzt werden kann. Damit geht (79) in[2])

$$(79\text{a}) \qquad \frac{q^2}{3g}\frac{d^3h}{dx^3} = -3(h - h_0)\left(\frac{dh}{dx} - i\right)$$

über. An den Stellen, wo $\frac{dh}{dx}$ vernachlässigbar ist, gilt dann

$$\frac{q^2}{3g}\frac{d^3h}{dx^3} = 3(h - h_0)\,i$$

oder, wie die Integration des letzten Ausdruckes lehrt,

$$(79\text{b}) \qquad \frac{q^2}{3g}\frac{d^2h}{dx^2} = 3i\int(h - h_0)\,dx,$$

wonach der Spiegel hier seine Hohlseite abwärts bzw. aufwärts kehrt, je nachdem $h < h_0$ oder $h > h_0$ ist. Der Spiegel beschreibt also eine Anzahl von Bögen entgegengesetzten Sinnes oder eine Wellenlinie.

Boussinesq unterzieht auch die in Rede stehenden Wasserläufe, deren Gefälle zwischen dem der Flüsse und dem der Wildbäche liegt, und für die sich die Bezeichnung *Achen* (*torrents de pente moderée*) eignet,

1) Ebenda S. 208.

2) Ähnlich Eaux courantes, Gl. (191), S. 212.

einer eingehenden Betrachtung unter der Voraussetzung, daß $\frac{c^2\alpha' i}{g}$ ein wenig größer als 1 sei, und er weist nach, daß auch dann der Übergang von der gleichförmigen in die ungleichförmige Bewegung durch stufenförmig aufeinander folgende Wellen erfolgt. Die ersten derselben[1]) erheben sich um etwas mehr als

$$h_0\left(\frac{c^2\alpha' i}{g}-1\right)=h_0\left(\frac{i}{0{,}0036}-1\right)$$

über die verlängerte Spiegellinie der gleichförmigen Bewegung und gleichen, von ihren Talsohlen abgesehen, Einzelwellen (solche sollen weiter unten zur Behandlung gelangen), die sich in einem Kanale von $\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}=h_0\sqrt[3]{\frac{c^2 i}{g}}=$ etwa $6{,}34\sqrt[3]{i}$ Tiefe fortpflanzen. Der Höhenabstand der Wellenbasen von der Achsensohle nehme zwischen der n^{ten} und der $n+1^{\text{ten}}$ Welle um

$$(80)\qquad h\sqrt{\frac{16 f i\sqrt{c^2 i}}{\sqrt{3g}}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt[4]{\gamma_0}$$
$$=\text{im Mittel } 12{,}7\, h_0\sqrt{i\sqrt{i\gamma_0}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

zu, wobei $\gamma_0=\frac{c^2\alpha' i}{g}-1$ zu verstehen ist und f dieselbe Bedeutung wie in Gl. (78g) hat. Übrigens gelte dies nur, solange der absolute Wert von $\frac{h-h_0}{h_0}$ noch klein im Vergleiche zu γ_0 bleibe.

Die Senkung des Achenspiegels, wenn sich das Wasser einem Stufenabsturz nähert, geschieht in einfacherer Weise, denn wenn $\frac{dh}{dx}$ negativ und $h<h_0$ ist, muß gemäß (79a) auch $\frac{d^3h}{dx^3}$ negativ sein, oder, weil dies der Differentialquotient von $\frac{d^2h}{dx^2}$ ist, $\frac{d^2h}{dx^2}$ beständig abnehmen. Ist also $\frac{d^2h}{dx^2}$ einmal negativ, so bleibt es negativ, wonach auch $\frac{dh}{dx}$ ständig abnehmen, d. h. in negativem Sinne wachsen muß. Die Spiegelneigung nimmt also stromab bis zur Absturzstelle fortdauernd zu.

Boussinesq betont[2]), daß seine Untersuchungen mit *Bazins* Beobachtungen vollständig im Einklang stehen. Bildete der Versuchskanal eine Ache, in der der gestaute Spiegel sich allmählich von der Sohle entfernte, so war er immer durch Wellen gefurcht, wogegen das Wasser bei wildbachartigem Lauf plötzlich in die Höhe sprang. Freilich folgten auf die Wasserschwelle, von welcher stromab das Wasser eben nicht

1) Eaux courantes, S. 216.
2) Eaux courantes, S. 216.

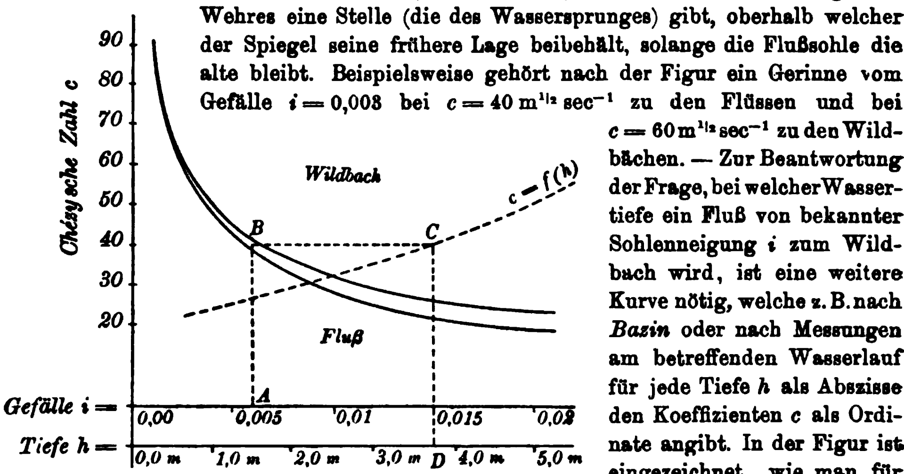
mehr wild war, meist eine Anzahl Wellungen. Ein einfacher Kieselstein könne in kleinen Rieseln beiderlei Spiegelgestalten erzeugen, nämlich Wellen stromauf, mit Hilfe welcher das Wasser das Hindernis überschreitet, dann stromab am Ende des steilen Abschusses einen von Schaum gekrönten Wassersprung.

Bemerkt sei schließlich, daß *Boussinesq* die c-Werte überschätzt, daher *die Grenzgefälle zu klein ausrechnet.*

Trägt man [1]) als Ordinaten die Werte von c, als Abszissen die von

$$i = \frac{g}{c^2 \alpha}\left\{1 \mp \frac{3}{\alpha'}\left(\frac{g f}{c^2}\right)^{2/3}\right\}$$

auf, so erhält man die Grenzkurven, welche sofort erkennen lassen, ob ein Wasserlauf „Fluß“, „Ache“ oder „Wildbach“ ist, ob es also bei Errichtung eines Wehres eine Stelle (die des Wassersprunges) gibt, oberhalb welcher der Spiegel seine frühere Lage beibehält, solange die Flußsohle die alte bleibt. Beispielsweise gehört nach der Figur ein Gerinne vom Gefälle $i = 0{,}003$ bei $c = 40\,\mathrm{m}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$ zu den Flüssen und bei $c = 60\,\mathrm{m}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$ zu den Wildbächen. — Zur Beantwortung der Frage, bei welcher Wassertiefe ein Fluß von bekannter Sohlenneigung i zum Wildbach wird, ist eine weitere Kurve nötig, welche z. B. nach *Bazin* oder nach Messungen am betreffenden Wasserlauf für jede Tiefe h als Abszisse den Koeffizienten c als Ordinate angibt. In der Figur ist eingezeichnet, wie man für $i = 0{,}005$ durch den Linienzug $ABCD$ die Tiefe 3,75 m als entscheidend findet.



51. Boussinesqs Staukurve bei wechselndem Sohlengefälle. Spiegel bei gewellter Sohle. Auch bei gekrümmter Sohle gelten, wenn man die Geschwindigkeit u parallel zur Sohlentangente und die Geschwindigkeit w sowie die Ordinate z senkrecht zur Sohlentangente, und zwar letztere wieder von der Sohle aufwärts, mißt, die Gleichungen

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{u^2}{g}\frac{\partial \frac{w}{u}}{\partial z} &= i - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\ \frac{u^2}{g}\frac{\partial \frac{w}{u}}{\partial x} &= -1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

Bewegt man sich senkrecht zur Sohle, so ändert sich unter der alten

1) *F. Schaffernak,* bisher unveröffentlicht.

Voraussetzung, daß Spiegel, Stromfäden und Sohle sich in einem Punkte treffen, die Gleichung

(81) $$\frac{\partial \frac{w}{u}}{\partial z} = \frac{1}{h}\frac{dh}{dx}$$

nicht. Geht man aber von einem Schnitt zum nächsten, also von der Stelle x zu $x + dx$ über, so sind die beiden z (und w) nicht mehr parallel, sondern haben die kleine Neigung di gegeneinander, wonach es gestattet ist,[1])

$$\frac{\partial \frac{w}{u}}{\partial z} = \frac{\partial \frac{z}{h}\frac{dh}{dx}}{\partial x} - \frac{di}{dx} = \frac{z}{h}\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{di}{dx}$$

zu setzen. Dadurch werden die Beziehungen (77 a) nunmehr zu

(81 a) $$\begin{cases} -\dfrac{u^2}{g}\dfrac{1}{h}\dfrac{dh}{dx} = i - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \dfrac{u^2}{g}\left(\dfrac{z}{h}\dfrac{d^2h}{dx^2} - \dfrac{di}{dx}\right) = -1 - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Die Ungenauigkeit, den veränderlichen Wert u, durch den Mittelwert U in der zweiten Gleichung (81 a) zu ersetzen, verwandelt letztere in

$$\frac{dp}{\gamma} = -\frac{U^2}{g}\left(\frac{z}{h}\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{di}{dx}\right)dz - dz.$$

Man erhält, wenn man integriert und bedenkt, daß an der Oberfläche, das ist für $z = h$, der Druck p Null sein muß (vgl. S. 153),

$$\frac{p}{\gamma} = h - z + \frac{U^2}{g}\frac{d^2h}{dx^2}\frac{h^2 - z^2}{2h} - \frac{U^2}{g}\frac{di}{dx}(h - z),$$

und wenn man jetzt nach x differenziert und die Produkte von $\frac{d^2h}{dx^2}$ ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt,

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dh}{dx} + \frac{U^2}{g}\frac{d^3h}{dx^3}\frac{h^2 - z^2}{2h} - \frac{U^2}{g}\frac{d^2i}{dx^2}(h - z).$$

Führt man diesen Wert von $\frac{\partial p}{\partial x}$ in die erste Gl. (77) ein, so hat man bei Berücksichtigung von (81 a)

$$-\frac{u^2}{g}\frac{1}{h}\frac{dh}{dx} = i - \frac{dh}{dx} - \frac{U^2}{g}\frac{d^3h}{dx^3}\frac{h^2 - z^2}{2h} + \frac{U^2}{g}\frac{d^2i}{dx^2}(h - z) + \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{dz^2}$$

und bei Integration nach dz weiter

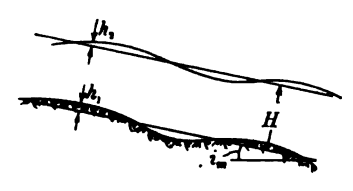
(81 b) $$-\frac{1}{gh}\frac{dh}{dx}\int u^2 dz = iz - \frac{dh}{dx}z - \frac{U^2}{g}\frac{d^3h}{dx^3}\left(\frac{hz}{2} - \frac{z^3}{6h}\right) + \frac{U^2}{g}\frac{d^2i}{dx^2}\left(hz - \frac{z^2}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{du}{dz} + \text{konst.}$$

1) Eaux courantes, S. 181, 182.

Nunmehr kann man die auf (77 b) folgende Betrachtung wörtlich wiederholen und erhält dadurch die sich von (77 c) nur durch das Vorhandensein eines von $\frac{d^2 i}{dx^2}$ abhängigen Gliedes unterscheidende Gleichung[1])

$$hi - \frac{U^2}{c^2} = \left(h - \frac{\alpha'}{g} U^2\right)\frac{dh}{dx} + \frac{h^2 U^2}{3g}\frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{h^2 U^2}{2g}\frac{d^2 i}{dx^2}. \tag{81 c}$$

Aus (81 c) läßt sich ableiten, was für eine Gestalt der Spiegel annimmt, wenn der *Boden eine Wellenlinie* bildet. Eine gewisse, diese Kurve schneidende Gerade stellt dabei die mittlere Sohle dar, parallel zu der sich im Abstande H eine zweite Gerade als mittlerer Spiegel erstreckt. Die Erhebungen von Sohle bzw. Spiegel über diese beiden Geraden sollen mit h_1 bzw. h_2 und das Gefälle der Geraden soll mit i_m bezeichnet werden, derart, daß die Tiefe



$$h = H + h_2 - h_1, \tag{82}$$

$$i = i_m - \frac{dh_1}{dx} \tag{82 a}$$

ist. Aus (82) und (82 a) folgt durch Differentiation

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh_2}{dx} - \frac{dh_1}{dx}, \tag{82 b}$$

$$\frac{d^3 h}{dx^3} = \frac{d^3 h_2}{dx^3} - \frac{d^3 h_1}{dx^3}, \tag{82 c}$$

$$\frac{d^2 i}{dx^2} = -\frac{d^3 h_1}{dx^3}. \tag{82 d}$$

Nun läßt sich (81 c) auch schreiben

$$\frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{3}{2}\frac{d^2 i}{dx^2} + 3\left(\frac{gh}{U^2 h^2} - \frac{\alpha'}{h^2}\right)\frac{dh}{dx} - \frac{3ghi}{U^2 h^2} + \frac{3g}{c^2 h^2} = 0,$$

oder bei Berücksichtigung von (82) bis (82 d)

$$\frac{d^3 h_2}{dx^3} - \frac{d^3 h_1}{dx^3} + \frac{3}{2}\frac{d^3 h_1}{dx^3} + \frac{3gh}{U^2 h^2}\frac{dh_2}{dx} - \frac{3\alpha'}{h^2}\frac{dh_2}{dx} - \frac{3gh}{U^2 h^2}\frac{dh_1}{dx} + \frac{3\alpha'}{h^2}\frac{dh_1}{dx}$$
$$- \frac{3gh}{U^2 h^2} i_m + \frac{3gh}{U^2 h^2}\frac{dh_1}{dx} + \frac{3g}{c^2 h^2} = 0,$$

oder

$$\frac{d^3 h_2}{dx^3} + \frac{1}{2}\frac{d^3 h_1}{dx^3} + 3\left(\frac{gh}{U^2 h^2} - \frac{\alpha'}{h^2}\right)\frac{dh_2}{dx} + \frac{3\alpha'}{h^2}\frac{dh_1}{dx}$$
$$- \frac{3gh}{U^2 h^2} i_m + \frac{3g}{c^2 h^2} = 0. \tag{82 e}$$

1) Eaux courantes, Gl. (156), S. 192.

Hierin ist Uh der Durchlauf der Breiteneinheit, welcher, da an den ungewellten Strecken die Geschwindigkeit $c\sqrt{Hi_m}$ herrschen muß, $cH^{3/2}i_m^{1/2}$ beträgt. Wird dieser Ausdruck in (82 c) eingeführt und in den Faktoren, mit denen die kleinen Differentialquotienten $\frac{dh_2}{dx}$ und $\frac{dh_1}{dx}$ multipliziert erscheinen, behufs Vereinfachung h mit H vertauscht, so entsteht die neue Gleichung

$$(82\,\mathrm{f})\qquad \frac{d^3h_2}{dx^3}+\frac{1}{2}\frac{d^3h_1}{dx^3}+3\left(\frac{g}{c^2H^2i_m}-\frac{\alpha'}{H^2}\right)\frac{dh_2}{dx}+\frac{3\alpha'}{H^2}\frac{dh_1}{dx}$$
$$=\frac{3gh}{c^2H^3}-\frac{3g}{c^2h^2}=3g\frac{h^3-H^3}{c^2H^3h^2}=3g\frac{(H+h_2-h_1)^3-H^3}{c^2H^3h^2},$$

und letzteres ist näherungsweise

$$=3g\frac{H^3+3H^2(h_2-h_1)-H^3}{c^2H^3H^2}=\frac{9g(h_2-h_1)}{c^2H^3}.$$

Boussinesq nimmt noch durch Beigabe eines Faktors $f =$ ungefähr 1,1 Rücksicht darauf, daß c nicht ganz konstant ist, und findet[1])

$$(82\,\mathrm{g})\qquad \frac{d^3h_2}{dx^3}-\frac{3\alpha'}{H^2}\left(1-\frac{g}{\alpha'c^2i_m}\right)\frac{dh_2}{dx}-\frac{9fgh_2}{c^2H^3}$$
$$=-\left[\frac{1}{2}\frac{d^3h_1}{dx^3}+\frac{3\alpha'}{H^2}\frac{dh_1}{dx}+\frac{9fgh_1}{c^2H^3}\right],$$

wobei c den für die Tiefe H geltenden Wert zu erhalten hat. Mit $\alpha' = 1{,}1$, $g = 9{,}81\ \mathrm{m\,sec^{-2}}$, $c = 50\ \mathrm{m^{1/2}sec^{-1}}$, $f = 1{,}1$ nimmt (82 g) die Gestalt

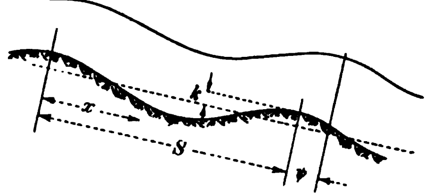
$$(82\,\mathrm{h})\qquad \frac{d^3h_2}{ds^3}-\frac{3{,}3}{H^2}\left(1-\frac{0{,}0036}{i_m}\right)\frac{dh_2}{dx}-0{,}0388\frac{h_2}{H}$$
$$=-\left[0{,}5\frac{d^3h_1}{dx^3}+\frac{3{,}3}{H^2}\frac{dh_1}{dx}+0{,}0388\frac{h_1}{H^3}\right]$$

an.

Für einen nach einer Sinuslinie gewellten Boden gilt

$$(83)\qquad h_1 = K\cos\frac{2\pi x}{S},$$

wobei K den halben Höhenunterschied zwischen Wellenscheitel und Wellental und S die ganze Wellenlänge bezeichnet. Es läßt sich überblicken, daß die Lösung der Differentialgleichung (82 g) oder (82 h) dann auf eine Sinuskurve von h führt, welche dieselbe Wellenlänge S wie die Sohlenlinie besitzt. Bezüglich des näheren muß auf die Quelle[2])



1) Eaux courantes, Gl. (203), S. 220. 2) Ebenda S. 223 f.

verwiesen werden. Daselbst wird gezeigt, daß dem h_1 der Gleichung (83) Spiegelerhebungen und Senkungen

(83 a) $$h_2 = K_1 \cos \frac{2\pi(x+s)}{S}$$

entsprechen, wobei

(83 b) $$K_1 = K\sqrt{\frac{1+E_1^2}{1+E^2}}, \quad \operatorname{tang} \frac{2\pi s}{S} = \frac{E_1 - E}{1+EE_1}$$

ist und E und E_1 die Bedeutung haben

(83 c) $$\begin{cases} E = \frac{\alpha' c^2}{3fg}\left[1 - \frac{g}{\alpha' c^2 i_m} + \frac{4\pi^2}{8\alpha'}\frac{H^2}{S^2}\right]\frac{2\pi H}{S}, \\ E_1 = \frac{\alpha' c^2}{3fg}\left[1 - \frac{2\pi^2}{3\alpha'}\frac{H^2}{S^2}\right]\frac{2\pi H}{S}, \end{cases}$$

oder für $c = 50\, m^{\frac{1}{2}}\sec^{-1}$

(83 d) $$\begin{cases} E = 529\left(1 - \frac{0{,}0086}{i_m} + 12\frac{H^2}{S^2}\right)\frac{H}{S}, \\ E_1 = 529\left(1 - 6\frac{H^2}{S^2}\right)\frac{H}{S}. \end{cases}$$

Gemäß (83 a) haben die Spiegelwellen die Amplitude K_1; dabei liegen sie, wenn s positiv ist, um eine Strecke s vor den Sohlenwellen, haben z. B. ihre Scheitel im Abstand s stromauf von den Sohlenscheiteln. Für den Sonderfall, daß $E = E_1$ wäre, verschwände nach (83 b) dieser Abstand und würde zugleich $K_1 = K$, lägen also Spiegel und Sohle kongruent mit den einander entsprechenden Punkten übereinander. Dann würde überall dieselbe Tiefe h herrschen. Gleichung (83 c) zeigt nun, daß $E = E_1$ wird, wenn

$$-\frac{g}{\alpha' c^2 i_m} + \frac{4\pi^2}{8\alpha'}\frac{H^2}{S^2} = -\frac{2\pi^2}{3\alpha'}\frac{H^2}{S^2}$$

oder

$$\frac{g}{c^2 i_m} = 2\pi^2 \frac{H^2}{S^2}$$

ist, daß also eine Wellenlänge

(83 e) $$S = 2\pi H c\sqrt{\frac{i_m}{2g}} = 1{,}42\, Hc\sqrt{i_m}$$

oder ein mittleres Gefälle

(83 f) $$i_m = \text{ungefähr } \frac{S^2}{2H^2c^2}$$

gleichförmige Tiefe zur Folge hat.[1]) Je nachdem $i_m \gtrless \frac{S^2}{2H^2c^2}$ ist, wird $E \gtrless E_1$, und hiermit nach (83 b) s negativ oder positiv, d. h. liegen die Spiegelwellen stromab oder stromauf von den Sohlenwellen. Für

1) Eaux courantes, S. 226.

$i_m = 0$, also über ruhendem Wasser muß offenbar der Spiegel eben sein; damit steht es im Einklange, daß hierfür der Ausdruck $E = \infty$ somit nach (83 b) $K_1 = 0$ wird. Wächst dann das Gefälle i_m, so nimmt E ab, wodurch das Verhältnis $K_1 : K$ der beiden Amplituden zunimmt, bis nach (83 d) für

$$1 - \frac{0{,}0036}{i_m} + 12\frac{H^2}{S^2} = 0$$

oder

$$i_m = \frac{0{,}0036}{1 + 12\frac{H^2}{S^2}} \tag{83 g}$$

E zu Null wird und hiermit K_1 sein Maximum $K\sqrt{1 + E_1{}^2}$ oder etwa $K\sqrt{1 + 280000\left(1 - 6\frac{H^2}{S^2}\right)^2 \frac{H^2}{S^2}}$ erreicht. Bei noch stärkerer mittlerer Sohlenneigung i_m wird dann K_1 wieder langsam kleiner, ohne je auf den Grenzwert

$$K\sqrt{\frac{1 + \left[529\left(1 - 6\frac{H^2}{S^2}\right)\frac{H}{S}\right]^2}{1 + \left[529\left(1 + 12\frac{H^2}{S^2}\right)\frac{H}{S}\right]^2}} = \text{ungefähr } K\,\frac{1 - 6\frac{H^2}{S^2}}{1 + 12\frac{H^2}{S^2}}$$

sinken zu können, der erst einem unendlich großen i_m entsprechen würde.

VII. Mit der Zeit veränderliche Strömung.

52. Veränderliche Strömung bei Berücksichtigung der Reibung. Man kann annehmen, daß, wenn Wasser mit Beschleunigung strömt[1]), die Überwindung der Reibung an den Wandungen ungefähr dieselbe Arbeit wie bei der stationären Bewegung erfordert, das heißt, daß in einem Gerinne vom Profilradius R für die Streckenlänge dx auf jede Gewichtseinheit Wasser eine Reibungsarbeit

$$\frac{U^2}{c^2 R}dx$$

entfällt. Dabei vermehrt die um dx fortschreitende Gewichtseinheit ihre lebendige Kraft um

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial U^2}{\partial x}dx + \frac{1}{2g}\frac{\partial U^2}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}dx = \left(\frac{1}{2g}\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{1}{U}\right)dx.$$

Da nun bei einem Oberflächengefälle J bei Durchschreitung der Strecke dx

1) Die mit dem Ort veränderliche Bewegung wird im Französischen als mouvement varié, die mit der Zeit veränderliche als mouvement non permanent bezeichnet.

jedes Wasserteilchen unter eine um Jdx tiefere Spiegelstelle gelangt, muß für die nicht stationäre Bewegung die Grundgleichung

$$J = \frac{U^2}{c^2 R} + \frac{1}{2g}\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} \tag{84}$$

gelten. Berücksichtigt man die ungleiche Verteilung der Geschwindigkeit über den Querschnitt, so hätte man entsprechend Gl. (69) noch die beiden letzten Glieder mit etwa 1,1 zu multiplizieren.

Eine nicht ganz strenge, aber doch genauere, allerdings etwas langwierige Betrachtung stellt *J. Boussinesq* [1]) an, der zu dem nur wenig abweichenden Ausdruck

$$J = \frac{U^2}{c^2 R} + \frac{2\alpha - 1 - \eta}{2g}\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{1 + 2\eta}{g}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g}\frac{U}{R}\frac{\partial R}{\partial t} \tag{84a}$$

gelangt. Es haben nämlich η und α die Mittelwerte [2]) 0,023 und 1,068 und es ist für breite Rechtecke (vgl. oben S. 151)

$$\eta = \frac{4}{5}\left(\frac{U_{\max}}{U} - 1\right)^2 = 0{,}0176, \qquad \alpha = 1 + 3\eta - \frac{2}{7}\eta\sqrt{5\eta} = 1{,}051.$$

Die Gl. (84 a) nimmt daher im Mittel die Form

$$J = \frac{U^2}{c^2 R} + \frac{1{,}11}{2g}\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{1{,}05}{g}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{0{,}022}{g}\frac{U}{R}\frac{\partial R}{\partial t} \tag{84b}$$

und für breite Rechtecke von der Tiefe h die Form

$$J = \frac{U^2}{c^2 h} + \frac{1{,}08}{2g}\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{1{,}04}{g}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{0{,}015}{g}\frac{U}{h}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{84c}$$

an, wobei sowohl in (84 b) wie in (84 c) das letzte Glied überhaupt vernachlässigbar ist.

In zweiter Annäherung berücksichtigt *Boussinesq* [3]) auch die *Krümmung* der Wasserfäden und kommt damit zu einer Strömungstheorie, die sich zur vorhergehenden so wie seine genauere zu seiner einfachen Stautheorie verhält. Als Ausgangspunkt dienen für breite rechteckige Querschnitte von der Tiefe h die beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - u^2 \frac{\partial \frac{w}{u}}{\partial z}\right) &= i - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{1}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u^2 \frac{\partial \frac{w}{u}}{\partial x}\right) &= -1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{84d}$$

mit den entsprechenden Randbedingungen, und die Integration wird mit der Annahme gemacht, daß in den Gliedern, in denen die Krümmung

1) Eaux courantes, S. 261, Théorie 2, S. 7 f.
2) Eaux courantes, S. 86, 112, Théorie 2, Gl. 37, S. 25.
3) Eaux courantes, S. 299 ff. (§ 28).

zum Ausdruck kommt, die tatsächliche Geschwindigkeit u durch die mittlere U ersetzt werden darf. Damit wird u. a.

$$\frac{w}{u} = \frac{z}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{U}\frac{\partial h}{\partial t}\right),$$

und die Endgleichung lautet

$$J = \frac{U^2}{c^2 h} + \frac{2\alpha - 1 - \eta}{2g}\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{1 + 2\eta}{g}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g}\frac{U}{h}\frac{\partial h}{\partial t}$$
$$+ \frac{(1 + 2\eta)h U^2}{3g}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{U}\frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{U^2}\frac{\partial^3 h}{\partial x \partial t^2}\right),$$

in der im letzten Summand der rechten Seite die Krümmung dadurch ihren Ausdruck findet, daß nebst dem Krümmungsgliede der Gl. (77 c) der Stautheorie noch die beiden nachfolgenden erscheinen.

53. Fortpflanzung von kleinen Anschwellungen auf fließendem Wasser ohne Berücksichtigung der Krümmung der Stromfäden. Die für die veränderliche Strömung angegebenen Endgleichungen gestatten eine mit den Versuchen gut übereinstimmende Behandlung der Fortpflanzung von *kleinen* Anschwellungen.[1]) Vorausgesetzt werde ein breites Gerinne von ursprünglich gleichmäßiger Tiefe H, in welchem vor der Anschwellung die mittlere Geschwindigkeit U herrschte, welches also die Sohlenneigung $i = \frac{U^2}{c^2 H}$ besitzt. Beträgt später die Tiefe $H + h$ und die Geschwindigkeit $U + U_1$, so verwandelt sich, da offenbar das Spiegelgefälle

$$J = i - \frac{\partial h}{\partial x}$$

wird, (84 a) in

$$i - \frac{\partial h}{\partial x} = i + \frac{2\alpha - 1 - \eta}{g}(U + U_1)\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1 + 2\eta}{g}\frac{\partial U_1}{\partial t}$$
$$- \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g}\frac{U + U_1}{H + h}\frac{\partial h}{\partial t}$$

oder, wenn U_1 neben U und h neben H vernachlässigt wird, in

$$-\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{2\alpha - 1 - \eta}{g}U\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1 + 2\eta}{g}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g}\frac{U}{H}\frac{\partial h}{\partial t} = 0,$$

woraus durch Differentiation nach x

$$(85) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2\alpha - 1 - \eta}{g}U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1 + 2\eta}{g}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} - \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g}\frac{U}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = 0$$

entsteht. Die Kontinuität gibt, ebenfalls bei Vernachlässigung von U_1 neben U, sowie von h neben H

1) Vgl. *J. Boussinesq,* Eaux courantes, S 283 ff. (§ 27) und Théorie 2, S. 22 ff.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial [(U+U_1)(H+h)]}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + H\frac{\partial U_1}{\partial x} + U\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

oder

(85 a) $$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{1}{H}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{U}{H}\frac{\partial h}{\partial x},$$

woraus durch Differentiation

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - \frac{U}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{U}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}$$

hervorgeht. In (85) eingesetzt geben diese Ausdrücke die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{3\alpha - 1 - \eta}{g}\frac{U}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - \frac{2\alpha - 1 - \eta}{g}\frac{U^2}{H}\frac{\partial^2 h}{dx^2} - \frac{1+2\eta}{g}\frac{1}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

oder

(85 b) $$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{3\alpha - 1 - \eta}{1+2\eta}U\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - \frac{gH - (2\alpha - 1 - \eta)U^2}{1+2\eta}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0.$$

Diese Differentialgleichung wird durch

(85 c) $$h = F(x - \omega t)$$

erfüllt, wo F eine *beliebige* Funktion bedeutet und ω eine Wurzel der Gleichung

(85 d) $$\omega^2 - \frac{3\alpha - 1 - \eta}{1+2\eta}U\omega - \frac{gH - (2\alpha - 1 - \eta)U^2}{1+2\eta} = 0$$

sein muß. Um dies nachzuweisen, werde (85c) differenziert, wodurch sich

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\omega F', \quad \frac{\partial h}{\partial x} = F'$$

und bei abermaliger Differentiation

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \omega^2 F'', \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = \omega F'', \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = F''$$

ergibt. Diese Werte verwandeln, in (85 b) eingesetzt, (85 b) in

$$\omega^2 + \frac{3\alpha - 1 - \eta}{1+2\eta}U\omega - \frac{gH - (2\alpha - 1 - \eta)U^2}{1+2\eta} = 0$$

also tatsächlich in die Gleichung (85 d), wie behauptet wurde. Hiernach stellt (85 c) eine Lösung dar mit

(85 e) $$\omega = \frac{3\alpha - 1 - \eta}{2(1+2\eta)}U \pm \sqrt{\frac{(3\alpha - 1 - \eta)^2 U^2}{4(1+2\eta)^2} + \frac{gH - (2\alpha - 1 - \eta)U^2}{1+2\eta}}$$

oder

$$\omega = \frac{3\alpha - 1 - \eta}{2(1+2\eta)}U\left(1 \pm \frac{\sqrt{(3\alpha-1-\eta)^2 - 4(1+2\eta)(2\alpha-1-\eta) + 4(1+2\eta)\frac{gH}{U^2}}}{3\alpha - 1 - \eta}\right)$$

oder in breiten Gerinnen, in denen $\alpha = 1{,}051$, $\eta = 0{,}0175$ ist, mit

$$(85\,\mathrm{f}) \qquad \omega = 1{,}049\,U\left(1 \pm \frac{\sqrt{0{,}069 + 4{,}140\,\frac{gH}{U^2}}}{2{,}135}\right) = 1{,}049\,U \pm \sqrt{0{,}017\,U^2 + 1{,}00\,gH}.$$

Die Bedeutung von (85 c) ist nun die, daß, wenn die Erhebung h an der Stelle x zur Zeit t einen bestimmten Wert hat, derselbe Wert an der Stelle $x + \omega\Delta t$ zur Zeit $t + \Delta t$ wiederkehrt, denn es ist

$$F[(x + \omega \cdot \Delta t) - \omega(t + \Delta t)] = F[x - \omega t].$$

Die Erhebung h durchläuft also in der Zeit Δt einen Weg $\omega \cdot \Delta t$, d. h. sie wandert mit der Schnelligkeit[1] ω stromab.

Nach (85 e) sind zwei Lösungen vorhanden, von denen die eine $\omega > U$, die andere $\omega < U$ gibt, von denen also die eine die Wanderung mit dem Strom, die andere die Wanderung gegen den Strom betrifft. Allein auch letztere liefert noch eine positive Schnelligkeit ω, wenn in (85 e) der zweite Bruch unter dem Wurzelzeichen negativ ist. Erst wenn

$$(85\,\mathrm{g}) \qquad (2\alpha - 1 - \eta)\,U^2 > gH \quad \text{oder} \quad > g\,\frac{U^2}{c^2 i}$$

ist, können Wellen nicht mehr stromauf laufen, also für

$$i > \frac{g}{c^2(2\alpha - 1 - \eta)} \quad \text{oder} \quad i > \frac{g}{1{,}084\,c^2}.$$

Oben ist gefunden worden, daß die Scheidegrenze zwischen Flüssen und Wildbächen (vgl. 78 h) ungefähr bei einem Gefälle $\frac{g}{c^2\alpha'} = \frac{g}{1{,}085\,c^2}$ (vgl. (76 e)) liegt. *Kleine Anschwellungen vermögen daher nur in Flüssen und nicht in Wildbächen stromauf zu laufen.*

Aus $\frac{\partial h}{\partial t} = -\omega F'$ sowie $\frac{\partial h}{\partial x} = F'$ und der Kontinuitätsbedingung (85 a) geht

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\omega F'}{H} - \frac{UF'}{H} = \frac{\omega - U}{H}F' = \frac{\omega - U}{H} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

hervor, worin nicht nur U und H (die Geschwindigkeit und Spiegelhöhe vor der Anschwellung), sondern auch die Schnelligkeit ω (vgl. z. B (85 e)) konstant sind. Diese Gleichung ist daher integrabel und gibt

$$U_1 = \frac{\omega - U}{H}h + \text{konst.}$$

---

[1] Wie im folgenden soll nach dem Vorbilde *de Saint-Venants* die Geschwindigkeit von Erscheinungen — wie es z. B. Wellen, Schwingungen, Tiefen sind — mit Schnelligkeit (celerité) bezeichnet werden zum Unterschied der Geschwindigkeit wirklicher Stoffe wie Wasser, Schwimmkörper, Luft.

oder, weil für eine Anschwellung $h = 0$ auch die Zusatzgeschwindigkeit U_1 verschwinden muß,

$$U_1 = \frac{\omega - U}{H} h. \tag{85 h}$$

In (84 c) ist vorausgesetzt worden, daß die Geschwindigkeitsverteilung von der der gleichförmigen Strömung nur *wenig* abweiche. Auch für den Fall, daß dies nicht zutreffe, leitet *Boussinesq* einen Ausdruck ab, der, wie hier nicht näher bewiesen werden soll,

$$\omega = U \pm \sqrt{gH} + \frac{4}{5}\left[2 \pm \left(\frac{U}{2\sqrt{gH}} - \frac{\sqrt{gH}}{U}\right)\right]\frac{(u_{max} - U^2)}{U} - \frac{8}{35}\left(3 \pm \frac{H}{\sqrt{gH}}\right)\frac{(u_{max} - U)^3}{U^2} \tag{85 i}$$

lautet. Er [1]) führt weiter Versuche von *H. Bazin* an, welcher [2])

$$\begin{aligned} H &= 0{,}110 \quad 0{,}150 \quad 0{,}235 \text{ m},\\ U &= 3{,}785 \quad 2{,}744 \quad 3{,}481 \text{ m sec}^{-1},\\ u_{max} &= 5{,}51 \quad 3{,}49 \quad 4{,}55 \text{ m sec}^{-1},\\ \omega &= 6{,}25 \quad 4{,}32 \quad 5{,}75 \text{ m sec}^{-1} \end{aligned}$$

beobachtete. Die Formel (85 i) gebe die hiermit gut stimmenden Werte $\omega = 6{,}51 \; 4{,}33 \; 5{,}59$, während der später zu erwähnende Ausdruck (88) *Scott-Russels* $\omega = U + \sqrt{gH}$, in welchem (85 i) für $u_{max} = U$ übergeht, die stark abweichenden Schnelligkeiten $\omega = 4{,}82 \; 3{,}96$ und $5{,}00$ liefere.

54. Veränderliche Strömung bei Berücksichtigung der Krümmung der Stromfäden, aber Vernachlässigung der Reibung (Wellenfortschritt). Bisher wurde auf die Krümmung der Wasserfäden, also auf die *Form* der Welle bei Betrachtung der nicht stationären Strömung, keine Rücksicht genommen. Nunmehr soll dies geschehen [3]) und zur Vereinfachung zunächst angenommen werden, daß die Wassermasse sich ursprünglich in Ruhe befand und dabei die Tiefe H hatte. Dann werde eine Wellenbewegung durch Einguß erzeugt, und zwar eine Bewegung, die nur nach einer bestimmten Richtung fortschreite, so daß es genüge, einen Streifen des Laufes, welcher Streifen die Breite 1 quer zur Laufrichtung habe, zu betrachten. Bei einer rasch über die betrachtete Stelle ziehenden Welle ist die *Reibung vernachlässigbar.* Mit dieser Vereinfachung gelten hier die *Euler*schen Gleichungen (7)

1) Théorie, 2, S. 25.
2) Paris, C. R. 100 (1885), S. 1492.
3) *A. Flamant,* Hydraulique, 2. éd., S. 418.

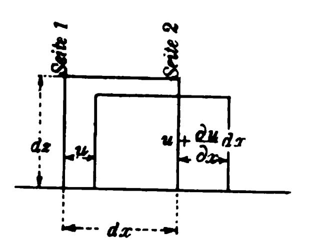
$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\gamma}{g}u',$$

$$\gamma - \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\gamma}{g}w'$$

(wo u' und w' die vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit bezeichnen), also

(86) $$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} = -u', \quad \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} = g - w',$$

wozu noch die Kontinuitätsbedingung kommt. Betrachtet man ein Volumelement dx, dz, so verlangt die Erhaltung des Volumens, daß eine Ausdehnung in der Längsrichtung x durch ein Einschrumpfen in der Höhenrichtung z ausgeglichen werde. Wenn nun die aufrechte Seite 1 sich mit der Geschwindigkeit u bewegt, so schreitet die im Abstande dx von ihr stehende Seite 2 mit der Geschwindigkeit $u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$ voran, so daß in der Zeiteinheit die Längsänderung der liegenden Seiten $\frac{\partial u}{\partial x}dx$ beträgt, während die Höhe sich in analoger Weise um $\frac{\partial w}{\partial z}dx$ ändert. Die neue Fläche hat daher die Größe



$$\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)\cdot\left(dz + \frac{\partial w}{\partial z}\,dx\right)$$

und da sie der ursprünglicheu $dx\,dz$ gleich sein muß, ergibt sich bei Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung

(86a) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Auch auf die Veränderung einer Wassersäule läßt sich die Kontinuitätsbetrachtung ausdehnen. Wenn die mittlere Geschwindigkeit einer Wassersäule mit U, ferner die Erhebung über den ursprünglichen Spiegel mit h bezeichnet wird, so beträgt in der Zeiteinheit die Dehnung in der x-Richtung, welche eine Säule von der Dicke dx erfährt, im Mittel $\frac{\partial U}{\partial x}dx$ und ihre Höhenänderung in der Zeiteinheit

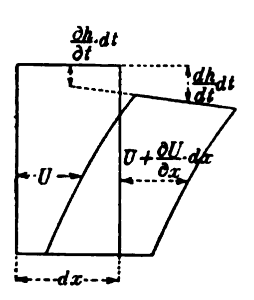
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Die Unveränderlichkeit der Fläche führt also zu der Beziehung

$$(H+h)\,dx = \left(H + h + \frac{\partial h}{\partial t} + U\frac{\partial h}{\partial x}\right)\left(dx + \frac{\partial U}{\partial x}dx\right)$$

oder bei Vernachlässigung der kleinen Glieder höherer Ordnung

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (H+h)\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$



und, wenn h klein genug ist, zu

(86b) $$\frac{\partial h}{\partial t} + H\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Um p aus (86) fortzuschaffen, werde die zweite jener Gleichungen von $z = z$ bis $z = H + h$, das ist bis zur Stelle, wo der Druck $p = 0$ ist, integriert. Man erhält also

$$\frac{g}{\gamma}p = \frac{g}{\gamma}\int_z^{H+h}\frac{\partial p}{\partial z}dz = g\int_z^{H+h}dz + \int_z^{H+h}w'dz = g(H+h-z) + \int_z^{H+h}w'dz.$$

Hier kann w aus (86a) entnommen werden, da nach (86a)

$$dw = -\frac{\partial u}{\partial x}dz$$

und demnach, wenn u mit U vertauscht wird,

$$w = -z\frac{\partial U}{\partial x}$$

ist, worin $\frac{\partial U}{\partial x}$ nach (86b) ausdrückbar, so daß sich

(86c) $$w = \frac{z}{H}\frac{\partial h}{\partial t}$$

zeigt. Der Differentialquotient $\frac{\partial h}{\partial t}$ stellt die lotrechte Geschwindigkeitskomponente der Spiegelpunkte dar und (86c) besagt, daß die lotrechten Geschwindigkeitskomponenten der Punkte der nämlichen Wassersäule den Abständen z von der Sohle proportional sind. Aus (86c) geht weiter durch Differentiation nach der Zeit t

$$w' = \frac{z}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

hervor. Wird das in den schon für den Druck p gefundenen Ausdruck eingesetzt, so erhält man

$$\frac{g}{\gamma}p = g(H+h-z) + \frac{1}{H}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\int_z^{H+h}z\,dz = g(H+h-z) + \frac{(H+h)^2 - z^2}{2H}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

oder bei teilweiser Vernachlässigung der Erhebung h gegenüber der ursprünglichen Tiefe H

$$\frac{g}{\gamma}p = g(H+h-z) + \frac{H^2 - z^2}{2H}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}.$$

Zwecks Anwendung auf die erste Gleichung (86) ist dies nach x zu

differenzieren, wobei sich, weil z von x unabhängig ist, für die Beschleunigung in der x-Richtung

$$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} = -u' = g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^3 h}{\partial x\,\partial t^2}\,\frac{H^2 - z^2}{2H}$$

ergibt. Der Mittelwert von u', der durch Überstreichen gekennzeichnet werden möge, ist offenbar

$$\overline{u'} = -\int_0^{H+h} u'\,dz : (H+h),$$

wonach

$$\overline{u'} = \frac{-\left(g\frac{\partial h}{\partial x}z\right)_0^{H+h} - \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x\,\partial t^2}\cdot\frac{H^2 z - \frac{z^3}{3}}{2H}\right)_0^{H+h}}{H+h}$$

oder angenähert

(86d) $$\overline{u'} = -g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{H}{3}\,\frac{\partial^3 h}{\partial x\,\partial t^2}$$

gilt. Andererseits geht aus der Bedeutung von u' oder

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

hervor, wenn man bei der Geringfügigkeit der lotrechten Geschwindigkeiten w diese vernachlässigt und man dann die mittlere Geschwindigkeit U für die Einzelgeschwindigkeit u setzt, daß näherungsweise

$$\overline{u'} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x}$$

ist, wonach in Verbindung mit (86d) sich

(86e) $$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{H}{3}\,\frac{\partial^3 h}{\partial x\,\partial t^2} = 0$$

zeigt. Hier läßt sich an Stelle der Zeit t die Schnelligkeit ϖ der Welle einführen, das heißt die Schnelligkeit, mit der jene Ordinate weiterwandert, von der der Schwall immer die gleiche Fläche beibehält — wobei diese Ordinate nicht etwa mit der materiellen Wassersäule selbst zu verwechseln ist[1]. Da der Schwall in der Zeiteinheit von der Anfangslage der Ordinate aus hiernach um ϖh wächst, erfordert sein Vorrücken eine Wasserströmung

$$(H+h)\cdot U$$

und gilt

(86f) $$U = \frac{\varpi h}{H+h}.$$

1) Es sei ausdrücklich bemerkt, daß *Boussinesq* unter ϖ jenen Schwallinhalt selbst und nicht dessen Schnelligkeit versteht.

Für eine ihre Form nicht ändernde Welle wäre ferner ϖ mit der Schnelligkeit aller abwärtswandernden Erscheinungen identisch und würde daher gelten

$$h = F(x - \varpi t), \quad U = F_1(x - \varpi t),$$

woraus

$$\frac{dh}{dx} = F', \quad \frac{dh}{dt} = -\varpi F', \quad \frac{d^2h}{dx^2} = F'', \quad \frac{d^2h}{dt^2} = \varpi^2 F''$$

oder

$$\frac{dh}{dt} = -\varpi \frac{dh}{dx}, \quad \frac{d^2h}{dt^2} = \varpi^2 \frac{d^2h}{dx^2} \tag{86g}$$

und analog

$$\frac{dU}{dt} = -\varpi \frac{dU}{dx}$$

hervorginge. Nun ist die Wellenformänderung der Welle gering, so daß die Ausdrücke (86g) trotz des nicht ganz zutreffenden ϖ beibehalten werden können[1]). Man erhält so durch Einsetzen in (86e)

$$-\varpi \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{H}{8} \varpi^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\varpi U - \frac{U^2}{2} - gh - \frac{H\varpi^2}{8} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Nun wird der Klammerausdruck an den ungestörten Stellen des Wasserlaufes, wo h und $U = 0$ sind, auch gleich 0 und da die letzte Gleichung eine Unveränderlichkeit besagt, besagt sie zugleich, daß überhaupt

$$\varpi U - \frac{U^2}{2} - gh - \frac{H\varpi^2}{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$$

ist. Durch Einsetzen des Wertes von U aus (86f) folgt

$$\frac{\varpi^2 h}{H+h} - \frac{\varpi^2 h^2}{2(H+h)^2} - \frac{\varpi^2 H}{3} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = gh$$

oder

$$\varpi^2 \left(1 - \frac{h}{2(H+h)} - \frac{H(H+h)}{3h} \frac{d^2h}{dx^2}\right) = g(H+h)$$

oder angenähert

$$\varpi^2 \left(1 - \frac{h}{2H} - \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{hx^2}\right) = g(H+h)$$

oder mit abermaliger Ungenauigkeit

$$\varpi^2 = g(H+h)\left(1 + \frac{h}{2H} + \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{dx^2}\right) = g\left[H + 3\frac{h}{2} + \frac{h^2}{2H} + \left(\frac{H^3}{3h} + \frac{H^2}{3}\right)\frac{d^2h}{dx^2}\right]$$

oder ungefähr

$$\varpi^2 = gH\left[1 + \frac{3}{2}\frac{h}{H} + \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{dx^2}\right] \tag{86h}$$

1) Einen strengen Beweis *Boussinesqs* veröffentlichte *Flamant* in seiner Hydraulique, 2. éd., Paris 1900, S. 422 f., Fußnote.

oder schließlich wieder mit Annäherung

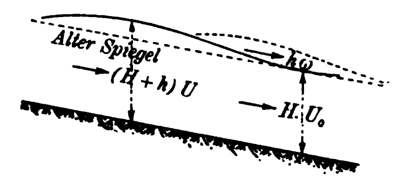
$$(86\text{i})\qquad \varpi = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{H} + \frac{H^2}{6h}\frac{d^2h}{dx^2}\right).$$

Ist das Wasser nicht ursprünglich in Ruhe, sondern besitzt es von vorneherein eine mittlere Geschwindigkeit U_0, so tritt diese zur Schnelligkeit hinzu, und gilt dann die zuerst von *Boussinesq* abgeleitete Gleichung[1])

$$(86\text{j})\qquad \varpi - U_0 = \pm\sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{H} + \frac{H^2}{6h}\frac{d^2h}{dx^2}\right).$$

Sie besagt, daß der *Überschuß der Schwallschnelligkeit ϖ über der mittleren Strömungsgeschwindigkeit seinem absoluten Betrage nach gleich der Endgeschwindigkeit eines durch die halbe Gerinnetiefe frei fallenden Körpers ist, vermehrt um drei Viertel des Produktes aus dieser Endgeschwindigkeit in das Verhältnis der Überhöhung h zur ursprünglichen Tiefe H und um ein Sechstel des Produktes derselben Endgeschwindigkeit in das durch die Überhöhung geteilte und mit der Spiegelkrümmung vervielfachte Quadrat der Tiefe.*

Die mittlere Geschwindigkeit U an der Stelle x kann nunmehr unter Berücksichtigung der ursprünglichen Stromgeschwindigkeit U_0 aus der Kontinuitätsforderung bestimmt werden[2]). In der Zeiteinheit fließt dem *Kopfe* der Welle die Menge $(H+h)U$ zu, während nur HU_0 weiterfließt. Der Unterschied von Zu- und Abfluß muß dem Raume gleich sein, der — ursprünglich frei — in der Zeiteinheit von der vorschreitenden Welle mit Wasser erfüllt wird, das heißt, es muß



$$(87)\qquad (H+h)U - HU_0 = h\varpi$$

oder

$$(87\text{a})\qquad U = \frac{HU_0 + h\varpi}{H+h}$$

sein. Hierbei ist ϖ die Schnelligkeit der Ordinate, jenseits welcher der Schwall den Inhalt Null besitzt.

1) Eaux courantes (Gl. 289 bis), S. 358. Journ. d. math. (3) 9 (1883), S. 273. Für sehr kleine Anschwellung, verschwindende Krümmung wird (86 i) zur Formel $\omega = \sqrt{gH}$ von *J. L. de Lagrange*, Mécanique analytique, 2. partie, sect. 11, § 2 (37) und Berlin, Mém. de l'académie royale 1786 (erschienen 1788), S. 192f. Ihre Prüfung kann für gewaltige Abmessungen durch die Beobachtung seismischer Seewellen erfolgen, vgl. *J. Boussinesq*, Paris C. R. 98 (1884), S. 1251; *C. Davison*, Phil. Mag. (5) 43 (1897), S. 33 zeigte, daß die Meerestiefe etwas $> \omega^2 : g$ ist.

2) Ebenda S. 359—361.

Die Formel (86j) wurde von *H. L. Partiot*[1]) an der Gironde-Garonne durch Untersuchung der dortigen Flutwelle geprüft und bestätigt gefunden; dabei war aber allerdings das letzte, von der Krümmung herrührende Glied verschwindend klein.

55. Unveränderlichkeit der Energie eines Schwalles. Folgen für seine Formänderung. Die *potentielle Energie* einer Anschwellung[2]), die durch Einguß von Wasser entstanden gedacht werde, beträgt in einem Streifen von der Breite 1, wenn die Erhebung an der Stelle x mit h bezeichnet wird, da der Schwerpunkt jedes Wassersäulchens in der Höhe $\frac{h}{2}$ über dem Ruhespiegel liegt, $\int \frac{\gamma h}{2} dx$. Man kann sich auch das gesamte Gewicht Q des Schwalles in seinem Schwerpunkt vereinigt denken, so daß, wenn dieser sich in der Höhe ζ über dem Ruhespiegel befindet, auch $Q\zeta$ die potentielle Energie vorstellt. Die potentielle Energie bedeutet im betrachteten Falle die Arbeit, die das Wasser verrichten kann, ehe es zur Ruhe kommt.

Die *Bewegungsenergie* oder lebendige Kraft der Masse beträgt, wenn in allen Punkten einer Senkrechten die gleiche wagrechte Geschwindigkeit U herrscht — da die lotrechten Geschwindigkeiten unbedeutend sind — bei einer Breite 1, wie bei Berücksichtigung von (86f) hervorgeht,

$$\text{(87b)} \qquad \frac{\gamma}{2g}\int (H+h)\,U^2\,dx = \frac{\gamma}{2g}\int \varpi^2 \frac{h^2}{H+h}\,dx,$$

worin nach (86h) ϖ^2 nicht viel größer als $g(H+h)$ ist, so daß als Bewegungsenergie $\frac{\gamma}{2}\int h^2 dx$ resultiert, das ist derselbe Ausdruck, der für die potentielle Energie gilt. Die beiden Energiegattungen sind also in ziemlich gleicher Menge vorhanden und die *Gesamtenergie* ist doppelt so groß wie jede Einzelenergie[3]).

Wenn nun von den Reibungen abgesehen wird, kann die Gesamtenergie sich nicht vermindern, da dann weder an den festen Grenzflächen Arbeit verrichtet, noch zwischen den einzelnen Teilchen mechanische Energie in Wärme verwandelt wird. Ändert sich aber die Gesamtenergie nicht mit der Zeit, so kann dies die halb so große potentielle Energie auch nicht tun, und so muß, da die über dem Ruhespiegel befindliche Wassermasse Q ihre Größe nicht ändern kann, der Schwerpunkt auch seine ursprüngliche Höhe ζ bewahren. Dabei ist aber nicht gesagt, daß

1) *H. L. Partiot,* Recherches sur les rivières à marée, Paris 1901, S. 33.
2) Die Darstellung folgt *A. Flamant,* Hydraulique, 2. éd., S. 428f.
3) *Boussinesq,* Eaux courantes, S. 367.

Q nur aus positiven Teilchen bestehen muß, und so verhindert die Unveränderlichkeit der Schwerpunktshöhe nicht ein Verflachen der Welle. Denn diese kann sich in abwechselnd positive und negative Tiefe zerlegen, deren algebraische Summe konstant bleibt, während die Einzelschwerpunkte sich teils senken, teils heben.

Wird ein Schwall dadurch erzeugt, daß man am Anfang eines söhligen Kanales ein Stück durch ein Schütz abtrennt und im abgetrennten Teil einen höheren Wasserstand herstellt, dann plötzlich das Trennungsschütz zieht, so weist die Einzelwelle zunächst einen flachen Rücken BC und zwei stark gekrümmte Enden AB und CD auf. Die Fortpflanzungsschnelligkeit des Rückens beträgt, weil er flach ist, gemäß (86i)

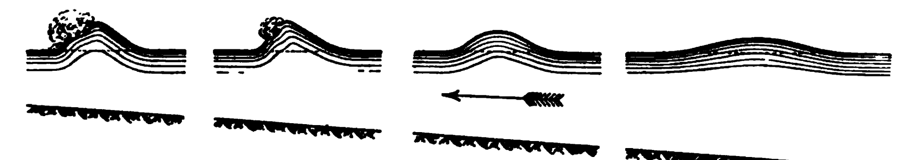
$$\varpi = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{H}\right),$$

während am Ende AB die Krümmung $\frac{d^2h}{dx^2}$, weil negativ, eine um

$$\sqrt{gH}\,\frac{H^2}{6h}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

kleinere Schnelligkeit bewirkt. Dadurch trennt sich, wenn der höher gefüllte Kanalteil lang genug war, die Wellenschleppe ab, und löst sich die Urwelle in kleinere Wellen auf, wie dies *J. Scott-Russell* beobachtet und beschrieben hat[1]).

Aus (86i) geht ferner hervor, daß auf aufsteigendem Grund, also bei abnehmendem H, die Wellenteile vorne — in der Wanderrichtung — langsamer laufen als rückwärts, wodurch sich die Vorderseiten der



Versuch von Bazin auf ansteigendem Grund.

Wellen immer steiler aufrichten und die Wellen brechen, wenn sie eine Stelle erreichen, an der die ursprüngliche Wassertiefe nach *Bazin* nur mehr wenig größer als die Wellenhöhe oder nach *J. Scott-Russell* ihr gleich ist[2]).

1) Report of the 14th meeting of the British Association held at York 1844, London 1845, S. 323, Tafel 47.

2) *H. Darcy* und *H. Bazin*, Recherches Hydraulique 2, Paris 1865, S. 24, Tafel 2; Report of the 7th meeting of the British Association held at Liverpool 1837, London 1838, S. 425. — Siehe auch unten S. 199.

56. Dauerform der Einzelwelle. Wellen beliebiger Form sind infolge der ungleichen Geschwindigkeit ihrer Teile nicht haltbar; sie werden daher durch eine Dauerform überlebt, welche *J. Scott-Russell*[1]) „*the great primary wave of translation*" — die große Hauptwanderwelle — nannte, wobei der Ausdruck translation darauf hinweisen soll, daß zum Unterschied von den oszillierenden Wellen in der Translationswelle ein wirkliches Wandern des Wassers, wenn auch nur über eine kurze Laufstrecke, stattfindet, indem die einzelnen Wassersäulen etwas vorrücken. Diese Welle, die er übrigens auch als *solitary*, also als Einzelwelle bezeichnete, entdeckte *Scott-Russell* im Jahre 1834. Er beobachtete, wie ein von Pferden gezogener Kahn in einem engen und seichten Kanal einen heftig bewegten Wasserschwall vor sich herschob, der beim plötzlichen Stillstand des Kahnes allein weitereilte und eine deutliche runde Form annahm, die er anscheinend beim Fortschritt nicht änderte; *Scott-Russell* konnte, weil beritten, den Schwall, der seine Geschwindigkeit wie es schien beibehielt, noch ein oder zwei englische Meilen verfolgen, bis dieser sich in den Windungen des Kanals verlor. Er stellte später Versuche an, durch welche er die Wellenschnelligkeit[2]), welche in diesem Falle auch als Schnelligkeit aller Umrißpunkte aufgefaßt werden kann,

$$\omega = \sqrt{2gH_s} \tag{88}$$

fand, worin H_s die Höhe des gehobenen Spiegels über dem Schwerpunkt des durch die Hebung vergrößerten Querschnitts bedeutet. Bei einem rechteckigen Gerinne gibt das z. B.

$$\omega = \sqrt{g(H+h)}, \tag{88 a}$$

worin H und h die alte Bedeutung haben. Da der Beginn der Bewegung bei dem Durchgang der Einzelwelle den Wasserspiegel nur unbedeutend verändert, benutzte *Scott-Russell*[3]) die Spiegelung einer Flamme durch die Wasseroberfläche, um deren geringste Bewegung zu entdecken. Eine weitere Hilfe war es ihm, daß der Schwall, wenn er an eine Abschlußwand stößt, von ihr zurückgeworfen wird. So konnte der Genannte, als er eine 6,3 m lange Rinne benutzte, dieselbe Einzelwelle bis zu 60 mal

1) Report of the 7 th. meeting of the British Association 1837, London 1838, S. 429.

2) Ebenda, S. 424 u. Report of the 14 th. meeting, S. 343, Beschreibung der Entdeckung, S. 319. Die Ableitung der Formel rührt von *G. Green*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 6 (1837), S. 457 her.

3) Report of the 7 th. meeting, S. 433. Versuche von *C. Herschel* in einem breiten Kanal von 4 bis 6 m Tiefe gaben ω nur wenig kleiner als nach Gl. (88 a) z. B. $\omega = 5{,}88$ statt $6{,}32\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$; Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 4 (1875), S. 192.

zurückwerfen lassen und dabei beobachten! Wenn die Welle[1]) in seichteres bzw. tieferes Wasser kommt, so verlangsamt oder beschleunigt sie sich gemäß Gleichung (88), wobei zugleich ihre Länge wechselt, nämlich proportional der Tiefe bleibt, während ihre Höhe sich im entgegengesetzten Sinne ändert. Die in Flußmündungen wandernde Flutwelle identifiziert *Scott-Russell* mit der Einzelwelle, was insofern zutrifft, als sich die Schnelligkeitsgesetze für beide Wellen gleichen, während die Formen beider Wellen verschieden sind.

Die Dauerform[2]) der Einzelwelle wird, wie schon angedeutet, durch die Forderung allenthalben gleicher Schnelligkeit bestimmt, oder gemäß (86 i) durch die Differentialgleichung

$$\omega = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{H} + \frac{H^2}{6h}\frac{d^2h}{dx^2}\right)$$

oder durch

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{6h}{H^2}\left(\frac{\omega}{\sqrt{gH}} - 1\right) - \frac{9}{2}\frac{h^2}{H^3} = \frac{3}{2H^3}(2h_1 h - 3h^2),$$

worin

$$h_1 = 2H\left(\frac{\omega}{\sqrt{gH}} - 1\right) \tag{89}$$

eine konstante Größe bedeutet. Durch beidseitige Multiplikation der letzten Differentialgleichung mit $2\frac{dh}{dx}$ erhält man

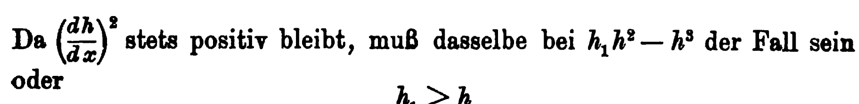
$$2\frac{dh}{dx}\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{3}{H^3}(2h_1 h - 3h^2)\frac{dh}{dx},$$

oder nach Integration dieses Ausdruckes

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3}{H^3}(h_1 h^2 - h^3) + \text{konst.},$$

oder, weil für $h = 0$, wo der Spiegel keine Wellung zeigt, auch $\frac{dh}{dx} = 0$ zu sein hat,

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3}{H^3}(h_1 h^2 - h^3). \tag{89a}$$



Da $\left(\frac{dh}{dx}\right)^2$ stets positiv bleibt, muß dasselbe bei $h_1 h^2 - h^3$ der Fall sein oder

$$h_1 \geqq h$$

sein. Sonach bedeutet h_1 den größten Wert von h oder die Erhebung des Wellenscheitels über dem ursprünglichen Spiegel. Da zudem jedem

1) Report of the 14 th. meeting, S. 319.

2) *J. Boussinesq*, Eaux courantes, S. 380 f.

Wert von h nach (89 a) zwei entgegengesetzte von $\frac{dh}{dx}$ entsprechen, ist der Schwallumriß symmetrisch zur Scheitelsenkrechten. Seine Gleichung lautet, wie die Integration von (89 a) lehrt, aber hier nicht näher ausgeführt werden soll,

$$(89\,\text{b}) \qquad h = \frac{4h_1}{e^{\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-\omega t)} + 2 + e^{-\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-\omega t)}} = \frac{2h_1}{1 + \operatorname{cof}\sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x-\omega t)}.$$

Die Kurve läßt sich auch einfacher kennzeichnen. Man kann nämlich

$$(89\,\text{a}) \qquad dh = h\sqrt{\frac{3}{H^3}(h_1-h)}\,dx$$

oder

$$(89\,\text{c}) \qquad \int h\,dx = \int \frac{dh}{\sqrt{\frac{3}{H^3}(h_1-h)}} = -2\sqrt{\frac{H^3}{3}(h_1-h)}$$

schreiben. Das erste Integral stellt nun nichts anderes als die *Fläche* f zwischen dem gehobenen und dem ursprünglichen Spiegel vor, so daß (89 c) mit

$$f + \text{konst.} = -\sqrt{\frac{4}{3}H^3(h_1-h)}$$

gleichbedeutend ist. Im Unendlichen, wo $h = 0$ ist, muß auch f zu Null werden, was für den Wert $-\sqrt{\frac{4}{3}H^3h_1}$ der Konstanten oder für die Flächengleichung

$$(89\,\text{d}) \qquad f = \sqrt{\frac{4}{3}H^3}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_1-h}\right)$$

zutrifft. Für $h = h_1$ bedeutet das zugehörige f die halbe Längenschnittfläche des unendlichen Schwalles über dem ursprünglichen Spiegel. Die ganze Längenschnittfläche mißt daher

$$(89\,\text{e}) \qquad F = 2\sqrt{\frac{4}{3}H^3h_1}$$

(worin h_1 aus (89) entnommen werden kann). Andererseits gibt (89 d) in Verbindung mit (89 e)

$$\frac{2f}{F} = 1 - \sqrt{1-\frac{h}{h_1}} = 1 - \sqrt{1-\frac{16H^3}{3F^2}h},$$

oder

$$\left(\frac{F-2f}{F}\right)^2 = 1 - \frac{4f}{F} + \frac{4f^2}{F^2} = 1 - \frac{16H^3}{3F^2}h,$$

oder

$$(89\,\text{f}) \qquad h = \frac{3}{4H^3}f(F-f),$$

wonach die Erhebung dem Produkt der beiden Teilflächen proportional ist, in die sie die ganze Schwallfläche zerlegt. In seiner Mitte, wo $f = \frac{1}{2}F$ wird, erhebt sich daher der Schwall zur Höhe

(89 g) $$h_1 = \frac{3}{16}\frac{F^2}{H^3}.$$

Für die Höhe ζ der Schwerpunktsordinate über dem ursprünglichen Spiegel gilt gemäß der Bedeutung des Begriffes Schwerpunkt

$$\zeta F = \int_0^F \frac{h}{2} df = \frac{3}{8H^3}\int_0^F (fF - f^2) df = \frac{3}{8H^3}\left(\frac{f^2 F}{2} - \frac{f^3}{3}\right)_{f=F}$$

oder

(90) $$\zeta = \frac{1}{16}\frac{F^2}{H^3} = \frac{h_1}{3}.$$

Der Schwerpunkt liegt also in einem Drittel der Scheitelhöhe über dem ursprünglichen Spiegel.

Mit dem Schwallgewichte und der Schwerpunkthöhe kennt man auch die potentielle Energie des Schwalles, der bei seinem Zurücksinken in die ursprüngliche Spiegelhöhe pro Breiteneinheit die Arbeit

(91) $$\gamma\zeta F = \frac{\gamma}{16}\frac{F^3}{H^3} = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{4}{3}h_1 H\right)^{3/2}$$

verrichten kann. Doppelt so groß ist, wie oben auseinandergesetzt, die Gesamtenergie, also

(91 a) $$E = \gamma\left(\frac{4}{3}h_1 H\right)^{3/2}.$$

Demnach[1]) wäre es z. B. nicht ausgeschlossen, daß eine Einzelwelle von 40 cm Erhebung über 2 m tiefem Wasser auf den Längsmeter einer quer zu ihrer Bewegungsrichtung laufenden Mauer einen Stoß ausübe, dessen Energie

$$1000\left(\frac{4 \cdot 0{,}4 \cdot 2}{3}\right)^{3/2} = \text{rd. } 1100 \text{ kg m}$$

beträgt.

In fließendem Wasser verlieren nach *Bazins* Beobachtung[2]) Wellen, die der Strömung entgegen laufen, bald ihre Regelmäßigkeit und nehmen rasch an Höhe ab. Für die Schnelligkeit gelte bei einer ursprünglichen mittleren Geschwindigkeit U der Strömung, je nachdem die Welle mit ihr oder gegen sie läuft,

(92) $$\omega = \sqrt{g(H + h)} \pm U.$$

1) *A. Flamant*, Hydraulique 2. éd., S. 436.

2) Recherches hydraulique 2, 1865, S. 36.

Negative Wellungen — die *Bazin* (siehe Figur) durch Zuflußverminderung, *Scott-Russell*[1]) durch Herausziehen eines festen Körpers erzeugte — pflanzen sich in rechteckigen Gerinnen nach ersterem mit der Schnelligkeit

$$\omega = \sqrt{g(H-h)} \pm U \tag{92 a}$$

fort. Nach beiden Beobachtern bleiben sie nie vereinzelt, sondern werden von vielen Wellen gefolgt. Ihre Beobachtung ist schwieriger als die des Schwalles.

57. Der Ort als Funktion von Tiefe und Zeit. Die bisher für nicht stationäre Bewegungen aufgestellten Gleichungen gaben, wenn man von der der Schwalldauerform absieht, den Zusammenhang der Geschwindigkeit U der Strömung oder der Schnelligkeit ϖ mit der Wassertiefe $H+h$ und dem Gefälle J. Vielfach ist es wichtiger, den Ort x als Funktion der Tiefe und der Zeit t kennen zu lernen. Bei Beantwortung dieser Frage sei festgehalten, daß die Schnelligkeit ϖ den Weg bedeutet, den die Ordinate, vor der der Schwall stets denselben Inhalt hat, in der Zeiteinheit zurücklegt, wobei im allgemeinen die Wasserteilchen an dieser Ordinate fortgesetzt wechseln werden. Ändert sich nun auch das vom Wellenumriß umschlossene Wasser, so muß doch dessen Gesamtmenge die alte bleiben. Eine spätere Lage eines Umrißpunktes geht dabei aus dem unmittelbar vorhergehenden dadurch hervor, daß jeder Ordinatenpunkt neben der wagrechten Schnelligkeit ϖ eine senkrechte besitzt. Zwei Umrißpunkte im Abstande dx haben die Geschwindigkeiten ϖ und $\varpi + \frac{\partial \varpi}{\partial x} dx$, sind daher einen Augenblick θ später im Abstande

$$\left(1 + \theta \frac{\partial \varpi}{\partial x}\right) dx$$

voneinander.[2]) Während dieses Augenblickes wächst zugleich die Streifenhöhe von h auf $h + \frac{\partial h}{\partial t}\theta + \frac{\partial h}{\partial x}\varpi$ an. Die Unveränderlichkeit des von den beiden wandernden Ordinaten begrenzten Streifens verlangt, daß

$$\left(1 + \theta \frac{\partial \varpi}{\partial x}\right) dx \left(h + \frac{\partial h}{\partial t}\theta + \varpi \frac{\partial h}{\partial x}\theta\right) = h\,dx$$

1) Report of the 14[th] meeting of the British Association, S. 348.

2) *Boussinesq*, Eaux courantes, S. 355.

oder bei Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung, daß

(93) $$\frac{\partial h}{\partial t} + \varpi \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\varpi h)}{\partial x} = 0$$

sei. In Verbindung mit der für das Eindringen eines Schwalles in ruhendes Wasser geltenden Kontinuitätsbedingung

(86 f) $$U = \frac{\varpi h}{H + h}$$

(worin U die unter dem Schwall herrschende Strömungsgeschwindigkeit) gibt die für die Schnelligkeit entwickelte Gleichung

(86 i) $$\varpi = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{H} + \frac{H^2}{6h}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)$$

bei vernachlässigbarem letztem Gliede, also geringer Spiegelkrümmung

$$U(H + h) = \varpi h = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{H}\right)h = \sqrt{gH}\,\frac{4H + 3h}{4H}$$

oder, nebenbei bemerkt,

(93 a) $$U = \sqrt{gH}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{h}{H + h}\right)\frac{h}{H}\,.$$

Andererseits folgt

$$\frac{\partial[U(H + h)]}{\partial x} = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h}{H}\right)\frac{\partial h}{\partial x},$$

während aus (93) und (86 f)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial[U(H + h)]}{\partial x}$$

hervorgeht. Somit besteht die Differentialgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h}{H}\right)\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

mit der Lösung [1])

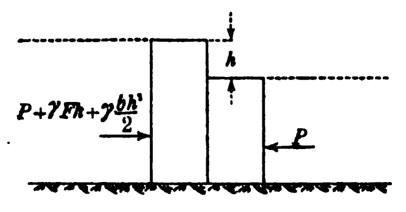
(93 b) $$x = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h}{H}\right)t + f(h),$$

worin $f(h)$ von der Spiegelform zur Zeit Null abhängt, indem für $t = 0$ der Ausdruck (93 b) in $x = f(h)$ übergeht. Nach (93 b), worin allerdings die Reibungen vernachlässigt sind, erfolgt die Formänderung des Spiegels bei sehr geringer Krümmung so, daß sich *kleine Erhebungen h des Schwalles über den ursprünglichen Spiegel, so weit die Tiefe H vorhanden war, mit den Schnelligkeiten $\omega = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h}{H}\right)$ fortpflanzen.* Die Schnelligkeit ω der Erhebung ist also größer als die ϖ des Schwalles. Vernachlässigte man die Krümmung nicht, so konnte man hingegen eine Dauerform des Schwalles finden, bei der ω und ϖ zusammenfielen.[2])

1) Ebenda, S. 412, Gl. 331.

2) Die Definition von ϖ wurde zwischen (86 e) und (86 f) gegeben.

Das Gesetz (93 b) mit erweiterter Geltung für beliebige Querschnitte findet *B. de Saiut-Venant*[1]) einfach durch Anwendung des Impulssatzes. Rechts von der Stufe im Spiegel, welche die Höhe h habe, messe der Querschnitt die Fläche F, links von der Stufe — bei einer Spiegelbreite b — also die Fläche $F + bh$. Links befindet sich jedes Flächenelement unter einem um γh größeren Druck als gleich hoch liegende Elemente rechts; zudem ist links ein Streifen bh vorhanden, der rechts fehlt



und einen mittleren Druck $\gamma \frac{h}{2}$ empfängt. Der Unterschied der einander entgegen gerichteten Drucke auf zwei benachbarte die Stufe einschließende Querschnitte beträgt also

$$\gamma F h + \gamma \frac{b h^2}{2}.$$

Das Wasser möge sich in Ruhe befinden. Schreitet die Stufe mit der Schnelligkeit ω fort[2]), so vermehrt sich das Wasservolum in der Zeiteinheit um $\omega \cdot bh$. Ebensoviel muß von links durch den Querschnitt $F + bh$ zuströmen, wo also die Geschwindigkeit

$$U = \frac{bh}{F + bh}\omega \tag{93 c}$$

herrscht. In der Zeiteinheit gerät bei dem Fortschritt der Welle eine vorher ruhende Wassermenge ωF in Bewegung und zwar durch den angegebenen Druckunterschied. Daher gilt hier

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \frac{\gamma}{g} F\omega \cdot U = \gamma F h + \gamma \frac{b h^2}{2},$$

oder

$$\frac{1}{g}\omega^2 \frac{F b h}{F + bh} = Fh + \frac{b h^2}{2},$$

oder

$$\frac{1}{g}\omega^2 F b = F^2 + \frac{3}{2} F b h + \frac{b^2 h^2}{2}, \tag{93 d}$$

oder genau genug

$$\omega^2 = g\left(\frac{F}{b} + \frac{3}{2} h\right). \tag{93 e}$$

Da $3(H + h)^{1/2} - 2H^{1/2} = 3H^{1/2} + \frac{3}{2} H^{-1/2} h + \cdots - 2H^{1/2}$ bei

1) Paris, C. R. 71 (1870), S. 186.

2) Diese Schnelligkeit ω ist also anders definiert als oben $\bar{\omega}$ in Gl. (86 f).

Vernachlässigung höherer Potenzen von h in $\sqrt{H}\left(1+\frac{3}{2}\frac{h}{H}\right)$ übergeht, kann auch umgekehrt (93 b) bei kleineren Erhebungen h in [1])

(93 f) $$x = \left(3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right)t + f(h)$$

verwandelt werden. Letzteres Gesetz geht auch aus einer Betrachtung *A. Ritters* [2]) hervor, die wesentlich mit *de Saint-Venants* Ableitung von (93 e) übereinstimmt. Auch *Ritter* läßt zunächst einen gestauten Wasserkörper, in welchem durchweg dieselbe Geschwindigkeit U herrscht, auf einen ruhenden stoßen, setzt einen plötzlichen Übergang aus der Ruhe in die Bewegung voraus, sowie eine gleichförmige Schnelligkeit ω der Stufe. Zu dieser Annahme fügt er die weitere, daß die Geschwindigkeit U durch eine „Stauwand" hervorgerufen werde, die man in einem rechteckigen, überall gleich breiten wagrechten Gerinne mit der Geschwindigkeit U vorschiebt. Für dieses Gerinne vereinfachen sich — wenn H wieder die Tiefe des ruhenden Wassers, $H+h$ die des bewegten bedeutet — die Formeln (93 c) und (93 d) zu

(94) $$U = \frac{h}{H+h}\omega,$$

(94 a) $$\omega = \sqrt{gH}\sqrt{1+\frac{h}{H}}\sqrt{1+\frac{h}{2H}},$$

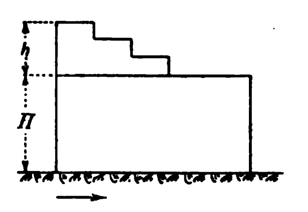
wonach für unendlich kleine Stauung h die Schnelligkeit

(94 b) $$\omega = \sqrt{gH}$$

und

(94 c) $$U = h\sqrt{\frac{g}{H}}$$

wird. Sowohl (94 b) wie (94 c) bleiben gültig, da von Reibungswiderständen abgesehen wird, wenn der ganze Wasserbereich, in welchem der Vorgang stattfindet, eine gleichförmige Bewegung ausführt, für welchen Fall U und ω die Bedeutung einer relativen Geschwindigkeit und Schnelligkeit bezüglich der fortschreitenden Wassermasse annehmen. Daher können (94 b) und (94 c) auch noch angewendet werden, wenn nach Erzeugung der ersten Stauwelle durch abermalige plötzliche Geschwindigkeitszunahme der vorrückenden Wand eine zweite Stauwelle hervorgebracht wird. Die Wand findet dann statt einer Tiefe H eine solche $H+h$ vor und statt ruhendem Wasser solches von der Geschwindigkeit U.



1) *B. de Saint-Venant,* Paris, C. R. 73 (1871), S. 237.

2) Z. d. V. deutsch. Ing. 36 (1892), S. 948 ff.

Werden unendlich viele unendlich kleine Stufen erzeugt, so spielt für die der Stauwand benachbarte, allerdings unendlich kleine Stufe die an der Stauwand jeweilig vorhandene Tiefe $H+h$ die Rolle der ursprünglichen Tiefe, während dh und dU an die Stelle von h und U treten. Demnach nimmt (94c) hier die Gestalt

$$dU = dh\sqrt{\frac{g}{H+h}}$$

an, deren Integration

$$\int_0^U dU = \int_0^h \sqrt{\frac{g}{H+h}}\,dh$$

oder

(94d) $$U = 2\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}$$

liefert. Gemäß (94b) beträgt bei einer Tiefe H für unendlich kleine Stufenhöhe der Unterschied zwischen Schnelligkeit und Geschwindigkeit $\sqrt{gH}$. Nunmehr ist an der Stauwand H bis auf $H+h$ gewachsen und, da es nur auf die relativen Geschwindigkeitsunterschiede ankommt, demnach

$$\omega - U = \sqrt{g(H+h)},$$

somit

(94e) $$\omega = 3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}.$$

Nach (94d) und (94e) haben U und ω für eine bestimmte Wasserhöhe $H+h$ an der Stauwand je einen unveränderlichen Wert. Dabei hat ω die Bedeutung der Schnelligkeit, mit der ein Umrißpunkt von der Höhe $H+h$ über der Sohle wagrecht vorwärts wandert. Bildete zur Zeit $t=0$ der Umriß eine Kurve

(94f) $$x = f(h),$$

so bildet er gemäß (94e) zur Zeit t also eine Kurve

(94g) $$x = \left(3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right)t + f(h),$$

deren Gleichung oben als (93f) angesetzt wurde und bei kleinem h mit (93b) übereinstimmt. Mit der Höhe $H+h$ des Wassers an der Stauwand wechselt nach (94d) deren Geschwindigkeit und zwar beträgt die Beschleunigung der Stauwand, wie die Differentiation von (94d) nach t lehrt,

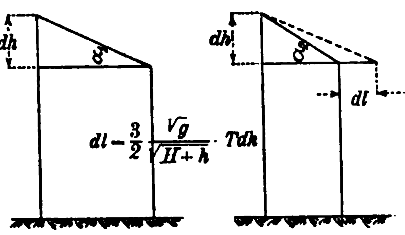
(94h) $$\frac{\partial U}{\partial t} = \sqrt{\frac{g}{H+h}}\,\frac{\partial h}{\partial t}.$$

A. Ritter[1]) wendet den Ausdruck (94e) zur Untersuchung der *Stau-*

---

1) Z. d. V. deutsch. Ing. 36 (1892), S. 348ff. Die abgekürzte Darstellung rührt von *Ph. Forchheimer* in Encykl. der math. Wissensch., 4. Bd. Mechanik, 3. Teilband, Leipzig 1901—08, S. 377. her. Die Formel (94g) findet sich bereits in *Boussinesq*, Eaux courantes, S. 415.

kurve bei bewegter Wand an. Nach ihm beträgt, wie die Differentiation nach h lehrt, der Unterschied der Schnelligkeit von Spiegelpunkten, deren Höhenlagen um dh verschieden sind,



$$d\omega = \frac{3\sqrt{g}}{2\sqrt{H+h}}\,dh,$$

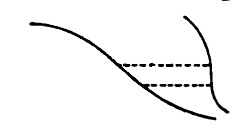
so daß, wenn α_1 und α_2 die Neigung des Spiegels zwischen diesen Punkten zu Anfang und zu Ende des Zeitraumes T bezeichnet, der wagrechte Abstand, der zunächst $\operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot dh$ war, in der Zeit T in

$$\operatorname{cotg}\alpha_2 \cdot dh = \operatorname{cotg}\alpha_1 \cdot dh - \frac{3\sqrt{g}}{2\sqrt{H+h}}\,T\,dh$$

übergeht, also

$$T = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{H+h}{g}}\,(\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\alpha_2) \tag{94i}$$

ist. Eine Welle bricht, wenn ihre Vorderseite die lotrechte Stellung erreicht. Da nach (94e) die Schnelligkeit mit der Höhenlage zunimmt, müßte das bei jeder Welle schließlich eintreten. Hat ein Element der Vorderseite einer Welle bereits die Steilheit α_1 erreicht, so ist bis zum Brechen dieser Stelle nach (94i) noch eine Zeit



$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{H+h}{g}}\left(\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{H+h}{g}}\operatorname{cotg}\alpha_1$$

nötig. Bricht die Welle zuerst an ihrem Fuße, so ist $h = 0$ und beträgt die Zeitdauer bis zum Brechen

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{H}{g}}\operatorname{cotg}\alpha_1.$$

Die abgeleiteten Formeln lassen eine Anwendung auf das *Verhalten von Flutwellen in Meerengen*[1]) zu. Für die Schnelligkeit, mit welcher z. B. in einer Meerenge von 360 m Wassertiefe die Flutwelle fortschreitet, erhält man nach (94b) unter Voraussetzung überall gleichen Querschnittes $\omega = \sqrt{9{,}8 \cdot 360} = 60\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$. Wenn beim Einlaufen in die Enge das Steigungsverhältnis des Wellenprofils die Größe $\operatorname{tang}\alpha_1 = 0{,}001$ hatte, so ergibt sich für die Strecke, welche bis zum Eintreten des Brechens von der Welle noch zurückgelegt wird,

$$\omega T = \sqrt{9{,}8 \cdot 360}\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{360}{9{,}8}}\,\frac{1}{0{,}001} = \frac{2}{3}\cdot\frac{360}{0{,}001} = 240\,000\ \mathrm{m},$$

und für die Zeit, in welcher diese Strecke durchlaufen wird,

$$240\,000 : 60 = 4000\ \mathrm{sec}.$$

1) *A. Ritter*, Z. d. V. deutsch. Ing. 36 (1892), S. 951.

Aus (94e) läßt sich auch der Schluß ziehen, welche Gestalt eine Welle haben muß, ***damit sie auf einmal bricht,*** daß heißt zu einer bestimmten Zeit eine senkrechte Gerade bildet. Da sich nach (94e) ein Umrißpunkt von der Höhe h über dem ursprünglichen Spiegel in der Zeit t vor dem Brechen in der Entfernung

(95) $$x = \omega t = \left[3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right]t$$

von der senkrechten Brechlinie befindet, stellt (95) oder

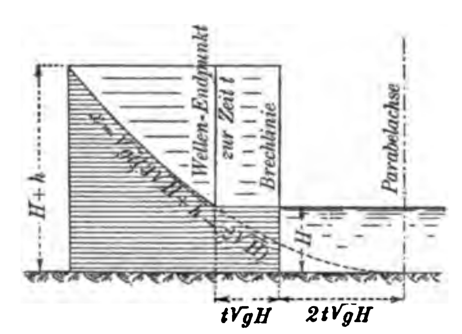
(95a) $$\left(x + 2t\sqrt{gH}\right)^2 = 9gt^2(H+h)$$

die Umrißgleichung zur Zeit t dar, wobei die Zeit vom Augenblick des Brechens an gezählt wird, also stets negativ ist. Sämtliche Umrisse sind nach (95a) Parabeln mit ihren Achsen in positiven Entfernungen $-2t\sqrt{gH}$ von der gemeinsamen Brechlotrechten und ihrem Scheitel auf der Sohle. Der jeweilige Wellenendpunkt, für den $h = 0$ ist, hat nach (95) die Entfernung $t\sqrt{gH}$ von der Brechlinie. Die (hell geschraffte) Fläche zwischen dem Umriß und der Brechlinie hat innerhalb der Höhen H und $H+h$ die Größe

$$\int_0^h x\,dh = t\int_0^h \left[3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right]dh$$
$$= t\left[2\sqrt{g(H+h)^3} - 2\sqrt{gH}\cdot h\right]_0^h$$
$$= t\cdot 2(H+h)\left[\sqrt{g(H+h)} - \sqrt{gH}\right].$$

Danach hat die (dunkel gehaltene) Fläche zwischen Umriß- und ungestautem Spiegel, der Ordinate von der Höhe $H+h$, der Brechlinie und der Sohle — weil der Höhenpunkt $H+h$ den Abstand $t\left[3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right]$ von der Brechlinie hat — den Inhalt

$$F = -t\left\{\left[3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right](H+h) - 2\left[\sqrt{g(H+h)} - \sqrt{gH}\right](H+h)\right\}$$



oder

(95b) $$F = -t\sqrt{g(H+h)^3},$$

worin $-t$ einen positiven Wert hat. Gl. (95b) gibt den Zusammenhang zwischen der Höhe $H+h$ der Anfangsordinate und der Fläche F. Wenn man nun F konstant sein läßt, so kann man die Anfangsordinate durch eine Stauwand ersetzen und dann lehrt (95b) für ein gegebenes F den Zusammenhang zwischen der jeweiligen Wassertiefe $H+h$ an der Stauwand und der Zeit t, die noch bis zum Brechen der Welle vergeht. Vom Beginn der Stauwandbewegung mit $h = 0$ bis zum Brechen vergeht z. B. eine Zeit

$$t_0 = \frac{-F}{\sqrt{gH^3}}.$$

Aus (95b) folgt durch Differentiation

$$0 = (H+h)\sqrt{H+h}\,dt + \frac{3}{2}t\sqrt{H+h}\,dh$$

oder

(95c) $$\frac{dh}{dt} = -\frac{2}{3}\,\frac{H+h}{t} = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{g(H+h)^5}}{F},$$

wonach die in (94h) ausgerechnete Beschleunigung der Stauwand, damit ein parabolischer Schwallumriß entsteht,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sqrt{\frac{g}{H+g}} \cdot \frac{2}{3} \frac{\sqrt{g(H+h)^5}}{F} = \frac{2}{3} \frac{g(H+h)^2}{F} \tag{95d}$$

proportional dem Quadrat der Wassertiefe an der Stauwand wachsen und zuletzt ∞ groß werden müßte. Aus (95c) folgt die lotrechte Geschwindigkeit des Wassers an der Wand. Wird diese im Augenblicke, in dem die Höhe $H+h$ erreicht ist, nicht mehr beschleunigt, so kann das oberste Wasserteilchen, welches die Steigegeschwindigkeit

$$w = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{g(H+h)^5}}{F}$$

besitzt, nur mehr eine weitere Höhe

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{2}{9} \frac{(H+h)^5}{F^2} \tag{95e}$$

emporsteigen. *A. Ritter* nimmt statt dessen [1]) an, daß eine plötzliche Änderung der beschleunigten Bewegung der Stauwand in die gleichförmige keinen Einfluß auf die Zeitdauer t bis zum Brechen der Welle hat. Demnach steige das Wasser gemäß (95c) noch

$$wt - \frac{gt^2}{2} = \frac{2}{3}(H+h) - \frac{gt^2}{2}$$

oder bei kurzem Zeitraum t bis zum Brechen nahezu $\frac{2}{3}(H+h)$ an und erreiche das oberste Teilchen also nahezu die Höhe $\frac{5}{3}(H+h)$ über der Sohle.

58. Dammbruchkurve und Spülschwall. Beim Zurückweichen einer Stauwand [2]), die ein ursprünglich H tiefes rechteckiges Gerinne von wagrechter Sohle begrenzt, ist, wenn auch in diesem Falle Spiegelkrümmung und Reibungen vernachlässigt werden, das h der früheren Betrachtungen negativ, indem es nunmehr die *Senkung* unter den ursprünglichen Spiegel bedeutet. Daher gilt, wenn man jetzt unter x von der Wandanfangsstellung aus zu messende wagrechte Abszissen versteht, statt (94d)

$$\frac{dx}{dt} = U_1 = 2\sqrt{gH} - 2\sqrt{g(H+h)}, \tag{96}$$

worin U_1 die Geschwindigkeit der Stauwand bedeutet. Eine Wiederholung der früheren Betrachtung führt nun auf einen Umriß von der Gleichung

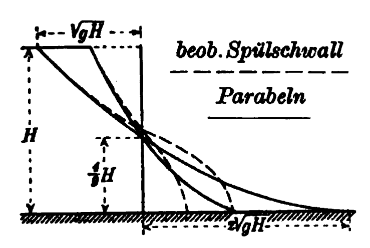
$$x = \omega t = \left[2\sqrt{gH} - 3\sqrt{g(H-h)}\right] t, \tag{96a}$$

das ist auf Parabeln mit lotrechten Achsen, welche die ursprüngliche Wandflucht ($x = 0$) in der Höhe $\frac{4}{9}H$ über der Sohle schneiden. Ver-

1) Obige Darstellung weicht in ihrem Gange überhaupt von der *Ritters* ab und zwar wesentlich durch Einführung der unveränderlichen Fläche F.

2) *A. Ritter,* Z. d. V. deutsch. Ing. 36 (1892), S. 954.

suche von *A. Zeitlinger*[1]), bei welchen ein Schütz möglichst rasch *in die Höhe gezogen* wurde (und die Stauhöhe bis zu 0,53 m betrug), haben die Entstehung ähnlicher Spiegel auf der Wasserseite nachgewiesen. Es zeigte sich nämlich ein scharfer Schnitt der Senkungslinie mit dem noch ungeänderten Spiegel und ein Fortschreiten des Schnittpunktes mit der Schnelligkeit $-\sqrt{gH}$. Da nach (96a) der Parabelscheitel, dessen $h = H$ ist, mit der Schnelligkeit $2\sqrt{gH}$ auf der Sohle gleitet, wächst in der Zeiteinheit die durch die Breiteneinheit ausgetretene Menge um

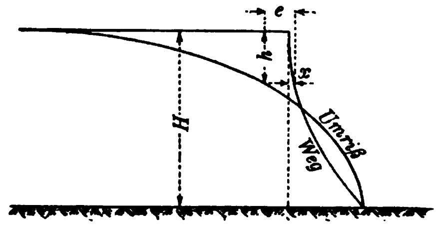


$$(96b) \quad q = \frac{1}{3} \cdot \frac{4H}{9} \cdot 2\sqrt{gH} = \frac{8}{27} H\sqrt{gH} = 0{,}928\, H^{3/2}\, \mathrm{m^3\, sec^{-1}}$$

und beträgt die mittlere Austrittsgeschwindigkeit, wo das Schütz gewesen war ($x = 0$),

$$(96c) \qquad \frac{8}{27} H\sqrt{gH} : \frac{4}{9} H = \frac{2}{3}\sqrt{gH} = 2{,}09\, H^{1/2}.$$

A. Ritter, der allerdings eine ganz bestimmte Beschleunigung der Stauwand voraussetzt, hat übrigens das Entstehen der Linien (96a) bezweifelt, weil dies eine unmögliche Sinkgeschwindigkeit jenes Wasserteilchens bedinge, das ursprünglich im Eck zwischen Spiegel und Stauwand (also an der Stelle $x = 0$, $h = 0$) gelegen war. Er findet, daß zur Zeit $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, in welcher das Eckteilchen die Sohle erreicht, der Umriß die Gestalt



A. Ritters Dammbruchkurve.

$$(96d) \qquad x = H\sqrt{2}\left(2 - 3\sqrt{1 - \frac{h}{H}} + 2\sqrt{\frac{h}{H} - \frac{h^2}{H^2}} - \arcsin\sqrt{\frac{h}{H}}\right)$$

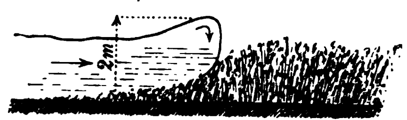
habe. Dieser Umriß kehrt zum Unterschiede von dem der Gl. (96a) seine Hohlseite nach unten und schließt sich im Punkte $x = -\sqrt{2}\, H$, $h = 0$ berührend an den alten Spiegel an. Nach Erreichung der Lage (96d) drehe sich der Umriß, dessen beide Endpunkte gleichzeitig stromauf und stromab vorrücken, um einen Punkt mit den Koordinaten $x = 0{,}216\, H$, $h = \frac{5}{9} H$. Der Ausfluß erreicht auch nach *Ritter* $\frac{8}{27} H\sqrt{gH}$. Der Spiegel des ausgetretenen Wassers hat nach den Versuchen (wie nach *Ritter*) seine Hohlseite unten, schließt sich also an den Senkungsspiegel, etwa in $x = 0$, mit einem Wendepunkt an und verläuft dementsprechend in

1) Im hydrot. Labor. zu Graz u. in einem Mühlgraben. Bisher unveröffentl.

seinem oberen Teile fast geradlinig. Die Flächengleichheit von Entleerung und Austritt lehrt dabei, daß die Kurve die Wandflucht höher als $\frac{4}{9}H$ schneidet. — Der betrachteten Kurve ähnelt die Linie, die der Spiegel in städtischen Sielen nach plötzlichem Ziehen eines Spülschützes beschreibt, soweit die abweichende Sohlenform, die meist eiförmig ist, nicht eine Änderung bewirkt[1]).

Aus (96b) und (96c) geht hervor, daß man bei plötzlichen Einstürzen von Stauwerken sehr große Ergüsse gewärtigen muß. So könnten z. B. durch jeden Meter Lückenweite eines beschädigten Dammes aus einem 20 m tiefen Weiher sekundlich $0{,}928\sqrt{8000} = 83{,}0\ \mathrm{m}^3$ mit der mittleren Geschwindigkeit $2{,}09\sqrt{20} = 9{,}35\ \mathrm{m\ sec}^{-1}$ in das benachbarte Gelände stürzen.

Gelegentlich scheint das Wasser als brechende Welle vorzurücken, die am Kopfe ihre größte Höhe besitzt. So sagt *J. P Frizell*[2]), daß nach einem Staudammbruch die Zeugen meistens behaupten, daß die Flutwelle als Wand vorgeschritten sei. Das war z. B. in Johnstown der Fall, als ein Staudammbruch die Stadt zerstörte. Nach den meisten Aussagen sei kein Wasser vor der Welle sichtbar gewesen und sei diese als eine wallende, sprühende Masse von Wasser, Stämmen und Erdklumpen herangebraust[3]). In den Cañons des amerikanischen Westens komme, wenn das Wasser in ihnen sehr seicht steht, nach Sturzregen die Welle wie eine Mauer mit rollendem Kamme, der aussieht, als bestehe er aus den Köpfen stürzender Büffel[4]). Den gewöhnlich unscheinbaren Stanzerbach in St. Ruprecht ober Murau sah am 30. Juni 1891 ein Augenzeuge, der vor der „Reindl-Taverne" sitzend die Wirtin auf ein unerklärliches Getöse und Rauschen aufmerksam gemacht hatte, plötzlich als braune Wand herabkommen. Im nächsten Augenblicke wurde der Zeuge durch einen Luftdruck weggeschleudert, während das Haus verschwand und dessen Besitzer getötet wurden[5]). Das Bett der Iser oberhalb Alt-Benatek ist in eine ungefähr 1 km breite ebene Talsohle von etwa 0,0015 Gefälle nur wenig eingeschnitten. Hier beobachtete *A. Dedek*[6]) im Juli 1897 und im August 1905 das Herannahen des Wassers als langen schmutzigen Streifen, der über den Korn- und Weizenfeldern von Zeit zu Zeit in der Sonne aufblitzte. Vor sich wälzte die Welle, die mit rundem Kopf heranbrauste, mitgerissenes Getreide und mitgeschleppte Garben. Obwohl ihre Geschwindigkeit nur gegen 0,9 m sec⁻¹ gewesen zu sein scheint, riß die Sturzwelle mehrere ebenerdige, in Bruchstein gemauerte Keuschen mit, während die besser gebauten Häuser widerstanden. Als Augenzeuge sei endlich ein bekannter Ingenieur, *J. Roßhändler*[7]),



Hochwasser im Isertal.

---

1) Mitteilung über eine Spülung: *B. Latham,* Sanitary Engineering, 2. ed., London 1878, S. 305. Genauerer Versuch: *H. N. Ogden,* Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 40 (1898), S. 1f.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 21 (1889), S. 562.

3) *J. B. Francis,* ebenda S. 565.

4) *M. Merriman,* ebenda S. 563.

5) Dem Verfasser mitgeteilt von *F. Wittenbauer.*

6) Bisher unveröffentlicht.

7) Bisher unveröffentlicht.

angeführt, der sich entsinnt, als Junge in einem Bachbett gespielt zu haben, als plötzlich das Wasser als Wand auf ihn zueilte[1]).

Zur selben Wellenform wie bei einer mit der Geschwindigkeit

$$U_1 = 2\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}$$

bzw. der Beschleunigung

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \sqrt{\frac{g}{H+h}}\,\frac{\partial h}{\partial t} \text{ (vgl. 96 und 94h)}$$

zurückweichenden Stauwand gelangt man auch[2]) durch entsprechende Änderung der Wasserentnahme q, für welche ja

$$q = (H+h)\,U_1 \tag{97}$$

gelten muß. Die Differentiation liefert

$$\frac{\partial q}{\partial t} = (H+h)\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1\frac{\partial h}{\partial t}$$

und daher bei Einsetzen der Werte von U_1 und $\frac{\partial U_1}{\partial t}$

$$dq = \left(3\sqrt{g(H+h)} - 2\sqrt{gH}\right)dh$$

oder nach Integration, wenn für $h = 0$ die Entnahme $q = q_0$ ist,

$$q - q_0 = \left[2\sqrt{g}\sqrt{(H+h)^3} - 2h\sqrt{gH}\right]_0^h$$
$$= 2\sqrt{g}\left[\sqrt{(H+h)^3} - h\sqrt{H} - \sqrt{H^3}\right].$$

Bedeutet q die Entnahme durch Turbinen und h die Senkung in deren Vorhof, so kann man annehmen, daß hier die Teilchen nach dem Fallgesetze sinken oder daß h mit t im Zusammenhang $h = \frac{1}{2}gt^2$ steht, so daß man die weitere Beziehung

$$q - q_0 = 2\sqrt{g}\left[\sqrt{\left(H + \frac{gt^2}{2}\right)^3} - \frac{gt^2}{2}\sqrt{H} - \sqrt{H^3}\right] \tag{97a}$$

hat.

Nach (97a) kann man in kurzer Zeit die Beaufschlagung q von Turbinen steigern. Für $H = 1$ m, $q_0 = 1\ \text{m}^2\,\text{sec}^{-1}$ (nämlich m^3 für den m Breite und die Sekunde) $t = 0{,}1$ bzw. 1 Sekunde, folgt beispielsweise

$$q - q_0 = 6{,}264\left[\sqrt{(1{,}049)^3} - 0{,}049\sqrt{1} - \sqrt{1}\right] = 0{,}159$$

bzw.

$$= 6{,}264\left[\sqrt{(5{,}905)^3} - 4{,}905\sqrt{1} - \sqrt{1}\right] = 52{,}9$$

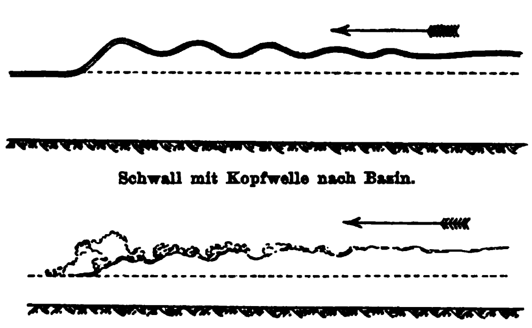
oder $q = 1{,}16$ bzw. $53{,}9\ \text{m}^2\,\text{sec}^{-1}$.

59. Der wandernde Stau. Die bisher mitgeteilten Beobachtungen *Scott-Russells* und *Bazins* betrafen die durch plötzlichen, vorübergehen-

1) Siehe auch unten S. 200: Wanderwellen.

2) *F. Schaffernak*, bisher unveröffentlicht.

den Einfluß in ein Gerinne entstehende Einzelwelle (Gl. (85i), Figur, Gl. (88), (92)) und ihre Veränderung beim Fortschreiten. Läßt man nun das Einfließen andauern, so schließt sich gewissermaßen eine Welle an die andere an, bildet sich also ein langgestreckter Schwall[1]). In einem wagrechten Gerinne ist dabei dort, wo der Schwall noch nicht angelangt ist, das Wasser in vollkommener Ruhe[2]). In dieses tritt die Kopfwelle, die über tiefen Grund etwa $1^1/_2$ mal so hoch ist wie der nachfolgende Schwall und eine abgerundete Kuppe bildet, in seichtem Wasser hingegen steiler abfällt oder selbst brandet, in welchem Falle nur ihr Schaum höher als der nachfolgende Spiegel ansteigt. Für jede Zuflußmenge gibt es eben eine bestimmte Tiefe, bei der die Kopfwelle (onde initiale) bricht. Es zeigte sich auch jetzt die Schnelligkeitsformel (88a) *Scott-Russells*



Schwall mit Kopfwelle nach Bazin.

Brandender Schwall nach Bazin.

$$\omega = \sqrt{g(H+h)} \tag{98}$$

anwendbar, wenn man unter h die Erhebung der Kopfwelle über den ursprünglichen, in der Höhe H über der Sohle liegenden Spiegel versteht. Für nichtbrechende Wellen sei ferner

$$h = \frac{3}{2}\frac{q}{\omega}, \tag{98a}$$

worin q den Zufluß der Breiteneinheit bedeutet. Durch Einsetzen dieses Wertes von h in (98) erhält man

$$\omega^3 - gH\omega = \frac{3}{2}gq. \tag{98b}$$

Der Versuch läßt sich in der Weise abändern, daß man nach dem Vorbild *G. Bidones*[3]) zunächst das Wasser fließen läßt und es erst später durch Herablassen einer Schütze staut. Der an der Schütze entstehende Stau muß sich offenbar bei dieser Anordnung aufwärts fortpflanzen. Wenn man dann die Schütze wieder in die Höhe zieht, hört der Schwall, der bis dahin sein unteres Ende an der Schütze hatte, also immer länger wurde, zu wachsen auf und wandert als isolierte Erhebung stromauf. Durch abermaliges Senken und Heben der Schütze kann ein zweiter

1) Eine Begründung gibt *J. Boussinesq,* Eaux courantes, S. 405, 664.

2) *H. Darcy* u. *H. Bazin,* Recherches hydrauliques 2 (1865), S. 49, 57.

3) Torino, Memorie 30 (1826), S. 203, 219, 221.

Schwall erzeugt werden, der dann größer und rascher als der erste ist, diesen einholt und mit ihm zusammen einen noch höheren Schwall bildet, der aber später wieder in zwei Teile zerfällt. Mit der Strömung schwimmende Körper erfahren, wo sie die Wasserstufe treffen, heftige Stöße, während auf der Sohle mitgeschleppte Körper unter ihr liegen bleiben. Als Bewegungsgesetz des Wassers stellte *G. Bidone* neben der Kontinuitätsformel

$$UH = \omega h, \tag{99}$$

welche besagt, daß die Strömung mit ihrer mittleren Geschwindigkeit U soviel Wasser hinzuführen muß, wie der Schwall zu seinem Wachstum gebraucht, die Stauhöhenformel

$$h = \frac{2H + h}{h} \cdot \frac{U^2}{2g} \tag{99a}$$

auf, welche aber durch *Darcy* und *Bazin* nicht bestätigt wurde. Letztere, welche *Bidones* Versuche in größerem Maßstabe wiederholten, fanden die Schnelligkeit der isolierten Erhebung

$$\omega = \sqrt{g(H+h)} - U = -\frac{2}{5}U + \sqrt{\frac{U^2}{4} + gH}, \tag{99b}$$

worin h die Höhe der von ihnen beobachteten, über den übrigen Schwall emporragenden Kopfwelle (onde initiale) bezeichnet und die Zahl $-\frac{2}{5}$ nur einen Mittelwert bildet. Während sich bei wagrechter Sohle Höhe und Schnelligkeit der Welle kaum ändern, nehme in einem Gerinne mit geneigter Sohle die Schnelligkeit der Welle, die bei plötzlichem Schluß der am Unterende befindlichen Schütze entsteht, stromauf allmählich ab[1]; auch sei über wagrechter Sohle die Kopfwelle abgerundet, während sie bei einer Sohlenneigung von 0,0015 während des größten Teiles ihrer Wanderung gebrandet habe[2]).

60. Ebbe und Flut in Strommündungen. Trägt man die Zeiten als Längen und die Wasserstände eines die Erscheinung von Ebbe und Flut zeigenden Meeres nach der Höhe auf, so erhält man die ***Flutkurven***, welche bei regelmäßigem Verlauf im offenen Meer als Sinuslinien zu betrachten sind. In Flußmündungen haben diese Spiegelschwankungen offenbar wieder Schwankungen zur Folge. Da ist es bemerkenswert, daß, wenn ein Fleet von durchweg gleichem Querschnitt und ebener Sohle in ein flutendes Meer mündet, der mittlere Wasserspiegel des Meeres mit jenem binnenwärts liegender Fleetstrecken nicht übereinstimmt, daß z. B. dort, wo die Reibungen die Flut- und Ebbeströmungen bereits

1) Recherches hydrauliques 2, S. 82. — Siehe auch oben S. 145.

2) Ebenda S. 87.

derart gedämpft haben, daß der Spiegel kaum mehr schwankt, letzterer höher liegt als der mittlere Seespiegel. Um dies nachzuweisen[1]), werde als Flutkurve der Mündung die Sinuslinie

$$(100)\qquad H + h = a + b \sin\frac{2\pi t}{T} \quad \text{oder} \quad \frac{h}{H} = \frac{a - H}{H} + \frac{b}{H}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

angenommen, worin H die Höhe des nicht schwankenden Fleetspiegels, $H + h$ die des Mündungsspiegels über der Fleetsohle bezeichnet und a nur wenig von H verschieden sein kann. Die Schwallinhalte pflanzen sich (nach (86 i) mit vernachlässigbarem Krümmungsgliede) mit der Schnelligkeit

$$\varpi = \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{H}\right)$$

landein fort, derart, daß während einer Zeit T die Wassermenge

$$(100\,\text{a})\qquad \int_0^T \varpi h\,dt = \sqrt{gH^3}\int_0^T\left(\frac{h}{H} + \frac{3}{4}\frac{h^2}{H^2}\right)dt = \sqrt{gH^3}\int_0^T\left(\frac{a-H}{H} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{H}\sin\frac{2\pi t}{T} + \frac{3}{4}\frac{(a-H)^2}{H^2} + \frac{3}{2}\frac{a-H}{H^2}b\sin\frac{2\pi t}{T} + \frac{3}{4}\frac{b^2}{H^2}\sin^2\frac{2\pi t}{T}\right)dt$$

in das Fleet eindringt. Wenn nun T wie in (100) eine ganze Flutperiode bedeutet, muß das Integral, somit bei Vernachlässigung des Gliedes mit $(a - H)^2$

$$T\left[\frac{a-H}{H}\frac{t}{T} - \frac{b}{2\pi H}\cos\frac{2\pi t}{T} - \frac{3}{4}\frac{(a-H)b}{\pi H^2}\cos\frac{2\pi t}{T} + \right.$$

$$\left. + \frac{3b^2}{8\pi H^2}\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi t}{T} + \frac{\pi t}{T}\right)\right]_0^T = T\left(\frac{a-H}{H} + \frac{3}{8}\frac{b^2}{H^2}\right) = 0$$

oder angenähert

$$\frac{a-H}{H} + \frac{3}{8}\frac{b^2}{aH} = 0,$$

also

$$(100\,\text{b})\qquad H - a = \frac{3}{8}\frac{b^2}{a}$$

sein. Es stimmt also der mittlere Meeresspiegel tatsächlich nicht mit dem Spiegel des Fleetendes überein, sondern liegt um $\frac{3}{8}\frac{b^2}{a}$ tiefer. Das ist, wenn auch nicht bedeutend, doch merklich, da z. B. für eine Tiefe a von 6 m der Fleetsohle unter dem mittleren Meeresspiegel und eine Erhebung b des Hochwassers von 2 m über letzterem, der Niveauunterschied sich $=$ 0,25 m findet. — Die Umwandlung von (100) in eine

1) *J. Boussinesq*, Eaux courantes, S. 415.

solche Form, daß t als Funktion $f(h)$ von h erscheint, liefert für die Fleetmündung ($x = 0$)

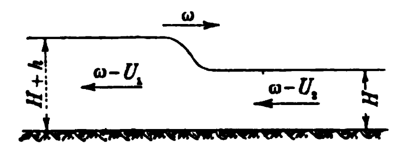
$$\frac{2\pi t}{T} = \arc\sin\frac{H+h-a}{b},$$

so daß gemäß (93 b) die Ebbe und Flut sich nach dem Gesetze

$$x = \sqrt{gH}\left(1+\frac{3h}{2H}\right)\left(t-\frac{T}{2\pi}\arc\sin\frac{H+h-a}{b}\right) \tag{101}$$

im Fleet fortpflanzen würde.[1]) Ebenso bliebe (93 a) für die Strömungsgeschwindigkeit gültig, wenn nicht dadurch, daß man bei dieser Behandlungsweise die Reibung vernachlässigt, die Sohle wagrecht voraussetzt und eine nicht ganz zutreffende Annahme über die Schwankungen des Meeresspiegels macht, die Abweichung des betrachteten Vorganges vom wirklichen in Strommündungen zu bedeutend wäre.

Der hemmende Einfluß der Reibung zeigt sich nach *M. Möller* auch bezüglich des Zusammenhanges zwischen Schnelligkeit, Geschwindigkeit und Erhebung. Herrscht seewärts von einer mit der Schnelligkeit ω stromauf rückenden Wellenstufe die Geschwindigkeit U_1 und binnenwärts die Geschwindigkeit U_2, so betragen die relativen Geschwindigkeiten gegenüber der Stufe (wenn ω, U_1 und U_2 in derselben Richtung gemessen werden) $\omega - U_1$ und $\omega - U_2$. *M. Möller*[2]) denkt sich nun die Stufe fest, wendet das *Bernoulli*sche Theorem (Gl. 16 u. 17) auf die Strömung an, obwohl nunmehr die rauhe Sohle bewegt erscheint, und hat bei einer Stufenhöhe h



$$(\omega - U_2)^2 - (\omega - U_1)^2 = 2gh, \tag{102}$$

wozu noch die Raumbedingung

$$H(\omega - U_2) = (H+h)(\omega - U_1) \tag{102 a}$$

tritt, worin H die Tiefe des von der Schwallstufe noch nicht erreichten Wassers bezeichnet. Wenn man in (102) auf Grund von (102 a)

$$\omega - U_2 = \frac{H+h}{H}(\omega - U_1) \quad \text{bzw.} \quad \omega - U_1 = \frac{H}{H+h}(\omega - U_2)$$

1) Ähnliche Aufgaben sind behandelt von *M. Lévy*, Leçons sur la théorie des marées 1, Paris 1898. Derselbe findet und löst unter anderem S. 189 die Differentialgleichung für die Wasserbewegung in einem wagrechten Kanal, der einen See mit ruhigem Spiegel mit einem flutenden Meer verbindet, wobei er annimmt, daß die Reibung der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional sei. Andere Berechnungen *Lévys* gehören, weil bei ihnen die Flutgesetze stärker in den Vordergrund treten, mehr in das geophysikalische Gebiet.

2) Zeitschr. f. Arch. u. Ingenieurwesen (2) 1 (1896), Sp. 479.

einsetzt, erhält man

$$\frac{(H+h)^2-H^2}{H^2}(\omega-U_1)^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{(H+h)^2-H^2}{(H+h)^2}(\omega-U_2)^2=2gh,$$

oder angenähert bei kleiner Stufenhöhe h

$$\frac{2hH}{H^2}(\omega-U_1)^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{2h(H+h)}{(H+h)^2}(\omega-U_2)^2=2gh,$$

oder

$$\omega-U_1=\sqrt{gH} \quad \text{bzw.} \quad \omega-U_2=\sqrt{g(H+h)}, \tag{102b}$$

somit den Zusammenhang zwischen (102) und der Angabe *Scott-Russells*. Bei kleiner Geschwindigkeit U_2 geht (102) in

$$U_1=\omega-\sqrt{\omega^2-2gh}$$

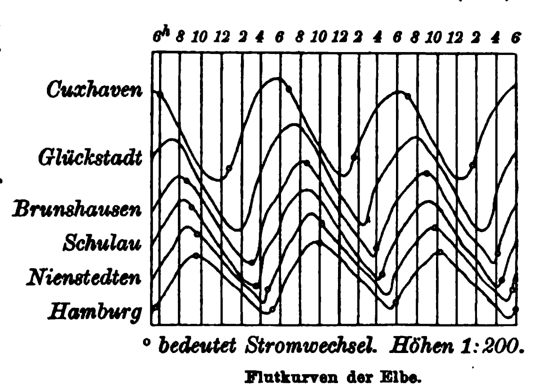
über.

Möller bemerkt hierzu, daß die bei Bremerhaven vorüberziehende Flutwelle von 3,3 m Flutdifferenz in einen Berg von $h=1,7$ m und ein Tal von 1,6 m zu zerlegen sein dürfte und daß die mittlere Schnelligkeit zwischen Knotenpunkt (Umrißwendepunkt) und Scheitel ungefähr 8 m sec^{-1} beträgt. Das gäbe

$$U_1=8-\sqrt{64-2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}7}=2{,}5\,\text{m sec}^{-1};$$

statt 2,5 m sec^{-1} betrage aber die Flutgeschwindigkeit nur 0,4 m sec^{-1}, während der Rest durch Reibung vernichtet werde. Hinzugefügt werde, daß auch bei den später zu besprechenden Wanderwellen Gl. (102) sich nicht zutreffend zeigt.[1])

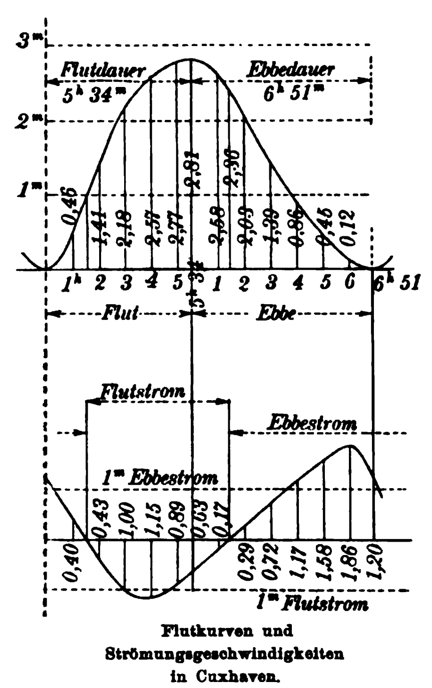
Im allgemeinen gilt für die Flutbewegung in Strommündungen das Folgende. Sie hat dieselbe *Tidedauer* (Schwingungsdauer) wie im offenen Meer, derart, daß in etwa 12 Stunden 25 Minuten gleiche Phasen wiederkehren. Die Umrißpunkte der Flutwelle wandern, wie dies Gl. (101) erkennen läßt, verschieden schnell stromauf, und zwar die höheren rascher als die tieferen, wodurch die Wellenform sich ändert und unsymmetrisch wird, und stromauf vom Scheitel eine steilere, stromab eine flachere Neigung annimmt. Durch die Reibung an der Stromsohle, welche die unteren Wasserschichten besonders zurückhält, wird die Formänderung befördert und durch die Gestalt der Mündung verschiedenartig beeinflußt. Wenn nun die Oberfläche an einem Uferpunkte vorbeirückt, macht sich deren Unsymmetrie auch in der Flut-



Flutkurven der Elbe.

1) *Ph. Forchheimer*, Wien, Ber. 112ª (1903), S. 1710.

kurve geltend, welche während der Flut ein rasches Ansteigen, während der Ebbe ein langsames Fallen aufweist, so daß die Ebbedauer die Flutdauer übertrifft. In Cuxhaven beträgt beispielsweise erstere im Mittel 6 Stunden 51 Minuten, letztere 5 Stunden 34 Minuten.[1]) Je weiter die Welle nach oben fortschreitet, desto mehr nimmt diese Ungleichheit zu, wie beistehende Abbildung der Flutkurven der Elbe zeigt.[2]) Ebbe und Flut bilden zusammen die *Tiden*[3]) oder *Gezeiten* und werden durch das *Hochwasser* und das *Niedrigwasser* getrennt. Die Flut- und Ebbeströmung haben entgegengesetzte Richtung und zwar im allgemeinen in der Richtung des Spiegelgefälles. Nur in der Nähe des Hoch- und des Niedrigwassers geschieht dies nicht, indem das *Kentern*[4]) der Ebbe- bzw. Flutströmung später erfolgt als die Erreichung des tiefsten bzw. höchsten Wasserstandes; die aufgespeicherte lebendige Kraft treibt dann eben das Wasser dem Gefälle entgegen. In Cuxhaven beispielsweise tritt der Flutstrom durchschnittlich 1 Stunde 30 Minuten nach Niedrigwasser, der Ebbestrom 1 Stunde 25 Minuten nach Hochwasser ein, wie nebenstehende Abbildung zeigt, in der unter der Flutkurve auch die Strömungsgeschwindigkeiten der einzelnen Tidezeiten angegeben sind.



Flutkurven und Strömungsgeschwindigkeiten in Cuxhaven.

Beträgt die Schnelligkeit der Flutwelle ω, die mittlere Flutströmungsgeschwindigkeit U und die Zeitdauer der Flut T also die Länge des Wellenberges $T\omega$, so wandert das Wasser nach *M. Comoy*[5]) stromauf, während eine Wellenstrecke $T\omega$ über dasselbe hinwegzieht, also, da der

1) *G. Tolkmitt*, Grundlagen der Wasserbaukunst, 2. Aufl. bearb. von *J. F. Bubendey*, Berlin 1907, S. 247, 250.

2) *L. Franzius* u. *G. de Thierry*, im Handb. d. Ingenieurwissens. 3. Bd., 3. Abt., 3. Aufl. Leipzig 1901, S. 227.

3) Das Wort ist niederdeutsch (es ist daher nicht englisch auszusprechen).

4) *G. v. Boguslawski* und *O. Krümmel*, Handb. der Oceanographie 2, S. 270, auf Grund von Daten von *Comoy* und *L. Franzius*.

5) *M. Comoy*, Étude pratique sur les marées fluviales et le mascaret, Paris 1881, S. 171.

Geschwindigkeitsunterschied $\omega - U$ beträgt, während der Zeit $T\omega : (\omega - U)$. Hierbei legt es einen Weg

$$\frac{T\omega U}{\omega - U} \tag{103}$$

zurück. Diese Formel ist angreifbar, insbesondere weil sie Parallelismus der Schichten mit einer scharfen Grenze zwischen Süß- und Seewasser voraussetzt. Tatsächlich findet aber eine Vermischung statt, wodurch das Süßwasser rascher stromab und dafür Seewasser stromauf befördert wird. [1])

Von dem sich stets ändernden Längenschnitt des Wasserspiegels sind die *Hochwasser-* und die *Niedrigwasserlinien* zu unterscheiden, welche die Umhüllung sämtlicher im Laufe einer Tide vorkommenden Spiegellinien bilden. Die Niedrigwasserlinie steigt immer, die Hochwasserlinie meistens landein, aber weniger stark als erstere; es kommt sogar vor, daß infolge großer Erweiterung des Stromes im Binnenlande oder solcher Engheit und Gewundenheit des Bettes, daß dieses der Flut große Hindernisse bietet, bei schwachem Oberwasser die Hochwasserlinie stromauf fällt.[2]) An der *Flutgrenze,* wo die Flutbewegung unmerklich wird, treffen beide Linien zusammen; der Flutstrom selbst hört schon unterhalb der Flutgrenze auf. Es kann in großen Strömen vorkommen, daß, ehe eine Flutwelle die Flutgrenze erreicht, bereits eine zweite Welle in den Strom eintritt; auf der Elbe und Weser[3]) sind z. B. zeitweilig zwei Flutwellen vorhanden, und auf dem Amazonenstrom, dessen Flutstrecke etwa 1000 km mißt, sollen derer sogar sieben bis acht gleichzeitig laufen.

Da während der Ebbe die Flutmassen wieder abfließen müssen, liegt im oberen Teil von Mündungsstrecken nicht nur das Hoch-, sondern auch das Niedrigwasser bei Springflut höher als bei tauber Flut[4]), während am Meer bei Springflut zwar das Hochwasser besonders hoch steigt, dafür aber das Niedrigwasser besonders tief sinkt. Die Spiegellinie schließt sich bei Niedrigwasser selbstverständlich der Flußsohle

1) *W. C. Unwin,* The Engineer 55 (1883[1]), S. 66; *R. W. P. Birch,* Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 78 (1884), S. 212; *R. Latham,* ebenda S. 222. *Hoech* führt auf das Eindringen schwereren Seewassers zurück, daß aus Dockhäfen einige Zeit nach dem Öffnen der Einfahrtsschleuse bei noch steigender Flut Wasser an der Oberfläche durch die Schleuße ausfließt. Hierüber Polemik mit *J. Volk,* Zentralbl. d. Bauverwalt. 22 (1902), S. 535; 25 (1905), S. 438; 29 (1909), S. 246.

2) *L. Franzius* u. *G. de Thierry,* a. a. O. S. 229, 230.

3) Ebenda S. 229, 230.

4) *M. Comoy,* Études pratique sur les marées fluviales et le mascaret, Paris 1881, S. 122, 282, 290 usw.

enger als bei Hochwasser an und die Mitte zwischen Hoch- und Niedrigwasser liegt bei Springflut höher als bei tauber.[1])

Da man den Einfluß der Reibung auf den Fortschritt und die Formänderung einer Welle nicht kennt, ist eine genaue Vorhersage, wie die Flutwelle nach Ausführung einer Stromregelung sich gestalten werde, nicht möglich. Um an der Weser die Flutkurven für das geplante Strombett zu ermitteln, begnügte sich *L. Franzius*[2]) daher mit der einfachen Formel (88 a) *Scott-Russells* $\omega = \sqrt{g(H+h)}$. Indem er die Flutkurve an der äußersten Mündung kannte, zerlegte er sie der Zeit nach in Teile, berechnete für jeden Teil die Fortschrittsschnelligkeit ω und hieraus die Fortschrittsdauer bis zu einem benachbarten Flußpunkte und erhielt durch graphisches Auftragen die Flutkurve der letzteren Stelle. So wurde schrittweise fortgefahren. Doch gab dies nur die Flutkurven der Flutzeit, während deren Ebbehälften nur nach Analogie der alten Kurven des bestehenden Stromes entworfen werden konnten. Sicher ist es, daß je ungehinderter die Flutwelle sich bewegen kann, eine desto größere Wassermenge mit der Flut nach oben und mit der Ebbe zurückströmt, das Bett ausbildend und erhaltend. Als vorzüglich in Betracht kommende Hindernisse sind scharfe Krümmungen, Spaltungen durch Inseln oder hohe Sandbänke, Ungleichmäßigkeit in den Querschnitten, und zwar sowohl zu große und zu geringe Breite, und endlich Unebenheit des Bettes und der Ufer zu nennen.

Es ist schon oben bemerkt worden, daß bei der Flutbewegung kein Parallelismus der Schichten herrscht, das heißt, daß sich die Wasserteilchen eines Querschnittes ungleich schnell bewegen. So haben *Robert Stevenson*[3]), *P. Caland*[4]) und *W. R. Browne*[5]) beobachtet, daß bei Ebbeströmung an der Oberfläche in der Tiefe Stillstand oder Flutströmung besteht, und *B. Latham*[6]) berichtet, daß in der Themse bei Ebbe seicht tauchende Schwimmkörper rascher als tieftauchende schwammen, welche Strömungsweise übrigens der in gewöhnlichen Läufen entspricht. Während der Flut wanderten jedoch die tieftauchenden Schwimmer rascher als die anderen stromauf. Der Umstand, daß das Binnenwasser oben rascher

1) *David Stevenson*, The principle and practice of canal and river engineering 3 ed. Edinburgh 1886, S. 95.

2) *O. Gercke, W. Nienburg, L. Franzius,* Projekt zur Korrektion der Unterweser, Leipzig 1882 u. Handb. d. Ingenieurwissenschaften, 3. Bd., 3. Abt., 3. Aufl., Leipzig 1901, S. 261. *B. Latham* fand *Scott Russells* Formel an der Themse stimmend, Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 78 (1884), S. 227.

3) *David Stevenson,* The principles etc., S. 133, 148.

4) Allgem. Bauzeitung 29 (1864), S. 108.

5) Minutes of Proceedings of the Inst. of Civ. Eng. 66 (1881), S. 20.

6) Ebenda, 78 (1884), S. 227.

als unten fließt, äußert sich also bei der Flutbewegung darin, daß letztere an der Oberfläche mehr als in der Tiefe durch das Binnenwasser gehindert wird.

61. Die Sprungwelle. Eine eigentümliche Form der Flutwelle bildet die *Sprungwelle* (Sturzwelle, Stürmer, Bore, Mascaret), welche in trichterförmigen, sich ziemlich gleichmäßig verjüngenden, bei Niederwasser seichten Flußschläuchen unter der Einwirkung hoher Flut entsteht. Bei abnehmender Breite wächst nämlich nach *J. Scott-Russell*[1]) die Wellenhöhe nahezu wie der reziproke Wert der Wurzel aus der Breite. Die Verjüngung des Bettes steigert also die Wellenhöhe und damit den Schnelligkeitsunterschied zwischen Scheitel und Fuß und befördert damit das Brechen[2]), welches allerdings nach *Scott-Russell* und *Bazin*, wie oben S. 175 bemerkt, auf alle Fälle erfolgen soll, wenn die Erhebung über dem alten Ruhespiegel der Tiefe unter demselben ungefähr gleich wird. Auch das Ansteigen der Sohle verursacht nach *Scott-Russell* eine geringe Erhöhung des Schwalles, so seien zwei Stellen, die sich über 10 cm tiefem Wasser 4,6 bzw. 2,5 cm erhoben, auf 5,6 cm bzw. 3 cm Erhebung gewachsen als sie in 5 bzw. 3 cm tiefes Wasser gelangten.[3]) Am besten studiert ist die Sprungwelle der Seine. *H. L. Partiot*[4]) beschreibt einen hier beobachteten „Mascaret“ von 2,18 m Höhe, dem 5 oder 6 Wogen mit den Scheiteln etwa 1,5 bis 2 m über den Zwischentälern folgten; $2^1/_4$ Minuten nach dem Durchgang der Sprungwelle stand das Wasser 1,68 m höher als zuvor. Stromteilungen können zu einer Spaltung der Sprungwelle Anlaß geben, die geteilten Wellen können sich bei Wiederbegegnung durchdringen und von den Ufern kann die Welle in Form heftiger Wallungen zurückgeworfen werden. *H. Bazin*[5]) hat die Angaben *Partiots*, sowie ältere von *Poirée* nachgerechnet und die Formel (92) $\omega = \sqrt{g(H+h)} - U$ bestätigt gefunden. Es war z. B. die Ebbegeschwindigkeit $U = 0{,}4$ m sec die ursprüngliche Tiefe $H = 3{,}3$ m, die Wellenerhebung $h = 0{,}4$ m, wonach $\omega = 5{,}62$ zu erwarten war, was von der gemessenen Schnelligkeit von 5,36 m sec^{-1} wenig abweicht. *H. Bazin* bemerkt weiter, daß in der Zeiteinheit die Ebbeströmung die Menge HU führt und der Schwall in der Zeiteinheit die Menge $h\omega$ erfordert. Je nachdem $h\omega \gtrless HU$ ist,

1) Report of the 7th meeting of the British Association 1837, London 1838, S. 426.

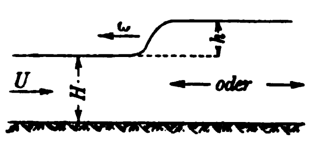
2) Vgl. oben *A. Ritters* Gl. (94 i).

3) Report of the 14th meeting of the British Association 1844, London 1845, S. 354.

4) Ann. d. ponts et chauss. (4) 1 (1861[1]), S 17.

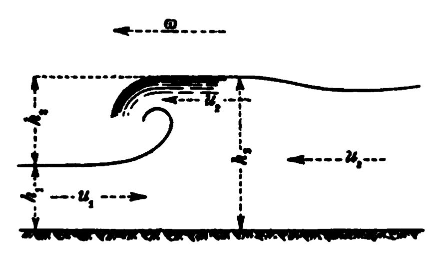
5) Recherches hydrauliques, 2, S. 144.

finde demnach beim Vorübergang des Mascaret eine Umkehr der Strömungsrichtung statt oder nicht. Beides ist schon beobachtet worden.



Der Einfluß der ursprünglichen Geschwindigkeit bewirkt auch, daß, wie *Partiot* bemerkt, die Sprungwelle an den Ufern (bei seiner Beobachtung z. B. 8 Minuten) früher als in der Flußmitte auftritt.

Nach *M. Möller*[1]) ist bei einer mit ω fortschreitenden Sturzwelle die Geschwindigkeit u_3 des h_3 tiefen Flutstromes von der u_2 des überschäumenden Wassers unabhängig und gilt für die relativen Geschwindigkeiten für die ruhend gedachte h_2 hohe Sprungwelle (vgl. oben die Ableitung der Gl. (102a)) bei einer Geschwindigkeit u_1 des h_1 tiefen Elbestromes die Kontinuitätsbedingung



$$(u_1 + \omega)h_1 = (\omega - u_3)h_3,$$

oder

$$\omega(h_3 - h_1) = u_3(h_3 - h_1) + (u_1 + u_3)h_1$$

oder

$$\omega = u_3 + (u_1 + u_3)\frac{h_1}{h_3}. \tag{104}$$

Außer der Seine[2]) zeigen neben anderen Flüssen auch die Garonne, Severn, der Amazonenstrom und besonders der Tsientangkiang[3]) die Erscheinung des Bore. Im Tsientangkiang naht diese als eine bis zu 3,7 m hohe überstürzende Wasserwand, deren Brausen man $2^1/_4$ Meilen weit hört. Jede Schiffahrt ist zu der Zeit am Fluß ausgeschlossen. Nach der Woge eilt der Flutstrom aufwärts, und diesen benutzen die Schiffe, welche außen in See warten; auch setzt sich meistens das Steigen des Wassers noch fort, denn der Unterschied zwischen Niedrig- und Hochwasser kann 6,5 m erreichen. Auch auf der Ems ist die Sprungwelle vor etwa 50 Jahren häufiger vorgekommen und trotz vermehrter Wassertiefe jetzt noch nicht ganz verschwunden.

62. Wanderwellen. Bildet sich in einem Wasserlaufe von geringem Gefälle und genügender Tiefe eine Welle, so bewirkt der Gefällsunter-

1) Zeitschr. f. Arch. u. Ing.-Wesen (2) 2 (1897), Sp. 204.

2) *H. L. Partiot,* Ann. d. ponts et chauss. (4) 1 (1861[1]), S. 17; *M. Comoy,* Étude pratique sur les marées fluviales, Paris 1881, S. 180, 293, 300, 319, 349; Geographical Journal 19 (1902). S. 92.

3) *W. U. More,* Report on the Bore of the Tsien-Tang-Kiang, London 1888; ders. further Report, London 1893, auch *Schott,* Ann. der Hydrogr. u. maritimen Meteorologie 24 (1896), S. 466.

schied zwischen dem stromaufgekehrten Teil AB des Wellenberges und dem stromabgekehrten Teil BC, daß weniger Wasser gegen B zuläuft, als von B abfließt, wodurch der Berg wieder einsinkt. Bei geringer Tiefe und steilem Gefälle verliert aber, wie *Forchheimer* bemerkt, ein kleiner Gefällswechsel an Bedeutung[1]), so daß, weil Durchflüsse unter sonst gleichen Umständen mit der Tiefe wachsen, etwas Ähnliches wie bei der Entstehung eines *Scott-Russell*schen Schwalles geschieht, von welchem sich die Wanderwellen allerdings durch ihre mehr sägezahnartige Form, mit steilem, brechendem Kopf, unterscheiden.

Es ist seltsam, daß diese Bewegungsweise bis in die neueste Zeit unbeachtet blieb, denn die erste Erwähnung geschah 1884 durch *G. Maw*[2]), dem sie am Thuner See in einem gepflasterten Gerinne von Trapezquerschnitt und dem Gefälle 1 : 9 im oberen und 1 : 12 im unteren Teile auffiel. Unabhängig hiervon entdeckte sie *Th. Christen*[3]), als er die „kritische Geschwindigkeit" bei offenem Spiegel ermitteln wollte. Statt des erwarteten gleichförmigen Fließens trat eine intermittierende Bewegung ein, die er später in einer Wildbachschale von 0,1 Neigung (vielleicht der *Maws*) am Thuner See und einer anderen von 0,05 bis 0,15 Neigung am Brienzer See wiederfand. Zunächst ohne Kenntnis seiner Vorgänger untersuchte *Ph. Forchheimer* Wanderwellen am Schmittenbach in Zell am See, wo bei nicht zu hohem Wasserstand der Spiegel einen sägeförmigen Längenschnitt annimmt. Dieser Wildbach besitzt auf 730 m wagrechte Länge und 35,4 m Höhe eine gleichmäßig geneigte glatte Sohle, die auf den oberen 600 m mit Bruchsteinpflaster, auf den unteren 130 m bis zum See durch einen Holzbelag versichert ist und sich geschiebefrei erhalten hat. Letzteres ist von Belang, da sich bei rauher unregelmäßiger Oberfläche, wie bei den natürlichen Wildbetten im Gebirge keine Wanderwellen zeigen. Am Beobachtungstage folgten einander die geraden Wellenkämme in unregelmäßigen Zeitintervallen von 4 bis 20 Sekunden; wenn ein solcher schäumender Kamm an die Mündung gelangte, stürzte er mit starkem Rauschen in den See. Die größte Wellenlänge wurde zu 45 m bestimmt, während die abfallenden Kopfflächen nur 10 bis 12 cm Grundrißbreite aufwiesen. Häufiger als in Wildbächen hat man Gelegenheit Wanderwellen in steilen Wasserleitungen anzutreffen, wenn das Wasser die Rohre nicht füllt, ferner in

---

1) Wien Ber. 112²ᵃ (1903), S. 1697 = Z. f. Gewässerk. 6 (1904), S. 321.

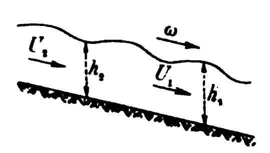
2) The Engineer 58 (1884²), S. 294. In Brit. Assoc. Rep. 74 (1904), London 1905, S. 301, woselbst Abbildung des Grünbaches, wurde der Name *rollwaves* vorgeschlagen.

3) *Th. Christen,* Das Gesetz der Translation des Wassers, Leipzig 1903, S. 132; vgl. oben S. 50.

Wasserfällen, in denen sie sich in Form abgesonderter Schleier zu erkennen geben. Zur künstlichen Hervorrufung genügt eine gerade Rinne, die z. B., weil die Wellen zu ihrer Ausbildung eine gewisse Lauflänge erfordern, bei 0,16 oder mehr Gefälle mindestens 6 m lang sein soll.

Die geringste Sohlenneigung bei Wanderwellenbildung fand *Ph. Forchheimer*[1]) im Triebener Bach in Obersteiermark, dessen abgetreppte, 8 m breite Sohle Flächen von 0,02 Gefälle aufweist. Am Beobachtungstage zeigte sich eine dieser Flächen von 23 m Länge in der Grenzlage, in welcher Wanderwellen nur zeitweise entstehen. Damals war die Tiefe 28 bis 29 cm, die Geschwindigkeit hineingeworfener Schwimmer etwa 2,24 m sec^{-1}, die Schnelligkeit 3,19 m sec^{-1}. — Der Wildbach Žvironjak[2]) bei Cattaro hat eine gepflasterte, an der Sohle 2 m breite Schale von Trapezquerschnitt und besitzt zwischen einer Grundschwelle und dem Meer nachstehende Gefälle: 80 m zu 0,08, 301 m zu 0,06, 120 m zu 0,05, 60 m zu 0,038 und 205 m zu 0,025. Wenn die Tiefe zuoberst 5 bzw. 10 cm betrug, zeigten sich Wanderwellen 80 bzw. 40 m unter der Grundschwelle, doch waren sie im ersten Falle an der Mündung kaum sichtbar. Stieg die oberste Tiefe auf 25 cm (und hiermit die unterste auf 50 cm), so hörte jede Wellenbildung auf.

Bei der Bewegung wandert[3]) der sägeartige Längenschnitt stromab, wobei sich die Zahnweite (der Abstand der Wellenköpfe) während des Fortschrittes nur wenig vergrößert. Durch Einguß von Farbstoffen oder durch Schwimmkörper kann man sich leicht überzeugen, daß die Wellenschnelligkeit die Strömungsgeschwindigkeit übertrifft. Bezeichnet ω die Schnelligkeit, U_1 die Strömungsgeschwindigkeit der tiefsten, U_2 die der seichtesten Stelle, so beträgt die relative Geschwindigkeit des Wassers gegenüber der Welle $\omega - U_1$ bzw. $\omega - U_2$. Wenn nun der ganzen Masse eine rückläufige Geschwindigkeit ω erteilt, d. h. die Säge stillstehend gedacht wird, so läuft das Wasser mit den Geschwindigkeiten $\omega - U_1$ und $\omega - U_2$ stromauf.



Der Durchfluß muß dabei unter der unveränderlichen, fixen Oberfläche überall gleich groß sein. Bedeutet dann weiter h_1 die größte und h_2 die kleinste Tiefe, so gilt also

$$h_1(\omega - U_1) = h_2(\omega - U_2). \tag{105}$$

Hieraus folgt sofort, da $h_1 > h_2$ ist, daß $(\omega - U_1) < (\omega - U_2)$ oder $U_1 > U_2$ sein muß. Wenn eine Welle eine Wasserpartie einholt, so springen deren Oberflächenteilchen von der Höhe h_2 zur Höhe h_1 empor, während das Wasser zugleich eine Beschleunigung von U_2 auf U_1 erfährt. Endigt

1) Bisher unveröffentlicht.

2) *F. Weltzebach*, bisher unveröffentlicht.

3) *Ph. Forchheimer*, Wien Ber. 112^2a (1903), S. 1700 = Z. f. Gewässerk. 6 (1904), S. 323.

das Gerinne mit freiem Ausfluß, so geht dieser demnach stoß- oder schußweise vor sich. Bei vollkommener Ausbildung, wie sie bei sehr steilen Gerinnen und bei Wasserfällen eintritt, wird h_2 nahezu Null. Dann löst sich der Schwall in Zungen auf, die beschleunigt abwärts stürzen und für die $U_1 = U_2 = \omega$ ist. Bei geringem Unterschiede von U_1 und U_2 ist hingegen näherungsweise

$$h_1 = \frac{U_1^2}{c^2 J}, \quad h_2 = \frac{U_2^2}{c^2 J}$$

und wird (105) näherungsweise zu

$$U_1^2(\omega - U_1) = U_2^2(\omega - U_2)$$

oder

$$\omega = \frac{U_1^3 - U_2^3}{U_1^2 - U_2^2} = \frac{U_1^2 + U_1 U_2 + U_2^2}{U_1 + U_2},$$

somit, da U_1 wenig von U_2 abweicht, ungefähr

(105a) $$\omega = 1{,}5\, U_1 = 1{,}5\, U_2.$$

Für sehr seichte Rinnsale, für die nach Gl. (50) U proportional mit $h^{0,7}$ wächst, erhält man statt dessen für geringe Geschwindigkeitsunterschiede

(105b) $$\omega = 1{,}7\, U_1 = 1{,}7\, U_2.$$

Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Wanderwellen, die auch bei ihrem Entstehen mitwirkt, ist die, daß höhere rascher als niedrigere wandern, also letztere einholen, worauf beide Wellen zu einer noch höheren und schnelleren verschmelzen. Eine Regel für die Entstehung kann man aus dem *Reynolds*schen Ähnlichkeitsgesetz ableiten, indem man voraussetzt, daß die Wanderwellen wesentlich durch die Schwerkraft hervorgerufen werden. Dann sind die Fälle, in denen sie sich bilden, untereinander nach (22b) durch die Bedingung

$$f_l = f_h = f_u^2$$

verknüpft oder erfordert die Erscheinung, daß $U^2 : h$ einen bestimmten konstanten Wert überschreite. Jedenfalls erfordern Wasserwellen ein steiles Gerinne, während die Sturzwelle (Bore) über wenig geneigter, ja selbst über ansteigender Sohle entsteht.

Einen Grenzfall beobachtete *Ph. Forchheimer*, wie schon erwähnt, an dem in Bruchsteinen gepflasterten Triebener Bach. Die Oberflächengeschwindigkeit betrug 2,24 m sec^{-1}, daher nach *Bazin-Boussinesq* (Gl. 62d) die mittlere Geschwindigkeit U ungefähr 1,68 m sec^{-1}, wonach Wanderwellen über Bruchsteinpflaster entstehen, wenn $U^2 : h > 10$ m sec^{-2} ist. Dabei muß man allerdings noch fordern, daß die Unebenheiten der Sohlen der verschiedenen Läufe sich wie deren h verhalten.

63. Hochwasserverlauf in Flüssen. Bei Anschwellungen, wie sie Hochwässer hervorrufen, wandert der Schwall unter fortgesetzter Veränderung der Oberfläche stromab; dabei hat diese eine so geringe Krümmung und geschieht die Umwandlung so langsam, daß es einerseits nicht gestattet wäre, bei rechnerischer Verfolgung des Vorganges die Reibung zu vernachlässigen, und daß man andererseits die Gesetze der stationären und für zylindrische Flußstrecken sogar die der gleichförmigen Bewegung anwenden darf. Bezeichnet x die (stromab zunehmende) Länge des Flusses, t die Zeit, Q den Durchfluß (Wassermenge in der Zeiteinheit) und fährt man mit der Schnelligkeit ω auf dem Flusse stromab, so gelangt man im allgemeinen von einer Stelle, an der Q durchfließt, zu einer solchen mit abweichendem Durchfluß, wobei gemäß der gewählten Bezeichnung

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}\omega + \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{106}$$

sein muß. Bewegt man sich aber so rasch wie Q selbst, bedeutet also ω die Schnelligkeit, mit welcher ein *bestimmter Durchfluß* (nicht zu verwechseln mit dem Wasser selbst) abwärts wandert, so ist

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

und gilt daher für die Schnelligkeit des Durchflusses[1])

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial x}\omega + \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{106a}$$

Nun muß einerseits der Kontinuität wegen die Zunahme der in der Längeneinheit des Flusses enthaltenen Wassermenge dem Unterschied von Zu- und Ablauf gleichen oder, wenn

b die Breite des Wasserspiegels,

H die größte Tiefe (Höhe des Spiegels über der sogen. Stromrinne)

bedeutet,

$$b\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{106b}$$

sein,[2]) und ist andererseits, weil das Gefälle J sich mit der Zeit kaum

1) Diese Formel rührt von *Kleitz* her, welcher sie nach *Graeff*, Mém. prés. par div. sav. 21 (1875), S. 581 zuerst 1858 in einer autographierten Schrift aufstellte. *Kleitz* veröffentlichte sie dann in den Ann. d. ponts et chauss. (5) 14 (1877[2]), S. 146.

2) *Kleitz* vermutet a. a. O. S. 142, daß *A. J. Dupuit*, in seinen Études theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux, 2. éd., Paris 1863, § 102, S. 149 diese Beziehung zuerst abgeleitet habe.

ändert, also Q an der betreffenden Stelle wesentlich Funktion des Wasserstandes ist,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{106c}$$

8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Entfernung km

Passau

Engelhardtszell 18,0

Aschach 48,2

Linz 25,2

Grein 56,1

Ybbs 20,6

Melk 21,9

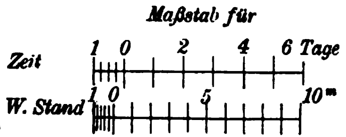
Stein 33,0

Tulln 40,1

Wien 34,4

Preßburg 60,5

8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30



Daß Q in der Tat wesentlich von h abhängt, geht daraus hervor, daß schon bei rechteckigem Querschnitt Q so wie $h^{3/2}$, bei anderen Querschnitten aber noch stärker wächst, während Q mit $J^{1/2}$ proportional ist. Zudem pflegt sich die Tiefe bei Hochwasser zu vervielfachen. Beispiels-

weise[1]) zeigte ein großes Hochwasser der Donau 1899 oberhalb Linz auf einer 65,8 km langen Strecke, die nur unwesentliche seitliche Zuflüsse erhält, folgende Höhenverhältnisse (alle Maße sind m)

	Engelhartzell	Linz	Höhenunterschied
Spiegelkote vor dem H. W.	280,52	250,36	30,16
Höchste Kote des H. W.	288,21	256,90	31,31

Es folgt aus (106a) durch Vereinigung mit (106b) und (106c) für die Schnelligkeit der Wanderung[2]) von Q

$$(106\text{d}) \qquad \omega = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\frac{\partial Q}{\partial x}} = \frac{1}{b}\frac{\partial Q}{\partial H}.$$

Bedeutet ferner U die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, F den Querschnitt, so ist

$$Q = UF,$$

also

$$dQ = U dF + F dU = U b dH + F dU$$

und

$$\frac{dQ}{dH} = Ub + F\frac{dU}{dH},$$

so daß aus (106d) die neue Gleichung

$$(107) \qquad \omega = U + \frac{F}{b}\frac{dU}{dH}$$

hervorgeht[3]), welche raschen Einblick darüber gewährt, ob die Durchflußschnelligkeit ω größer oder kleiner als die Strömungsgeschwindigkeit U ist, und zeigt, daß meist ersteres der Fall. Häufig faßt man jedoch, wo das Überschwemmungsgebiet von der Flußrinne scharf getrennt ist, weniger logisch nur die in der Flußrinne herrschende mittlere Geschwindigkeit als Strömungsgeschwindigkeit auf, und sagt dann, daß die Schnelligkeit sie nicht erreiche, während tatsächlich $\omega > U$, nämlich $> \frac{Q}{F}$ ist.

1) Beiträge zur Hydrographie Österreichs, herausgeg. v. k. k. hydrographischen Zentralbureau (*E. Lauda*), 4. Heft, Die Hochwasserkatastrophe des Jahres 1899, Wien 1900, S. 125, 126. — Über Hochwässer, insbesondere in deutschen Strömen, siehe ferner *R. Jasmund* im Handb. d. Ingenieurwissensch., 3. Wasserbau, 1. Bd., 4. Aufl., Leipzig 1911, S. 302 u. f.; *H. Struve,* Einfluß von Niederungen und Eindeichungen, Diss., Halle a. S. 1911.

2) Abgeleitet von *Ph. Breton* (Sur les barrages de retenue des graviers dans les gorges des torrents, Paris 1867, Kap. 2) und von *Graeff,* Paris, Mém. prés. par div. sav. 21 (1875), S. 580.

3) *Kleitz,* Ann. d. ponts et chauss. 1877², S. 147; *Graeff,* Mém. prés. par div. sav. 21 (1875), S. 579; *Boussinesq,* Eaux courantes, S. 476.

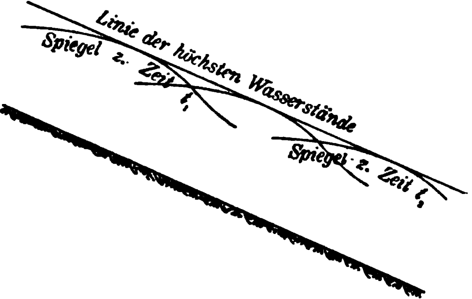
Für die jeweilig höchsten Wasserstände, also für den Vorübergang der Wellenkuppe, ist

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

also gemäß (106b) auch $\frac{dQ}{dx} = 0$, daher bildet

$$Q = \text{konst.} = Q_{\max} \tag{108}$$

die Gleichung der Verbindungslinie der zeitlich aufeinanderfolgenden Scheitel des wandernden Hochwassers, dessen wechselnde Höhe dann, wenn man von etwelchen unterwegs erfolgenden Zuflüssen absieht, vom Gefälle und der Bettgestalt der verschiedenen Flußpunkte, abhängt. In erster Annäherung kann man (108) festhalten, d. h. annehmen, daß derselbe Hochwasserdurchfluß $Q_{\max}$ durch alle Querschnitte strömt und daß Uferbauten, Eindämmungen u. dgl. ihn nicht verändern.



Trägt[1]) man unter dieser Annahme für verschiedene Uferpunkte die Zeit als Abszisse, den Durchfluß als Ordinate auf, so erhält man Kurven gleichen Scheitelkrümmungshalbmessers. Das geht daraus hervor, daß gemäß (106d) zwei gleiche Durchflüsse $Q_{\max} - \delta Q$, von denen sich der eine etwas vor, der andere etwas hinter dem Scheiteldurchfluß $Q_{\max}$ befindet, dieselbe Flußstrecke gleich schnell durchwandern. An allen Flußstellen kehrt daher sowohl dasselbe Zeitintervall δt zwischen den beiden $Q_{\max} - \delta Q$, wie auch derselbe Durchflußunterschied δQ wieder, daher derselbe Krümmungsradius

$$r = \frac{(\delta t)^2}{8\,\delta Q} \tag{108a}$$

der Kurvenstellen mit der Ordinate $Q_{\max}$. Auch durch Strombauten erleidet r im allgemeinen keine Änderung.

Da die Q mit der Schnelligkeit ω fortschreiten, ist die Zeit, die zwischen dem Auftreten eines Q im Punkte Null und dem eines gleichen Q im Punkte x verstreicht (s. (106d)),

$$\Delta t = \int_0^x \frac{dx}{\omega} = \int_0^x \frac{b}{\frac{\partial Q}{\partial H}}\,dx.$$

1) *Ph. Forchheimer*, Z. d. öst. I. u. A.V. 59 (1907), S. 326.

Hierin ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen als Funktion von x und Q auszudrücken und Q bei der Integration als unveränderlich zu betrachten. Gilt für den Einlauf im Punkte $x = 0$

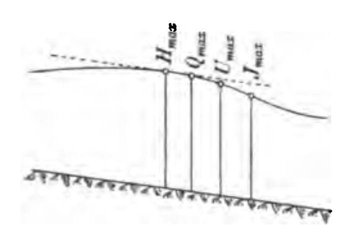
(109) $$Q = \varphi(t) \quad \text{oder} \quad t = \psi(Q),$$

so vergeht also von der Zeit Null bis zum Auftreten des Durchflusses Q im Punkte x die Zeit

(109a) $$t = \psi(Q) + \Delta t = \psi(Q) + \int_0^x \frac{b}{\frac{\partial Q}{\partial H}} dx.$$

Letztere Gleichung[1]) gibt den ganzen Wasserspiegel zu jeder Zeit an und stellt somit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (106a) bei gleichzeitigem Bestehen der Beziehung (109) dar. Sie kann, da b und H Funktion des Durchflusses Q und des Ortes x sind, so aufgefaßt werden, als ob sie nur die Veränderlichen t, x und Q enthielte. Gibt man dann noch t einen unveränderlichen Wert, so stellt (109a) die Kurve vor, die für diesen Zeitpunkt die x als Abszissen und die Q als Ordinaten besitzt.

Wenn der Schwall über einen Flußpunkt hinweg zieht, erreicht offenbar zuerst das Gefälle sein Maximum, dann hat, weil die Tiefe noch wächst, obwohl das Gefälle schon abnimmt, die Geschwindigkeit ihren Größtwert, endlich hat ihn der Durchfluß, weil er sowohl mit der Geschwindigkeit wie mit der Tiefe zunimmt. Bei ursprünglich gleichmäßigem Flußgefälle und -querschnitt sinkt, wie später gezeigt werden wird, der Scheitel, nämlich der Spiegelpunkt, dessen Tangente dieselbe Neigung wie die Sohle hat, beständig tiefer.



Das Wasser erreicht daher schon bevor der Scheitel über den betreffenden Flußpunkt hinweggegangen ist, seinen höchsten Stand. Die Tiefe ist daselbst in diesem Augenblicke unveränderlich, das Gefälle bereits im Abnehmen, also auch der Durchfluß in Abnahme, während etwas vorher die Strömung stationär erfolgt, daher nach (106)

$$\frac{dQ}{dt} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}\omega + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

ist. Durch Vereinigung mit Gl. (106b), die man auch

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

1) Sie stammt von *J. Boussinesq*, Eaux courantes, S. 472. Die hier gegebene Ableitung ist von *Ph. Forchheimer*, Z. d. öst. I. u. A.V. 59 (1907), S. 326.

schreiben kann, erhält man

$$\omega = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\frac{\partial Q}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial t}}$$

oder, weil während der stationären Strömung $\frac{\partial Q}{\partial t}$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ unendlich klein sind,[1])

$$\omega = \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} : \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \tag{110}$$

Den bisher entwickelten Ausdrücken liegen keinerlei Annahmen über das Sohlengefälle und kein bestimmtes Bewegungsgesetz zugrunde. Sie gelten daher recht allgemein. Wird nun gemäß *de Chézy* oder *Hermanek* für einen rechteckigen Querschnitt

$$U = c H^{1/2} J^{1/2} \quad \text{oder} \quad = c H^{3/4} J^{1/2}$$

gesetzt, so nimmt (107) die Form

$$\omega = U + H \frac{c J^{1/2}}{2 H^{1/2}} \quad \text{oder} \quad U + H \frac{3 c J^{1/2}}{4 H^{1/4}}$$

oder

$$\omega = \frac{3}{2} U \quad \text{bzw.} \quad = \frac{7}{4} U \tag{110a}$$

an. Ähnliche Ausdrücke kann man für verschiedene Querschnitte ableiten und erhält so nachstehende Zahlen, wenn $\bar{u}_{max}$ die mittlere Geschwindigkeit über der Stromrinne bedeutet:

		Rechteck	Parabelfläche	Dreieck
$\omega : U$	nach *de Chézys* Formel	$^3/_2$	$^4/_3$	$^5/_4$
$\omega : U$	„ *Hermaneks* „	$^7/_4$	$^3/_2$	$^{11}/_8$
$\omega : \bar{u}_{max}$	„ *de Chézys* „	1,5	1,088	0,884
$\omega : \bar{u}_{max}$	„ *Hermaneks* „	1,75	1,107	0,818

Hiernach ist in den betrachteten Querschnitten die Wellenschnelligkeit zwar stets größer als die mittlere Geschwindigkeit U des ganzen Profils, aber unter Umständen kleiner als die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}_{max}$ der Stromstrichlotrechten.

Aus (110a) geht hervor, daß der Schwall das Bestreben hat, dort schneller fortzuschreiten, wo die Geschwindigkeit größer ist, mit andern Worten im „Stromstrich" vorzueilen. Das bewirkt bei *steigendem* Wasser eine — schon von *D. Guglielmini* — beobachtete Wölbung des Spiegels, die unter Umständen recht bedeutend sein kann. So betrug im

1) Diese Beziehung wurde zuerst von *Kleitz* 1858 in einer autographierten Schrift, dann Ann. d. ponts et chauss. (5) 14 (1877²), S. 156, 196 gegeben.

Tronto bei Martin Sicuro im Oktober 1897 nach *G. Crugnolas*[1]) Messungen vor der Ausuferung die Erhöhung rd. 40 cm bei rd. 100 m Flußbreite und sei sie im Frühjahr 1885 55 cm gewesen. *G. Lorenzo* hat im Po bei Causale Monferrato 1857 sogar 1,5 m Überhöhung bei 300 m Flußbreite ermittelt. Weniger häufig ist die gegenteilige Erscheinung, die Einsenkung bei sinkendem Wasser bemerkt worden, jedenfalls deswegen, weil Hochwässer viel langsamer zu sinken als anzusteigen pflegen.

64. Verflachung und Formänderung der Hochwasserwelle. Bisher wurde angenommen, daß die durch den Hochwasserschwall selbst verursachten Gefällsänderungen dem ursprünglichen Gefälle gegenüber vernachlässigbar sind. Bei stark gekrümmten Wellen ist dies aber nicht der Fall. Bedeutet[2]) J das ursprüngliche Spiegelgefälle, so ist bei zylindrischem Bett, wenn H nunmehr die mittlere Tiefe bezeichnet, nach *de Chézys* Formel

$$Q = F \cdot c H^{1/2} \left(J - \frac{\partial H}{\partial x}\right)^{1/2}$$

oder

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = c\left(J - \frac{\partial H}{\partial x}\right)^{1/2} \frac{\partial (F H^{1/2})}{\partial x} - c F H^{1/2} \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}}{2\left(J - \frac{\partial H}{\partial x}\right)^{1/2}}.$$

Für die Wellenkuppe vereinfacht sich das, weil für sie sowohl $\frac{\partial H}{\partial x}$ als auch $\frac{\partial F}{\partial x}$ $\left(\text{aber nicht völlig } \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ verschwindend klein werden, zu

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{c F H^{1/2}}{2 J^{1/2}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{Q}{2J} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{111}$$

worauf übrigens auch *Hermaneks* Formel führt. Da nun die Kontinuität verlangt, daß (vgl. (106b))

$$b \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

sei, folgt für die Wirkung der Spiegelkrümmung, die zur Wirkung einer etwaigen Betterweiterung — oder — -verengung, hinzukommt,

$$b \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{2J} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}.$$

Der partielle Differentialquotient gibt im allgemeinen nur die Wasser-

---

1) Bezüglich Literatur und weitere Daten sei auf *G. Crugnola*, Correlazione fra d'alveo di un fiume e l'acqua che vi corre, Milano 1890, S. 22, auch deutsch Z. f. Gewässerk. 4 (1902), S. 289 verwiesen.

2) *Ph. Forchheimer,* Z. d. öst. I. u. A.V. 59 (1907), S. 330.

standsänderung an Ort und Stelle an, aus der die Hebung oder *Senkung* des *Scheitels während seines Fortschrittes* durch den Ansatz

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \omega \frac{\partial H}{\partial x}$$

(vgl. z. B. die Begründung von (106)) hervorgeht; für die Wellenkuppe ist nun $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, daher für sie $\frac{\partial H}{\partial t}$ mit $\frac{dH}{dt}$ identisch und

$$\frac{dH}{dt} = \frac{Q}{2bJ} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{111a}$$

Da der Scheitel mit der Schnelligkeit wandert, benötigt er für eine Strecke Δx die Zeit $\frac{\Delta x}{\omega}$, während welcher er seine Höhenlage über der mittleren Sohle um

$$-\Delta H = \frac{dH}{dt} \cdot \frac{\Delta x}{\omega} = -\frac{Q}{2bJ} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{\omega} \tag{111b}$$

verändert. Nun hätte die Ermittlung von $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$, welcher Ausdruck zudem von dem Längenriß der Sohle abhängt, seine praktische Schwierigkeit; er werde daher durch einen anderen ersetzt. Es ist,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x},$$

demnach, wie die Differentiation nach x lehrt,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial H} \cdot \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial H^2} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2$$

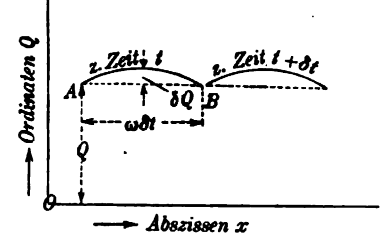
und für die Kuppe, weil ferner (106d) gilt,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial H} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = b\omega \frac{\partial^2 H}{\partial x^2},$$

führt man den sich hieraus ergebenden Wert in (111b) ein, so hat man

$$\Delta H = \frac{Q}{2b^2 J \omega^2} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \cdot \Delta x. \tag{111c}$$

Zieht eine Welle, die zunächst die Lage AB hat, wobei in A und B gleiche Durchflüsse herrschen sollen, an einem Beschauer in B vorüber, so wird für ihn der gleiche Durchfluß Q wiederkehren, wenn der Wellenpunkt, der früher in A war, nach B gelangt ist. Erfordert das die Zeit δt, so bedeutet dieses, daß AB die Länge $\omega\,\delta t$ besitzt. Steigt ferner während dieser



Zeit δt der Durchfluß für den Beschauer von Q bis auf $Q + \delta Q$, um dann, wie gesagt, wieder auf Q zu sinken, so beträgt der Krümmungs-

radius der Kurve, welche die x zu Abszissen und die Q zu Ordinaten hat, weil sie die Sehne $\omega\,\delta t$ und den Pfeil δQ besitzt,

$$(112)\qquad 1 : \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{(\omega\,\delta t)^2}{8\,\delta Q} = -\,\omega^2 r.$$

Der Ausdruck $r = (\delta t)^2 : 8\delta Q$, also der Krümmungsradius der Kurve, welche auch den Durchfluß zu Ordinaten, aber die Zeit zu Abszissen hat, ist durch einen an seinem Ort verbleibenden Beobachter verhältnismäßig leicht bestimmbar. Seine Einführung in (111c) liefert für den Niedergang der Welle auf der Strecke Δx

$$(113)\qquad \Delta H = \frac{Q}{2b^2 J\omega^4}\,\frac{\Delta x}{r} = -\frac{4\cdot Q\cdot \delta Q\cdot \Delta x}{b^2 J\omega^4(\delta t)^2}.$$

Da bei zylindrischem Bett das Gefälle an den verschiedenen Streckenpunkten im Augenblicke des Vorüberganges des Scheitels jeweilig wesentlich dasselbe wird, kann man für die Berechnung der *Abnahme* ΔQ, welche der Durchfluß Q auf der Strecke Δx erleidet, $\frac{\Delta Q}{\Delta H}$ mit $\frac{\partial Q}{\partial H} = b\omega$ (vgl. (106d)) vertauschen, wodurch man schließlich aus (113)

$$(113\text{a})\qquad \Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial H}\Delta H = \frac{Q\,\Delta x}{2bJ\omega^3 r} = \frac{b^2 Q\cdot\Delta x}{2J\left(\frac{\partial Q}{\partial H}\right)^3 r}$$

erhält.

Beispiel. Damit ΔQ von Belang werde, muß die Hochwasserspiegelbreite b groß sein. Das ist z. B. zwischen Wien und Preßburg der Fall. Nach[1]) der „Studie über die Eindämmung des Marchfeldes“ war bei dem Hochwasser von 1899

nach Beilage 7, Massenkurve Wien—Angern . .		$Q = 10700\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}}$
„ „ 1 u. S. 44 von km 15 bis Preßburg		$b = 1800$ m
„ „ 2 die Kote von Profil 20,1 . . .		153,59
„ „ 2 „ „ „ „ 60,1 . . .		138,93

also das Gefälle $J = 14{,}66 : 40000 = 0{,}000367$.

Nach Beil. 1 liegt die Franz-Josef-Brücke 2,7 km oberhalb km 0, die Landesgrenze bei km 49,32, die Preßburger Brücke 11,7 km weiter. Diese 63,7 km legte die Wellenkuppe nach Beil. 7 in 32,1 Stunden = 115560 Sek. zurück, wonach $\omega = 0{,}551\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$, $\omega^3 = 0{,}167\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}}$ war. Nach der Massenkurve Wien—Angern, Beil. 7, war für $\delta t = 30$ Stunden $= 108000$ Sek., $\delta q = 300\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}}$, also $r = \frac{(108000)^2}{8\cdot 300} = 4860000\ \mathrm{sec^3\,m^{-3}}$. Danach folgt, weil die Verflachung wesentlich auf der Strecke von km 15 bis Preßburg, also auf einer Länge $\Delta x = 46000$ m stattgefunden haben muß,

$$\Delta Q = \frac{Q\,\Delta x}{2bJ\omega^3 r} = \frac{10700\cdot 46000}{2\cdot 1800\cdot 0{,}000367\cdot 0{,}167\cdot 4860000} = 459\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}}.$$

1) Beiträge zur Hydrographie Österreichs, herausgeg. vom k. k. hydrographischen Zentralbureau, 6. Heft, 1903.

Hiernach bewirkt die Wellenverflachung zwischen Wien und Preßburg eine Durchflußabnahme von ungefähr 460 $m^3 sec^{-1}$.

Neben den Veränderungen, welche die Welle örtlich durch den Wechsel des Bettquerschnittes und bleibend durch das Niedersinken des Scheitels erfährt, hängt deren tatsächlicher Verlauf in einem Strome in hohem Grade von der Verteilung der Niederschläge oder der Schneeschmelze ab, sowie von den Einzelwellen, welche ihm seine Nebenflüsse zuführen. So ist es offenbar von wesentlicher Bedeutung für den Wasserstand, ob eine Nebenflußwelle gleichzeitig mit der Hauptstromwelle die Nebenflußmündung erreicht. Die verschiedenen Hochwasserwellen desselben Stromes weichen daher in ihrem Verlaufe auch abgesehen von der absoluten Höhe voneinander ab. Einem einheitlichen Gesetz gehorchen also nur Hochwässer, die nicht durch Seitenzuflüsse verändert werden; so konnte am Rhein[1]) nur für primäre Wellen ein Gesetz aufgefunden werden, also für jene, welche hohen Rheinwasserstand bei niedrigen Nebenflußständen aufweisen. Diese Wellen zeigen zugleich fast ausnahmslos bei gleichen Höhen an der Oberstromstation die relativ kleinsten an der Unterstromstation. Das erwähnte Gesetz lautet, daß — wenn die Nebenflüsse kein Hochwasser führen — die Stundenzahl zwischen dem Eintritt einer in cm gemessenen Pegelhöhe h in Waldshut und dem der entsprechenden Schwallhöhe in s km Entfernung

$$(114) \quad t = 146[1 - 0{,}0028(550 - h) + 0{,}000003(550 - h^2)]\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$$

ist, worin

$$x = 0{,}000011\,73\, s^2.$$

Dies gelte bis Caub, 440 km unterhalb Waldshut, für Waldshuter Pegelhöhen h zwischen 200 und 550 cm, welch letztere Höhe der bordvollen Bettanfüllung entspreche, oberhalb der keine stetige Beziehung zwischen Schnelligkeit und Weglänge mehr zu erwarten sei. Für wachsende h nimmt nach (114) die Zeit t ab, d. h. die Schnelligkeit zu, wie dies allen früheren Darlegungen entspricht. Ein Hochwasserverlauf der Donau, für die bisher kein ähnliches Gesetz aufgestellt worden ist, und bei der auch von Nebenflüssen unbeeinflußte Wellen nicht recht denkbar sind, ist nach untenstehender Quelle[2]) auf S. 205 wiedergegeben.

Endlich sei erwähnt, daß bei der Verflachung der Welle auch das *Versickern* des Flußwassers in den Untergrund mitwirkt. Bei Aufstellung

---

1) *M. von Tein* im Ergebnisse der Untersuchungen der Hochwasserverhältnisse im deutschen Rheingebiete v. Zentralbureau f. Meteorol. u. Hydrogr. in Baden 3, Berlin, S. 43.

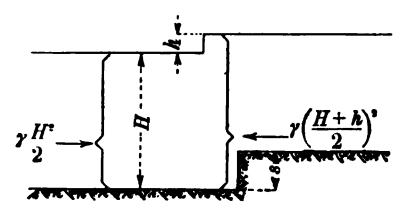
2) Beiträge zur Hydrographie Österreichs, herausgeg. v. k. k. hydrograph. Zentralbureau, 4. Heft, die Hochwasserkatastrophe des Jahres 1899, Wien 1900.

der Gleichungen (106b) und der ihr folgenden Entwickelung ist vorausgesetzt worden, daß die seitliche Ausbreitung des Wassers keine Zeit in Anspruch nehme; also wenigstens in Scheitelnähe in ganzer Breite der Spiegel gleichzeitig steige oder falle. Das trifft für das Grundwasser nicht mehr zu.

Neben einer Verflachung der Wellen bei ihrem Fortschritte findet auch eine *Formänderung* in der Art statt, daß ihr Kopf steiler als ihr Schweif wird, wodurch für die Uferorte das Ansteigen des Wassers rascher als das Fallen vor sich geht. Das kommt daher, daß (vgl. (107) und (110a)) die Fortschrittsschnelligkeit mit der Stromgeschwindigkeit wächst, sonach mit dem Wasserstande zuzunehmen pflegt. Der Scheitel rückt also schneller als die Wellenbasis vor. Es ist ferner bei symmetrisch verteilten Wasserständen das Gefälle auf der Vorderseite der Welle größer als auf der Rückseite, daher vorn Geschwindigkeit und Schnelligkeit bei gleichem Wasserstande größer als rückwärts. Die Darstellung auf S. 205 läßt die Formänderungen klar erkennen[1]). — Wo daselbst die Wasserstandsunterschiede stromab zunehmen statt abzunehmen, kommt dies von einer Verengerung des Flußbettes oder von dem Einlaufe eines Nebenflusses (z. B. der Traun oder Enns).

VIII. Das Strömen in Röhren und Wasserläufen bei unstetiger Wandung.

65. Sohlenstufen. Eine Stufe[2]) oder ein Gefällsbruch der Sohle macht sich in der Oberfläche durch einen *Wassersprung* (Wasserschwelle, ressaut, hydraulic jump) bemerkbar, welche allerdings hier keine scharf meßbare Stufe bildet. Wenn in einem Gerinne die Höhe s der Stufe, die Zulauf- und die Ablaufgeschwindigkeit U_1 und U_2, sowie die ursprüngliche Tiefe H



1) Eine Aufnahme des Fortschritts und der Umgestaltung einer künstlichen Hochwasserwelle im regelmäßigen 12 km langen Elz-Dreisam-Kanal veröffentlichte *M. Honsell* in seinem Werk „Der Bodensee, Stuttg. 1879", S. 148, leider ohne Angabe der Maßstäbe, über welche auch Nachforschungen der Oberdirektion des Wasser- und Straßenbaues keinen Aufschluß brachten. — Die Formänderung äußert sich auch darin, daß, wie S. 181 nachgewiesen, $\omega < \bar{\omega}$ ist.

2) *M. Möller* behandelte diese Aufgabe zuerst (Z. d. A. u. I.-V. zu Hannover 40 (1894), Sp. 599), wobei er einfach vom *Bernoulli*schen Theorem ausging und den an der Sprungstelle auftretenden Druckverlust, der einen beträchtlichen Teil der ursprünglich vorhandenen Geschwindigkeitshöhe aufzehren kann, vernachlässigte. *A. Ritter* gab die genaueren Lösungen, Z. d. V. deutsch. Ing. 39 (1895), S. 1349.

bekannt ist, so ist durch Anwendung des Impulssatzes auf zwei Querschnitte, die den Wassersprung einschließen, dessen Höhe h leicht zu finden. Dabei sieht man von Reibungsvorgängen und irgend welchen störenden Einflüssen ab, da der Sprung sich auf einer so kleinen Stelle abspielt, daß die Reibung keine wesentliche Änderung des Vorganges bewirken kann. In der Tat ergibt sich sofort — wenn man allerdings noch annimmt, daß der Gegendruck der Stufe so groß sei, wie daselbst der Wasserdruck unter dem durch den Sprung erhöhten Spiegel wäre — für die Masse $\frac{\gamma}{g} H U_1$, die sekundlich beschleunigt wird,

$$\frac{H^2}{2} - \frac{(H+h)^2}{2} = \frac{H U_1}{g}(U_2 - U_1)$$

oder, weil

$$U_1 H = U_2 (H + h - s)$$

sein muß,

$$Hh + \frac{h^2}{2} = 2H \frac{U_1^2}{2g} \cdot \frac{h-s}{H+h-s} = 2Hk \frac{h-s}{H+h-s},$$

wenn

$$k = \frac{U_1^2}{2g} \tag{115}$$

die Ankunftsgeschwindigkeitshöhe des Wassers bedeutet, oder

$$\frac{H^2}{k^2} + \frac{H}{k}\left(-2 + \frac{3h}{2k} - \frac{s}{k} + \frac{2s}{h}\right) + \frac{h^2}{2k^2} - \frac{hs}{2k^2} = 0, \tag{115 a}$$

darnach, wenn

$$\varphi = 1 - \frac{3}{4}\frac{h}{k} + \frac{s}{k}\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{h}\right) \tag{115 b}$$

gesetzt wird,

$$\frac{H}{k} = \varphi \pm \sqrt{\varphi^2 - \frac{h(h-s)}{2k^2}}. \tag{115 c}$$

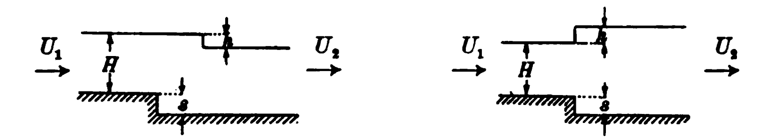
Dieser Ansatz gilt sowohl für steigende wie für fallende Stufen, und man erhält z. B. für $s = 0{,}1\,k$ nachfolgende Zahlenwerte:

$h:k =$	0,1046	0,11	0,2	0,36	0,5	0,6	0,6384
$\varphi =$	0,016	0,0584	0,4	0,5022	0,475	0,433	0,415
$H:k =$	0,016	0,112	0,7873	0,9554	0,829	0,628	0,415
	0,016	0,00486	0,0127	0,049	0,121	0,239	0,415

Für $h:k < 0{,}1046$ wird die Tiefe H des ankommenden Wassers entweder imaginär oder negativ; für $h:k > 0{,}6384$ wird H ebenfalls imaginär. Für $s = -0{,}1\,k$ erhält man:

$h:k =$	0,1	0,2	0,3	0,323	0,4	0,5	0,6	0,723
$\varphi =$	1,875	1,3	1,0583	0,0171	0,9	0,775	2/3	0,546
$H:k =$	[3,75]	[2,58]	[2,09]	2	1,743	1,446	1,151	0,546
	0,0027	0,0116	0,0287	0,0343	0,0574	0,104	0,183	0,546

Hier kommen die eingeklammerten Werte von $H:k$ nicht in Betracht, insofern an die Stelle der Wasserschwelle die stetig gekrümmte Staukurve tritt, sobald die Geschwindigkeitshöhe $k < 1/2\,H$ ist. Für $h:k$



$> 0{,}7233$ wird $H:k$ imaginär; die Höhe der Wasserschwelle kann also nie die Größe $0{,}7233\,k$ überschreiten. Bisher wurde ein Sprung des Spiegels nach oben vorausgesetzt, es kann aber auch ein Abfall eintreten: mit $s = -0{,}1\,k$ und $-h$ statt $+h$ bekommt man:

$-h:k=$	0,10256	0,12	0,2	0,3	0,4	0,411
$H:k=$	0,10256	0,410	1,192	1,665	1,97	2.

Wenn $H > 2k$ ist, tritt an die Stelle der negativen Wasserschwelle die asymptotisch an das geradlinige Längenprofil der gleichförmigen Bewegung sich anschließende stetige Senkungskurve der beschleunigten Bewegung des zufließenden Wassers.

Gl. (115 a) geht für verschwindende Stufenhöhe also $s = 0$ in den Ausdruck[1])

$$(116)\qquad \frac{H^2}{k^2} + \frac{3hH}{2k^2} + \frac{h^2}{2k^2} - \frac{2H}{k} = 0 \quad \text{oder} \quad H^2 + \frac{3}{2}hH + \frac{h^2}{2} = 2Hk$$

über, der folgende zusammengehörende Werte liefert:

$k:H=$	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2	3	5	14
$h:H=$	0	0,128	0,357	0,562	1	1,37	2	3	6.

Ähnlich hatte bereits *J. B. Belanger*[2]) auf Grund des Impulssatzes den von *G. Bidone*[3]) zwischen zwei Ästen einer Staukurve beobachteten Wassersprung durch die Gleichung

$$2(H+h)^2 = (2H+h)k$$

erklärt, und *J. Boussinesq*[4]) auch auf Grund des genannten Satzes für den Zusammenhang zwischen den Flächen F_1 und F_2 gleicher Spiegel-

1) *A. Ritter*, ebenda S. 1351.

2) *J. B. Belanger*, Essai sur la solution de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes, Paris 1828, S. 35. S. oben S. 145, 192.

3) Torino, Mem. 25 (1820), S. 21 ff.

4) Eaux courantes, S. 131.

breite b, bei einem Durchfluß Q und einer Sohlenneigung (sinus des Neigungswinkels) i die Beziehung

$$\frac{F_1 + F_2}{2} F_1 F_2 = \frac{\alpha' Q^2 b}{g\sqrt{1 - i^2}} \tag{116a}$$

ermittelt, die für sehr breiten rechteckigen Querschnitt mit $\alpha' = 1$ und genug kleinem i in

$$\frac{2H + h}{2} H(H + h) = \frac{U^2 H^2}{g} = 2kH^2$$

oder in *A. Ritters* Gleichung übergeht.

Abweichend von *Boussinesq* und *Ritter* verwendet *M. Merriman*[1] die Einbuße $\frac{U_1^2 - U_2^2}{2g}$ an lebendiger Kraft zur Deckung des Arbeitsverlustes des unelastischen Stoßes und zur Hebung des Schwerpunktes um $\frac{h}{2}$ (statt des Spiegels um h) und hat somit

$$\frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} + \frac{h}{2},$$

oder

$$k\left[1 - \left(\frac{H}{H + h}\right)^2\right] = k\left[1 - \frac{H}{H + h}\right]^2 + \frac{h}{2},$$

oder

$$h = 2\sqrt{Hk} - H. \tag{116b}$$

Diese Formel stimmt mit den Messungen *Bidones* und solchen an der Lehigh-Universität[2]) besser als (116) oder (116a). Ihre Ableitung kann aber trotzdem nicht anerkannt werden, weil die Summe aus der Hebung und der Druckhöhenvermehrung bei Übertritt eines Teilchens aus der seichteren in die tiefere Strecke nicht $\frac{1}{2}h$, sondern h beträgt. Die Erklärung des Widerspruchs liegt wohl darin, daß an der Wasserschwelle ein Wirbel besteht, der den durchflossenen Querschnitt einengt, so daß die Geschwindigkeit zunächst wächst, ehe sie sich auf U_2 verringert.

Ausdrücke für einen stehenden Wassersprung erhält man auch, wenn man in den Gleichungen für die Schnelligkeit des Wellenfortschrittes (wie z. B. (86j)) der Wassermasse eine Gegenbewegung von der absoluten Größe der Wellenschnelligkeit erteilt; dabei macht man aber den auf S. 194 erwähnten Fehler.

Die bis jetzt berechneten zusammengehörenden Werte von H und h entsprechen dem wirklichen Vorgange nur, wenn das Abflußgerinne ein solches Gefälle besitzt, daß die Wassermenge bei der berechneten neuen Tiefe $H + h$ tatsächlich gleichförmig abfließt; andernfalls findet eine

---

1) Treatise on Hydraulics, 8. ed. New-York 1909, S. 343.

2) *R. Ferriday*, Engineering News 34 (1895), S. 28.

Ortsverlegung des Wassersprunges statt und zwar *stromauf* bei zu *kleinem* Gefälle, *stromab* bei zu *großem* Gefälle des Abflußgerinnes.

Beispiel. Gegeben sei die Tiefe im Zulaufgerinne $H = 0{,}2$ m, die Geschwindigkeitshöhe $k = 0{,}6$ m, so zeigt sich die Sprunghöhe $h = 0{,}4$ m (nur zufällig $= k - H$). Zulauf- und Ablaufgerinne sollen rechteckig und 1 m breit sein; und ersteres habe den Sinus i des Neigungswinkels $= 0{,}03615$; bei solcher Glätte, daß $c = 46{,}0$ m$^{1/2}$ sec^{-1} ist. *A. Ritter*[1]) berechnet nun die auf den Wassersprung folgende Staukurve nach (69a), findet, daß sie vom Wassersprung auf 66,4 m Länge 0,219 m hoch ansteigt, dann wieder fällt, unabhängig vom Abflußgerinne. Nur die Entfernung der Wassersprungstelle vom Sohleneckpunkte hängt von der Neigung des Ablaufgerinnes ab, indem im mathematischen Sinne die Staukurve, im Zulaufgerinne frei verschiebbar ist. Habe die Ablaufsohle solches Gefälle, daß die Wassertiefe über ihr bei gleichförmiger Bewegung 4 m beträgt, so bilde, weil die Staukurve die

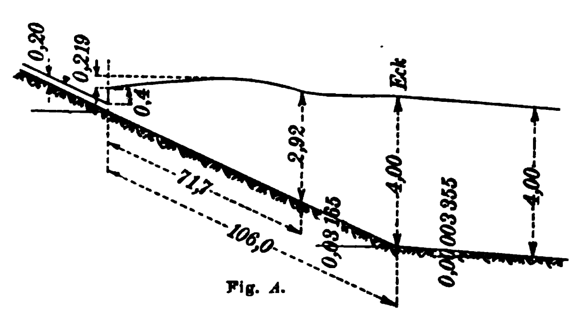


Fig. A.

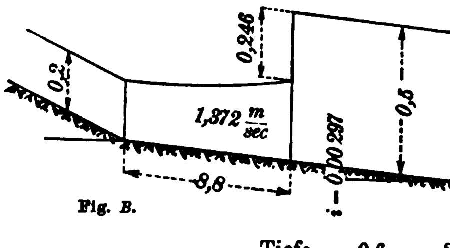


Fig. B.

Tiefe	0,6	2,92	4	20 m,
für $x =$	0	71,7	106	612 m

habe, der Spiegel über dem Sohleneckpunkt ebenfalls ein Eck und liege die Wasserschwelle 106 m weiter stromauf. — Bei stromab zu großem Gefälle des Ablaufgerinnes findet die Unstetigkeit in letzterem statt. Hierfür berechnet *A. Ritter* das Beispiel der Figur *B*. Bei dem Gefälle $i = 0{,}00660$ der Ablaufsohle verschwindet, wie Fig. *C* erläutert, der Wassersprung, und bei noch größerer Sohlenneigung verläuft der Stauspiegel stetig ohne Sprung und Eck.

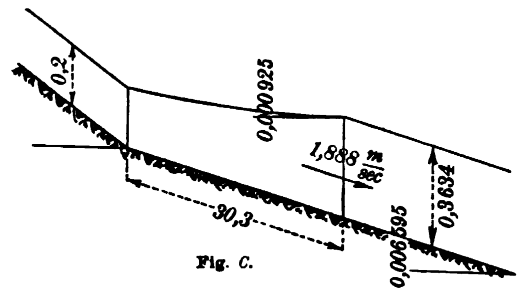


Fig. C.

66. Seitliche Vor- und Rücksprünge, Pfeiler, Düker. Vorsprünge oder Rücksprünge der Seitenwände wirken ähnlich wie Hebungen oder Senkungen der Sohle. Einige Versuche nahmen *P.* und *L. L. Vauthier*[2])

1) Z. d. V. deutsch. Ing. 39 (1895), S. 1352.

2) Ann. d. ponts et chauss. (1836²), S. 362f.

mit einem offenen Gerinne vor, dessen lotrechte Seitenwände eine Strecke lang erst auseinander- und dann wieder zusammenliefen. Je nachdem sie das Einlaufschütz allmählich oder plötzlich zogen, zeigte der Wasserspiegel auf der erweiterten Strecke eine starke Hebung oder Senkung, worin zugleich eine Art Bestätigung von *A. Ritters* Berechnung liegt, daß dieselbe Sohlenstufe sowohl einen Wassersprung als auch einen Spiegelabfall bewirken kann. Die Verfasser *Vauthier* bemerkten, daß beide von ihnen beobachtete Abflußweisen, der üblichen Theorie (Gl. 68) der ungleichförmigen Bewegung ziemlich gut entsprachen.

Zu den verwandten Aufgaben gehört die Berechnung der Spiegelhebung, die Brückenpfeiler in Flüssen hervorrufen. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe besteht darin, daß man zwar nach dem *Bernoulli*schen Theorem oder auch nach einer Gleichung aus der Theorie der „Überfälle" den Abfall des Wasserspiegels — mit welchem die Spiegelhebung häufig verwechselt wird[1]) — beim Eintritt zwischen die Pfeiler annähernd angeben kann, nicht aber die Wiedererhebung beim Austritt. Die älteren Schriftsteller *J. A. Eytelwein*, *Gauthey*, *Navier* begnügten sich daher, schätzungsweise den lichten Querschnitt F anzugeben, den eine Brücke haben müsse, damit sie im Fluß von gegegebener Wasserführung Q und mittlerer Geschwindigkeit U keinen merklichen Stau hervorrufe. Sie setzten

$$F = \frac{1}{\mu} \frac{Q}{U} \tag{117}$$

und gaben μ für verschiedene Vorkopfformen an, z. B. lehrte *Navier* für

halbkreisförmig spitzwinklig	stumpfwinklig	gerade	eintauchende Bogenanfänge
0,95	0,90	0,80	0,70

Ed. Sonne[2]) schätzte auf Grund von Messungen *Harlachers* in der rechteckig begrenzten Sperrschiffsöffnung des Wiener Donaukanals ($H = 6$ m, $U = 1{,}65$ m sec^{-1}) allgemein

$$\mu = 1 - \beta \frac{nH}{B}, \tag{117a}$$

1) Das betont *J. Dupuit*, Études, S. 134. Wenn man mit *Tolkmitt* bei Betrachtung der ungleichförmigen Bewegung fälschlich annimmt, daß bei Verminderung der lebendigen Kraft der betreffende Unterschied an lebendiger Kraft einfach verloren geht, darf man folgerichtig auch von einer Wiedererhebung des Spiegels unterhalb der Brückenpfeiler absehen. Das tut der Genannte denn auch, *G. Tolkmitt*, Grundlagen der Wasserbaukunst, 2. Aufl., herausg. von *J. F. Bubendey*, 1907, S. 134. Eine ähnliche Unterlassung macht *Chr. Havestadt*, Handb. d. Ingenieurwissensch. 3, Wasserbau, 1. Abt., 1. Hälfte, 3. Aufl. 1892, S. 333.

2) Wochenblatt f. Arch. u. Ing. (1883), S. 327, 335 f.

worin n die Anzahl der Öffnungen, H die Wassertiefe, B die gesamte Lichtweite bedeutet und für

HU	$< 2{,}5$	< 5	$< 7{,}5$	< 10
β =	0,62	0,7	0,78	0,85

sei.

T. Montanari[1]) bewertet den Höhenunterschied der Spiegel oberhalb und unterhalb der Pfeiler bei stumpfen (also im Grundriß rechteckigen) Pfeilern wesentlich auf Grund von Schiffswiderstandversuchen mit

$$\frac{\sum f}{F}\frac{(U+\Delta U)^2}{2g}, \tag{118}$$

worin $\sum f$ die Summe der eingetauchten Pfeilerquerschnitte, F den Flußquerschnitt oberhalb der Pfeiler, U die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitte F und

$$\Delta U = U\frac{\sum f}{\sqrt{F(F-\sum f)}} \tag{118a}$$

eine Zusatzgeschwindigkeit bedeutet, welch letztere daher stammt, daß zwischen den Pfeilern die Geschwindigkeit größer als im freien Flusse ist. Falls die Pfeiler zugeschärft oder abgerundet sind, sei die Widerstandshöhe kleiner und betrage nur

$$\frac{\sum(\mu f)}{F}\frac{(U+\Delta U)^2}{2g}, \tag{118b}$$

wobei μ folgende Werte habe[2]):

Form des Vorsprunges	Höhe: Basis oder Pfeil: Sehne	Flächenverhältnis $f:F$						
		0	0,1	0,18	0,26	0,33	0,39	0,52
Dreieck	0,1	0,95	1	1	1	1	1	1
„	0,25	0,81	0,9	0,97	1	1	1	1
„	0,5	0,58	0,66	0,72	0,77	0,81	0,85	1
„	0,75	0,45	0,53	0,59	0,63	0,67	0,69	1
„	1,0	0,43	0,51	0,57	0,62	0,65	0,68	0,74
„	1,5	0,42	0,51	0,57	0,61	0,65	0,68	0,74
Halbkreis	0,5	0,53	0,61	0,66	0,71	0,75	0,78	0,84
Stichbogen	0,25	0,75	0,83	0,90	0,95	0,99	1	1
Spitzbogen	0,866	0,30	0,36	0,39	0,42	0,45	0,47	0,51

Bei gemauerten Dükern geht *T. Montanari*[3]) ähnlich zu Werke, nur unterscheidet er hier neben dem Flußquerschnitt F noch den Quer-

1) Politecnico 39 (1891) S. 649, 804; 40 (1892), S. 40, 144, 245, 327, 422. Vgl. unten Gl. (118).

2) Politecnico 39 (1891), S. 812.

3) Politecnico 40 (1892), S. 468, 536, 598, 673, 737.

schnitt F_1 an der Dükerstirn und ist sein μ jetzt viel größer. Der Eintritt in den Düker und der Austritt bewirken zusammen nach ihm einen Druckverlust[1] (Spiegelunterschied)

(119) $$z_1 = \mu \frac{\sum f}{F} \frac{(U + \Delta U)^2}{2g},$$

worin er bei einem Durchfluß Q die Zusatzgeschwindigkeit]

(119a) $$\Delta U = U \frac{\sum f}{\sqrt{F F_1}} = \frac{Q}{F} \frac{\sum f}{\sqrt{F F_1}}$$

betrachtet und μ wie folgt schätzt[2]) unter Berücksichtigung der Zahl n der Seiten, längs welcher bei den viereckigen Öffnungen die Einzwängung des Wassers durch Führung vermieden wird:

n	$\Sigma f : F = 0{,}55$	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
4	1,30	1,38	1,53	1.76	2,23	3,00	4,33	7,03	15,05
3	1,30	1,39	1,56	1,89	2,52	3,56	4,89	8,65	18,62
2	1,30	1,40	1,59	1,98	2,71	3,95	5,92	9,70	21,00
0	1,30	1,40	1,62	2,10	2,95	4,40	6,65	10,93	23,35

Hierzu kommt noch der Reibungswiderstand in den gemauerten Sielen und unter Umständen der Druckverlust rechtwinkliger oder doch ausgesprochener Kniee.

P. Pasini und *U. Gioppi*[3]) haben die Druckhöhenverluste an den Dükern untersucht, mittels welcher der Cavourkanal verschiedene Wasserläufe untersetzt. Jeder Düker bildet nebeneinander liegende gemauerte Röhren oder Siele von beispielsweise elliptischem Querschnitt. Die Trennungsmauer zwischen den Hohlgängen endigen abgerundet wie Brückenpfeiler und jeder Gangeinlauf und -auslauf wird durch ein Trompetengewölbe überdeckt, während die Sohlenlinie gerade durchgeht oder nur sanft gebrochen ist. Nach den Genannten bewirken *Eintritt* und *Austritt* zusammen einen Druckverlust (in Metermaß)

(120) $$z_1 = 0{,}028\, U^2,$$

worin U die Ankunftsgeschwindigkeit des Wassers bedeutet, und findet *in* den Sielen bei einem Sielquerschnitt F_2, einem Profilradius R_2, einem Durchfluß Q_2 und einer Länge l_2 ein Druckhöhenverlust

(120a) $$z_2 = 0{,}00026 \frac{l_2 Q^2}{R F^2}$$

statt. Die beobachteten Summen $z_1 + z_2$ lagen zwischen 0,04 und 0,18 m.

1) So berechnet er wenigstens sein Beispiel 40 (1892), S. 536.
2) 40 (1892) S. 433, 480.
3) Giornale del Genio civile (5) 7 = 31 (1893), S. 67.

Seitliche Vorsprünge in offenen Läufen, also Buhnen, bilden das Gegenstück zu den Scheibenringen der geschlossenen Röhren. Die Drucksteigerungen und -abnahmen in letzteren werden bei offenen Läufen durch Spiegelhebungen und -senkungen ersetzt und die demnächst abzuleitende Gl. (123 b) ist hier anwendbar. *Dankwerts*[1]) berechnet nach ihr den Aufsprung des Spiegels, wo das Wasser aus der eingeengten Stelle vor einem Buhnenkopf in die breite Flußstrecke tritt. Werden die Orte unmittelbar stromauf, an und unmittelbar stromab der Buhne durch die Kennziffern 0, 1 und 2 unterschieden, die Tiefen mit H, die Geschwindigkeiten mit U bezeichnet, ferner mit Q der Durchfluß und mit b und B die kleine und große Breite, so gilt nach (123 b) für den erwähnten Aufsprung (ebene Sohle vorausgesetzt)

$$H_2 - H_1 = H_2 - \frac{Q}{U_1 b} \quad \text{und} \quad = \frac{U_2(U_1 - U_2)}{g}$$

oder

$$U_1^2 - \frac{U_2^2 + gH_2}{U_2} U_1 + \frac{gQ}{U_2 b} = 0, \tag{121}$$

so daß man bei gegebenem Q, U_2 und H_2 des freien Stromes und gegebenem b die Geschwindigkeit U_1 am Kopfe der untersten Buhne bestimmen kann. Aus U_1 geht dann H_1 hervor. Behält man die allerdings nur für Verzögerung des Wassers anerkannte Gl. (123 b) auch für die Beschleunigung bei dem Eintritt in die schmale Strecke vor dem Buhnenkopf bei, so hat man ferner die ähnliche Gleichung

$$H_0 - H_1 = \frac{Q}{U_0 B} - H_1 = \frac{(U_1 - U_0) U_1}{g},$$

die wieder nur zweiten Grades ist und von der des *Bernoulli*schen Theorems

$$H_0 - H_1 = \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}$$

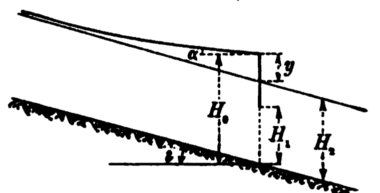
nur wenig abweicht, wenn U_0 und U_1 wenig verschieden sind. Es folgt

$$U_0^2 - \frac{U_1^2 + gH}{U_1} U_0 + \frac{gQ}{U_1 B} = 0 \tag{121 a}$$

für die Bestimmung von U_0 aus den übrigen nunmehr bekannten Größen und der als gegeben betrachteten Flußbreite B. Von dem H_0 über der Sohle befindlichen Spiegelpunkte stromauf bis zur nächsten Buhne erstreckt sich eine Staukurve, die man — z. B. nach *Schaffernak*s Tafel genügend genau — berechnen kann, womit man das H_2 dieser oberen Buhne, dann deren H_1 und H_0 und so bei Wiederholung aller Rechnungen die gesamte Spiegellinie erhält.

1) Zeitschr. f. Architektur u. Ingenieurw. 2 (11) 1896, Sp. 147.

Beispiel. *Dankwerts* setzt das Sohlengefälle $= i = 0{,}0009$, die Tiefe h_0 im freien Strom $= 2$ m, die Geschwindigkeit im freien Strom $= 47\sqrt{2 \cdot 0{,}0009}$ $= 2$ m sec^{-1}, $B = 100$ m, $b = 70$ m und berechnet danach von der untersten Buhne ausgehend für 12 Buhnen in je 100 m Abstand nachstehende Zahlen, unter die er auch $\alpha = i\left(\frac{h_0}{H_0}\right)^3$, als Gefälle oberhalb der jeweiligen Buhne aufnahm.



Buhne	H_2	U_2	$H_1 - H_2$	H_1	U_1	$H_0 - H_1$	H_0	U_0	$\alpha : i$
1	2	2	0,264	1,736	3,295	0,506	2,238	1,788	0,718
2	2,212	1,810	0,202	2,010	2,840	0,330	2,340	1,710	0,623
3	2,306	1,735	0,186	3,120	2,690	0,290	2,410	1,660	0,572
4	2,372	1,685	0,162	2,210	2,590	0,240	2,450	1,630	0,543
5	2,404	1,660	0,147	2,257	2,530	0,230	2,480	1,615	0,524
6	2,437	1,640	0,144	2,295	2,500	0,220	2,500	1,600	0,512
7	2,456	1,630	0,142	2,314	2,470	0,205	2,500	1,600	0,512
12	2,456	1,630	0,142	2,314	2,470	0,205	2,500	1,600	0,512

Die Stauwirkung der Buhnen nimmt daher stromauf stark ab. Auch ist deren Entfernung von Wesenheit. So wäre bei je 300 m Abstand nach der 7. Buhne die Tiefe $H_0 = 2{,}387$ m.

67. Rohrverengungen. Bei Röhren bilden *plötzliche Verengungen* das Analogon zu den Sohlenstufen in Flüssen. Das Wasser tritt bei ihnen unter Vermehrung seiner Geschwindigkeit aus der weiteren in die engere Strecke. Diesen Vorgang kann man auch als Ausfluß unter Wasser auffassen und den Ansatz des engen an das weite Rohr als Mundstück bezeichnen. Für diesen Ausfluß gelten daher ähnliche Beziehungen wie für den später zu betrachtenden in freie Luft, nur daß der „Ausflußkoeffizient" stets kleiner ausfällt, als wenn das Wasser durch dasselbe Mundstück in freie Luft fließt. Das Verhältnis beider Koeffizienten beträgt nach Versuchen *J. Weisbachs*[1]) im Mittel 0,986.

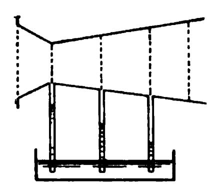
Allmähliche Verengerungen (Verjüngungen) bewirken zwar nach dem *Bernoulli*schen Theorem (Gl. (17)) eine Druckverminderung, weil das Wasser sich in sich verjüngendem Rohr beschleunigt, wodurch sich Druckhöhe in Geschwindigkeitshöhe verwandelt, aber ein besonderer Höhenverlust ist neben den Reibungen im Rohr kaum bemerkbar. *G. B. Venturi*[2]) zeigte, daß durch Löcher in Doppeltrichter Luft eingesogen werden kann. *C. Herschel*[3]) kam auf den Gedanken, solche Doppel-

1) *J. Weisbach,* Untersuchungen aus dem Gebiet der Mechanik und Hydraulik 2. Abt., Leipzig 1843, S. 80. Einige Versuche veröffentlichte *P. Richelmy,* Torino Mem. (2) 15 (1855), S. 117.

2) Ann. der Physik 2 (1799), S. 449 nach *Venturi,* Recherches experimentelles, Paris 1797, Versuch 15. Siehe auch unten S. 266.

3) Americ. Soc. Civ. Eng. Trans. 17 (1887), S. 233f.; 18 (1888), S. 136.

trichter — von ihm Venturi-Messer genannt — in Rohrleitungen einzuschalten und die Druckabnahme im sich verengenden Trichter zur Messung der Geschwindigkeit und des Durchflusses zu verwenden. Der



sich erweiternde Trichter bleibt also für die Messung ohne Bedeutung und dient nur zum Anschluß an das folgende Rohrtrum. Bei einem Durchfluß Q, einem Querschnitt F_1 der Leitung und F_2 der Kehle, einem in Wassersäulenhöhe gemessenen Druckunterschied h in diesen Querschnitten gilt dann, weil die Geschwindigkeiten sich verkehrt wie die Querschnitte verhalten gemäß (17)

$$h = \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = \frac{U_1^2}{2g}\left(\frac{F_1^2}{F_2^2} - 1\right)$$

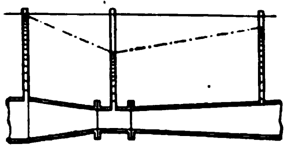
oder

$$U_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{F_1^2}{F_2^2} - 1}}$$

und

$$Q = F_1 U_1 = \frac{F_1 F_2}{\sqrt{F_1^2 - F_2^2}}\sqrt{2gh}. \tag{122}$$

Bei *Herschels* Versuchen mit Rohrweiten von 2,7 bzw. 0,3 m, Kehlweiten von $^1/_3$ der Rohrweite, Kehlgeschwindigkeiten U_2 zwischen 2,7 und 15,2 bzw. 1,2 und 10,7 m sec^{-1} blieb Q höchstens um 5 v. H. hinter dem Q der Formel (122) zurück und das gleiche war bei Versuchen in zahlreichen Wasserwerken der Fall, welche die Messer in Rohrleitungen von



mindestens 0,15 m Durchmesser eingeschaltet hatten. Bei einem von *U. Masoni*[1]) in ein Rohr von nur 0,061 m Weite eingebauten „Venturi" und Geschwindigkeiten von 0,1 bis 0,9 im Rohr oder 1 bis 7,2 in der Kehle stieg die Abweichung bis auf 10 v. H. Die Abweichungen kommen daher, daß der Druckunterschied infolge des Druckverlustes im Trichter, welcher Verlust nach *Weisbachs* Vorbild $\zeta_1 \frac{U^2}{2g}$ genannt werden kann, tatsächlich

$$h = \frac{U_1^2}{2g}\left(\frac{F_1^2}{F_2^2} - 1 + \zeta_1\right) = \frac{Q^2}{2gF_1^2}\left(\frac{F_1^2}{F_2^2} - 1 + \zeta\right) \tag{122a}$$

betrug, womit

$$Q = \frac{F_1 F_2}{\sqrt{F_1^2 - F_2^2 + F_2^2\zeta}}\sqrt{2gh}$$

also kleiner ausfällt. Bei *Herschels* Versuchen gäbe dies den Widerstandskoeffizienten $\zeta \gtrless 0{,}864$.

1) Napoli, Atti del R. Istit. d'Incorragiamento (5) 5, N. 1 (1903).

Weiteren Aufschluß über die Druckverluste bei Verengungen geben die Versuche von *H. Hochschild*[1]), welche sich allerdings auf kleine Abmessungen beschränken und rechteckige Querschnitte betreffen. Der Genannte untersuchte Kanäle und fand die Reibung — bei gleicher Wandentfernung — bei sich nähernden Wänden kleiner, bei sich entfernenden größer als bei parallelen Wänden. Von den Versuchen wird noch auf S. 229 die Rede sein; hier genüge die Bemerkung, daß hiernach bei kleinen geschlossenen, glattwandigen Kanälchen die von *Coriolis* und *Boussinesq* gemachte Annahme, es sei in der Grundgleichung der stationären Bewegung, nämlich in

$$J = \frac{1}{c^2 R} U^2 + \alpha \frac{d}{dx} \frac{U^2}{2g}, \tag{69}$$

der Koeffizient $\alpha > 1$, *nicht* zutrifft.

Die kritische Geschwindigkeit ist in konvergierenden Düsen größer als in Röhren[2]). *A. H. Gibson*[3]) fand bei Auftragung der Logarithmen von Eintrittsgeschwindigkeit und Druckverlust, daß die Geschwindigkeit in m sec^{-1}, bei welcher turbulent eintretendes Wasser sich beruhigte, folgende Werte hatte:

Kegelscheitelwinkel		5^0	$7\frac{1}{2}^0$	10^0	15^0
m sec^{-1} beim	Eintritt (76 mm Dmr.)	0,46	0,59	0,74	0,99
	Austritt (38 mm Dmr.)	1,83	2,37	2,98	3,93

In Röhren hätte statt dessen bei 76 und 38 mm Dmr. die Beruhigungsgeschwindigkeit 0,03 und 0,06 m sec^{-1} betragen.

68. Rohrerweiterungen. *Plötzliche Erweiterungen* geben in Röhren dadurch zu Druckverlusten Anlaß, daß rasch fließendes Wasser — es sei dies Q in der Zeiteinheit — auf langsam fließendes stößt. *J. Ch. Borda*[4]), der auch bezügliche Versuche anstellte, wendete auf den Vorgang die Regeln des unelastischen Stoßes an, nach welchem, wenn ein Körper vom Gewichte γQ_1 und der Geschwindigkeit U_1 einen anderen vom Gewichte γQ_2 und der Geschwindigkeit U_2 trifft, ein Arbeitsverlust

$$\frac{\gamma Q_1 \cdot \gamma Q_2}{\gamma Q_1 + \gamma Q_2} \cdot \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

1) *H. Hochschild,* Versuche über die Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen, Dissert., Berlin 1910.

2) *O. Reynolds,* Papers 2, S. 158.

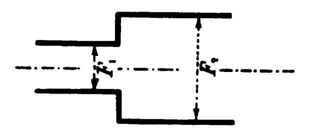
3) London, Proc. Roy. Soc. 83 (1910), S. 376.

4) Paris, Mém. de l'académie royale des sciences, année 1766 (erschienen 1769), S. 592.

eintritt. In Rohrerweiterungen ist die stoßende Menge Q_1 weit kleiner als Q_2, so daß bei plötzlicher Erweiterung in der Zeiteinheit der Arbeitsverlust

$$\gamma Q_1 \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

eintritt. Dieser Arbeitsverlust gibt sich dadurch zu erkennen, daß das Wasser an Druckhöhe verliert, und zwar tut dies in der Zeiteinheit die



Raummenge Q_1 oder Gewichtsmenge γQ_1. Die *verlorene* Druckhöhe (welche nicht mit dem Druckunterschied zu verwechseln ist, nämlich nicht in Geschwindigkeit, sondern in Wärme verwandelt worden ist) beträgt also bei Einführung eines Koeffizienten ζ und bei Bezeichnung des kleineren Querschnittes mit F_1 und des größeren mit F_2

$$(123) \qquad \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \zeta \frac{U_2^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g}\left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2$$

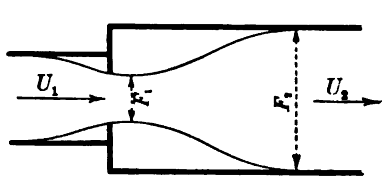
wonach

$$(123\text{a}) \qquad \zeta = \frac{(F_2 - F_1)^2}{F_1^2}$$

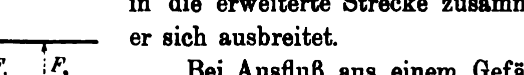
ist. Der Druck selbst wächst in der Stromrichtung und für den Druckunterschied hinter und vor der Erweiterung gilt dann bei wagrechtem Rohr

$$(123\text{b}) \qquad \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} - \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \frac{U_2(U_1 - U_2)}{g}.$$

K. Bänninger[1]) fand, daß die Gl. (123b) mit den Ergebnissen von ihm vorgenommener Versuche, bei welchen $F_2 : F_1$ von 1,1 bis 10 anstieg,



ziemlich genau übereinstimmte, während nach Versuchen von *H. Baer*[2]) der Druckverlust den nach *Borda* übertreffen soll, wenn $U_1 < 3 \text{ m sec}^{-1}$ oder $F_2 > 3 F_1$ ist. Es ist übrigens nicht gesagt, daß der engste Strahlquerschnitt mit dem engsten Rohrquerschnitt zusammenfallen muß. Bei entsprechender Mündungsform kann sich vielmehr der Strahl noch nach Eintritt



in die erweiterte Strecke zusammenziehen, ehe er sich ausbreitet.

Bei Ausfluß aus einem Gefäß durch einen scharfkantigen *Scheibenring* mit dem Öffnungsquerschnitt F_1 in ein mit der Geschwindigkeit U durchströmtes Ansatzrohr vom Querschnitt F_2 oder bei dem Durchfluß durch einen solchen

1) Zeitsch. f. d. gesamte Turbinenwesen 3 (1906), S. 12.

2) Polytechn. Journal 322 (1907), S. 177. Siehe S. 228 *Brightmore*.

Scheibenring, der in eine Leitung vom Querschnitt F_2 eingesetzt ist, müßte bei reibungsloser Einschnürung auf den Querschnitt kF gemäß (123a) der Druckverlust

$$\frac{\zeta U_2^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g}\left(\frac{F_2}{\mu F_1} - 1\right)^2 \tag{124}$$

oder

$$\mu = \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{\zeta}} \tag{124a}$$

sein. *J. Weisbach*[1]) fand nun nachstehende Werte von ζ, aus welchen dann die entsprechenden von μ hervorgehen.

$F_1 : F_2 = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Scheibenring im Ansatz									
$\zeta = 231{,}7$	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,784	0,480
$\mu = 0{,}616$	0,614	0,612	0,610	0,607	0,605	0,603	0,601	0,598	0,596
Scheibenring im Leitungsrohr									
$\zeta = 225{,}9$	47,77	17,51	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000
$\mu = 0{,}624$	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,0

Ähnlich setzte *F. Grashof*[2]) bei einer Druckhöhe h den Ausfluß (s. Figur)

$$Q = \mu \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_3^2)\sqrt{2gh} \tag{124b}$$

und berechnete für n Nuten

$$\frac{1}{\mu} = \sqrt{1 + 0{,}2(n+1) + n\left(\frac{d_2^2 - d_3^2}{d_1^2 - d_3^2}\right)^2}. \tag{124c}$$

d_3 d_2 d_1

Zu bemerken ist aber, daß nach *C. Bach*[3]), wenn eine weite Strecke zwischen zwei engen eingeschaltet ist, wie das z. B. bei Labyrinth-Dichtungen geschieht, der Druckverlust nach *Weisbach* und *Grashof* nur eintritt, wenn die weite Strecke lang genug ist, weil sich der Strahl sonst nicht in ihr ausbreitet.

Vorstehenden Betrachtungen sei nachgefügt, daß sie die ungleichförmige Verteilung der Geschwindigkeit über den Querschnitt nicht beachten. *De Saint-Venant*[4]) tut dies, berücksichtigt auch die Erhöhung

1) *J. Weisbach,* Lehrbuch 1 (1845), S. 447, sowie *Weisbach-Hermann,* S. 1036. Die obigen interpolierten Zahlen weichen etwas von den ursprünglichen Angaben in *J. Weisbach,* Untersuchungen in dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik, 2. Abt., Leipz. 1843, S. 130 ab.

2) Theoretische Maschinenlehre, 1. Bd. 1875, S. 473.

3) Z. d. V. deutsch. Ing. 35 (1891), S. 474.

4) Paris, Mém. de l'Acad. 4 (1886), S. 7. Vgl. auch *J. Boussinesq,* Eaux courantes, S. 126.

der Reibung und setzt für plötzliche Änderung des Rohrdurchmessers den Druckhöhenverlust =

$$(125) \qquad \frac{U_2^2}{2g}\left[\left(\frac{F_2}{F_1}-1\right)^2+\frac{1}{9}\right],$$

wobei er unter F_1 den Querschnitt der engeren Rohrstrecke versteht.

Die Erfahrung zeigt aber, wie gesagt, nicht, daß der Druckverlust über den der Formel (123) hinausginge. Auch *A. W Brightmore*[1]), der ein Halsstück (dessen Länge er nicht angibt) von 3 bzw. 4 Zoll (76 bzw. 102 mm) Durchmesser mit schroffen Absätzen in eine 6zöllige Leitung einschaltete, fand bei dem Dreizöller als Druckverlust fast genau den der Formel (123), während er bei dem Vierzöller noch kleiner war.

Allmähliche Erweiterungen des Querschnittes verwandeln dadurch, daß sie die Geschwindigkeit ermäßigen, diese in Druck, wobei nach dem *Bernoulli*schen Theorem die Drucksteigerung

F_1 F_2

$$\frac{U_1^2-U_2^2}{2g}$$

betragen sollte. Da die Druckverluste bewirken, daß der Druckunterschied h um $\zeta U_2^2 : 2g$ kleiner ausfällt, spricht *K. Andres* von einem Wirkungsgrad

$$(125a) \qquad \eta = \frac{h}{(U_1^2-U_2^2):2g} = \frac{2gh}{U_1^2-U_2^2} = 1-\frac{\zeta U_2^2}{U_1^2-U_2^2}.$$

Aus (125a) geht ferner durch Einführung des Durchflusses Q und der Querschnitte F_1 und F_2, weil $Q = F_1 U_1 = F_2 U_2$ ist,

$$Q = \sqrt{\frac{2gh}{\eta\left(\frac{1}{F_1^2}-\frac{1}{F_2^2}\right)}}$$

hervor und, da bei Wegfall der Verluste oder für $\eta = 1$ und $\zeta = 0$ der Durchfluß bei gleichem Druckunterschied h

$$\sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{F_1^2}-\frac{1}{F_2^2}}}$$

betragen würde, ist ferner das Verhältnis

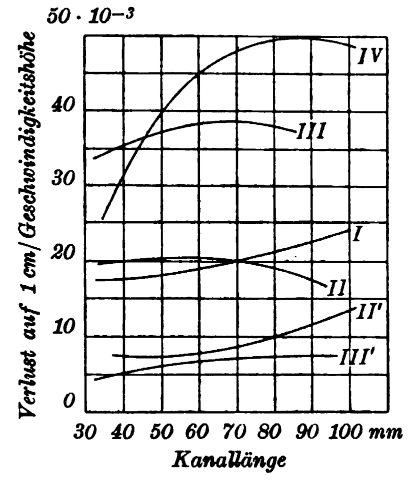
$$(125b) \qquad \frac{\text{Wahrer Durchfluß}}{\text{Theoret. Durchfluß}} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} = \sqrt{\frac{F_2^2-F_1^2}{F_2^2-(1+\zeta)F_1^2}}.$$

J. B. Francis wies die vollständige Unabhängigkeit des η-Wertes von dem Verhältnis des Kehlquerschnittes F_1 zum Mündungsquerschnitt F_2

1) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 169 (1907), S. 322. Derselbe machte auch einen Versuch mit einem Halsstück mit allmählichen Übergängen ins weite Rohr S. 323.

nach, indem er ein sich erweiterndes Rohr durch drei nacheinander vorgeschraubte Teile eines Kegels von 5° verlängerte und Ergebnisse erhielt, aus denen *K. Andres*[1]) als Wirkungsgrade 0,78, 0,81, 0,80 und 0,80 berechnet. *K. Bänninger*[2]) fand bei einem konischen Rohr mit 5° 30′ Spitzenwinkel ein η von 0,79 und untersuchte außerdem ein Rohr mit anscheinend linearer Drucklinie, sowie vier Rohre mit zunehmendem Erweiterungswinkel, also von Trompetenform, bei welchen jedoch schon teilweise Luftabsondernng eintrat. Als nächster ist *H. Hochschild* zu nennen.

In Gl. (124) ist vorausgesetzt, daß für ein und dasselbe Formstück μ und ζ unveränderliche, von der Geschwindigkeit U_2 (also auch vom Durchfluß Q) unabhängige Werte haben, oder daß gemäß besagter Formel der Druckverlust dem Quadrate des Durchflusses proportional wächst. Da dasselbe für die Geschwindigkeitshöhen gilt, ist nach *Weisbach* die durchfließende Wassermenge der Wurzel aus dem Druckunterschiede vor und hinter dem Formstück proportional. Dies fand *H. Hochschild* bei dem oben erwähnten rechteckigen Kanälchen, also bei allmählicher Erweiterung bestätigt[3]). Zugleich maß er bei ihnen die Druckverteilung und berechnete die Druckhöhenverluste. Da also anzunehmen ist, daß der Verlust pro cm Länge bei Veränderung des Durchflusses der jeweilig an der betreffenden Stelle herrschenden Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ proportional ist, trug *Hochschild* die Verhältnisse des Druckhöhenverlustes pro cm Länge zur Geschwindigkeitshöhe graphisch auf, wie das die Figur wiedergibt. In ihr beziehen sich die Kurven II, III, IV auf die konischen Strecken der sich erweiternden Hohlgänge, II′ und III′ auf dieselben Strecken wie II und III bei entgegengesetzter Durchflußrichtung, also auf Verengungen. Es ist sofort ersichtlich, daß auch bei Verengung ein Druckverlust — durch die Wandreibung — stattfindet, der aber, wie schon erwähnt, kleiner als die Reibung bei parallelen Wänden (Kurve I) ist, während



1) Z. d. V. deutsch. Ing. 54 (1910), S. 1640 nach *Francis*, Lowell hydraulic experiments, 4. ed., New-Vork 1883, S. 209.

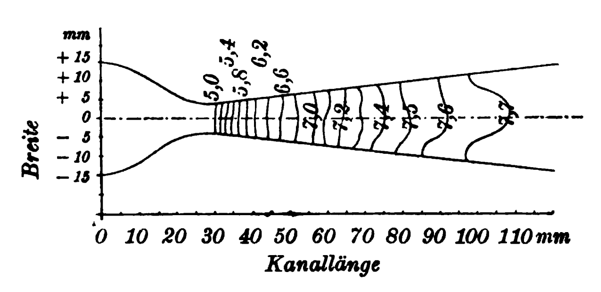
2) Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen, 1906, S. 12f.

3) Versuche üb. die Strömungsvorgänge, S. 20, Kurvenblatt 11.

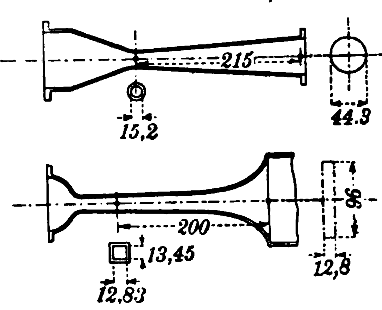
er sie bei Erweiterung übertrifft. Die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten einschlossen, betrugen bei dem Kanal der Kurve

I	II	III	IV
0^0	$2^0 24'$	$6^0 29'$	$12^0 16'$.

Die Rechteckshöhen waren überall nahezu gleich. Die Kurven gleichen Druckes (Isobaren) der Deckfläche lassen (vgl. Figur) erkennen, daß die Verluste in Form von Wirbelbildung wesentlich an den Wandungen entstehen und allmählich die ganze Strömung durchsetzen[1]).



K. Andres[2]), welcher bei seinen Versuchen Unterdrucke unter dem atmosphärischen vermied, stellte fest, daß die absolute Höhe der Drucke ohne Einfluß auf die Geschwindigkeit ist. Desgleichen fand er im selben Rohr den Wirkungsgrad unabhängig von der Geschwindigkeit, die er (in der Kehle) von 10 bis 40 m sec^{-1} steigerte. Vollständig ähnlich gebaute Rohre mit gleich glatten Wandungen verglich er nicht, wohl in der Annahme, daß deren Wirkungsgrad derselbe sein müsse, dagegen fand er, daß bei gleicher Form eine unbearbeitete, also rauhe Oberfläche einen kleineren Wirkungsgrad herbeiführe, als glatte Oberfläche, ferner daß bei gleichem Verhältnis der Kehlfläche F_1 zur Mundfläche F_2 viereckige Querschnitte ein kleineres η als runde bewirken. Er drückt dies mit den Worten aus, daß bei vierkantigen Rohren unbekannte Ursachen im Beginne der Erweiterung fähig sind, eine Loslösung des Wasserstrahles von der Wandung und damit große Verluste hervorzurufen. Dagegen wachse der Wirkungsgrad mit der Rohrlänge. Um den Zustand des Wassers zu verändern, schaltete er Stücke ein, durch die das Wasser vor Eintritt in die Versuchsrohre floß, und zwar ein Kreuz, oder ein Blech („Wirbelblech") mit drei Löchern von 22 mm Durchmesser, oder ein Blech mit dem Viertel eines doppelgängigen Schraubenganges, oder endlich



1) Versuche üb. die Strömungsvorgänge, S. 28; der genannte Verfasser folgt hierbei einer Theorie *L. Prandtls*.

2) Z. d. V. deutsch. Ing. 54 (1910), S. 1585, 1637 nach Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 76, Berlin 1909.

Siebe in verschiedener Zahl von 0,23 mm Drahtstärke und 1 mm Teilung. Nach der Turbulenz geordnet gaben die Strömungen nachstehende Werte von η, denen noch der für das unbearbeitete runde Rohr beigesetzt wurde[1]):

	Bearbeitetes Rohr					Rauhes Rohr
	20 Siebe	1 Sieb	ohne Einlage	Wirbelblech	Schraubenblech	
Rundes Rohr	0,865	0,871	0,883	0,925	0,989	0,854
Vierkantrohr	0,670	0,665	0,719	0,782	0,706	—

Hiernach verhält sich das durch 20 Siebe gekämmte Wasser am ungünstigsten, das durch das Wirbelblech in starke Wirbelung versetzte viel günstiger; nur das Schraubenblech wirkt unter Umständen noch vorteilhafter. Es kommt eben darauf an, daß das vorwärtsfließende Wasser an den Umfang gelange und nicht längs des letzteren eine rückläufige Bewegung statthabe.

Auch *A. H. Gibson*[2]) fand für Geschwindigkeiten von 1,5 bis 7 m $\sec^{-1}$ das Verhältnis des wirklichen Druckverlustes zum theoretischen der Gl. (123) von der Geschwindigkeit unabhängig. Er konnte mithin den Druckverlust (abweichend von *Weisbach* in Gl. (124))

$$h = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \zeta_{12}$$

setzen, ihn also in Bruchteilen von $(U_1 - U_2)^2 : 2g$ ausdrücken. Er untersuchte ζ_{12} für verschiedene Neigungswinkel θ gegenüberliegender Seiten und fand für runde Querschnitte, daß ζ_{12} sein Minimum von 0,135 für $\theta =$ ungefähr $5^0\,30'$ hatte, dann rasch anstieg, sein Maximum von 1,21 für $\theta =$ ungefähr 63^0 erreichte und langsam auf 1,017 für $= \theta = 180^0$, d. i. für einen rechtwinkligen Absatz fiel. Nach Abzug des auf die Reibung in derselben Länge geraden Rohres entfallenden Druckverlustes zeigte der übriggebliebene Teil von ζ_{12} fortgesetztes Wachsen von Null für $\theta = 0^0$ bis zu einem Maximum von etwa 1,2 für $\theta = 63^0$, dann wie früher ein Sinken bis 1,017 für $\theta = 180^0$.

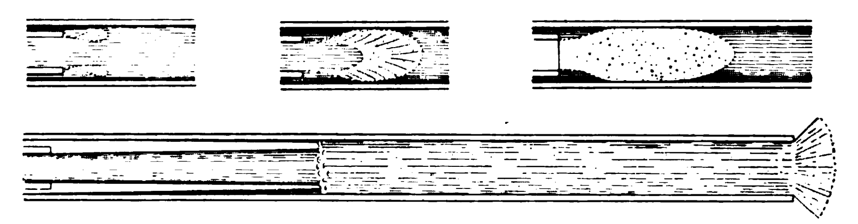
Der Strömungsvorgang in sich verengenden und dann wieder erweiternden Formstücken verändert sich wesentlich, wie *A. Fliegner*[3]) bemerkte, wenn sich infolge der Verwandlung in Geschwindigkeitshöhe

1) Z. d. V. deutsch. Ing. 54 (1910), S. 1588, 1638.

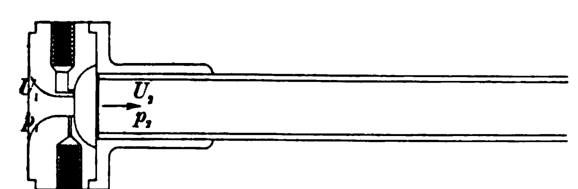
2) London Proc. Roy. Soc. 83 (1910), S. 378. *Gibson* untersuchte auch bei rechteckigem und quadratischem Querschnitt.

3) Civilingenieur (2) 21 (1875), Sp. 97 u. f. Siehe auch Schweiz. Bauz. 42 (1903), S. 91.

der Druck an der eingeschnürten Stelle so vermindert, daß er hier unter den Atmosphärendruck sinkt; *A. Fliegner* hat Wasser aus einem Messingrohr von 10 mm in ein Glasrohr von 17,5 mm Weite treten lassen und beobachtet, daß bei kleinem Druck im Messingrohr, also geringer Geschwindigkeit, das Wasser im Glasrohr klar blieb. Bei Drucksteigerung zeigte sich eine leichte ringförmige, pulsierende, von einzelnen schrägen Strahlen durchzuckte Trübung. Diese nahm dann zu und schloß sich, wobei der Strahl aus dem Glasrohr zerrissen auszutreten begann. Weitere Steigerung veranlaßte die Bildung eines aus schneeweißen Wirbeln bestehenden Körpers, dessen dichteste Stelle etwas vor dem Ort lag, an welchem seine Umrißfläche die Glaswand traf. Jene Stelle dichtester Wirbel rückte bei noch höherem Druck auf einmal vor und von ihr



ging eine Rückströmung aus, die sich vorn weiß und undurchsichtig, rückwärts in einer sehr dünnen durchsichtigen Schicht abspielte. Der eigentliche Strahl nahm von der plötzlichen Erweiterung nach vorn an Dicke unverkennbar zu und sein Austritt in die Luft erfolgte schneeweis und divergent, bis er sich schließlich bei fortgesetzter Erhöhung der Geschwindigkeit vom Glas lostrennte und die Erweiterung außer Wirksamkeit trat. Der geschilderte Vorgang stand mit Druckbeobachtungen in Einklang, welche *Fliegner* mit sich bis zur Austrittsöffnung verengernden Einsätzen vornahm, denn die Beobachtungen (der Durchmesser der engsten Stelle maß 2,2 bis 10,1 mm) zeigten, daß der sich im Hüllrohr ausbreitende Strahl von einer Schicht umgeben ist, in der ein noch kleinerer Druck als in der Mündungsebene (der engsten Stelle) herrscht, wo der Druck p_1 auf einen Bruchteil des atmosphärischen (bei den Versuchen bis zu 9 m Wassersäule Unterdruck oder 0,1 atm Druck) sinken kann. In der Bewegungsrichtung wirken also ein Druck p_1, sowie ein noch kleinerer p_a, ihr entgegen p_2, wobei man es aber nicht



mit Wasser allein, sondern zum Teil mit einem Gemisch von Wasser und der bei der Druckverminderung freiwerdenden, früher im Wasser

absorbiert gewesenen Luft (die auch etwas Dampf enthält) zu tun hat. Gegen den sich ausbreitenden Strahl wird durch die Pressungen vor und hinter der Ausbreitungsstelle ein Druck

$$F_2 p_2 - F_1 p_1 - (F_2 - F_1) p_a$$

ausgeübt. Derselbe bringt in der Zeiteinheit die Masse

$$\frac{F_2 U_2}{V_2 g},$$

worin V_2 das spezifische Volumen im weiten Rohr bezeichnet, aus der Geschwindigkeit U_1 in die kleinere U_2. Es besteht also nach dem Satze von den Bewegungsgrößen die Beziehung

$$F_2 p_2 - F_1 p_1 - (F_2 - F_1) p_a = \frac{F_2 U_2}{V_2 g} (U_1 - U_2)$$

oder

$$p_2 V_2 = \frac{U_2}{g} (U_1 - U_2) + \frac{p_1 V_2 F_1}{F_2} + \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right) p_a V_2. \tag{126}$$

Außer den Bewegungsgrößen müssen auch die verrichteten und vorhandenen Arbeiten sich ausgleichen. Die Zuströmung der Gewichtseinheit liefert die Arbeit $p_1 V_1$ und die lebendige Kraft $\frac{U_1^2}{2g}$, wozu noch die Arbeit der sich ausdehnenden Flüssigkeit $\int\limits_{V_1}^{V_2} p\,dV$ kommt, wobei p den veränderlichen Druck bei der Ausdehnung bezeichnet. Von diesen Arbeiten wird durch den Widerstand der plötzlichen Erweiterung $\zeta \frac{U_2^2}{2g}$ verbraucht, worauf noch $p_2 V_2$ und die lebendige Kraft $\frac{U_2^2}{2g}$ in der abströmenden Gewichtseinheit übrig bleiben. Es muß also

$$p_1 V_1 + \frac{U_1^2}{2g} + \int\limits_{V_1}^{V_2} p\,dV = p_2 V_2 + \zeta \frac{U_2^2}{2g} + \frac{U_2^2}{2g} \tag{126 a}$$

sein. Da ferner im Beharrungszustand durch jeden Querschnitt dasselbe Gewicht strömt, so ist

$$\frac{F_1 U_1}{V_1} = \frac{F_2 U_2}{V_2}, \tag{126 b}$$

womit (126 a) zu

$$\frac{U_2^2}{2g} \left(1 + \zeta - \frac{F_2^2 V_1^2}{F_1^2 V_2^2}\right) = p_1 V_1 - p_2 V_2 + \int\limits_{V_1}^{V_2} p\,dV \tag{126 c}$$

und (126) zu

$$p_2 V_2 = \frac{U_2^2}{g} \left(\frac{F_2 V_1}{F_1 V_2} - 1\right) + \frac{p_1 F_1 V_2}{F_2} + \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right) p_a V_2$$

wird. Wird dieser Wert von $p_2 V_2$ in (126 c) eingesetzt, so folgt

$$1 + \zeta - \frac{F_2^2 V_1^2}{F_1^2 V_2^2} = 2 - \frac{2 F_2 V_1}{F_1 V_2}$$
$$+ \frac{2g}{U_2^2}\left[V_1 p_1 - \frac{F_1 V_2}{F_2} p_1 - \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right) V_2 p_a + \int_{V_1}^{V_2} p\,dV\right]$$

oder als Endgleichung für die Widerstandsziffer

$$\zeta = \left(\frac{F_2 V_1}{F_1 V_2} - 1\right)^2 + \frac{2g}{U_2^2}\left\{\left[\left(\frac{F_2 V_1}{F_1 V_2} - 1\right) p_1 - \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right) p_a\right] \frac{F_1}{F_2} V_2 + \int_{V_1}^{V_2} p\,dV\right\}, \tag{126 d}$$

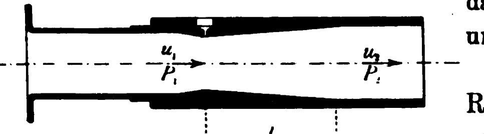
welche Gleichung bereits *F. Grashof*[1]) angedeutet habe. Für unveränderliches Volum $V = V_1 = V_2$ gibt das

$$\zeta = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2 + \frac{2g}{U_2^2}\left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)(p_1 - p_a) V \tag{127}$$

und, wenn auch noch $p_a = p_1$ ist, den Ausdruck *Bordas* (123 a). Der Druckverlust ist also tatsächlich größer als er nach *Borda* wäre. Zu einer Rechenformel kam *Fliegner* nicht und so seien dafür einige seiner Messungen angegeben, wobei unter h_1 der an der engsten Stelle herrschende Überdruck (über den atmosphärischen Druck) in m Wassersäulenhöhe und unter d_1 bzw. d_2 der Durchmesser der Öffnung bzw. des anschließenden weiten Rohres verstanden sei. Zum Vergleich ist das ζ *Bordas* beigesetzt.

mm	h und ζ bei *Fliegners* Versuchen						ζ *Bordas*
$d_1 =$ 2,22	$h_1 = +0{,}001$	−0,009	−0,18	−0,50	−0,93	−1,48	
$d_2 =$ 15,08	$\zeta =$ 2138	2130	2088	2053	2051	2046	2030
$d_1 =$ 5,15	$h_1 = -0{,}022$	−0,105	−0,99	−2,31	−5,23	−7,55	
$d_2 =$ 15,08	$\zeta =$ 65,6	64,7	60,8	60,0	59,9	59,7	57,4
$d_1 =$ 7,72	$h_1 = +0{,}008$	−0,113	−0,66	−3,07	−6,60	−8,89	
$d_2 =$ 15,08	$\zeta =$ 34,6	8,59	7,87	7,81	7,84	8,61	7,93
$d_1 =$ 10,11	$h_1 = -0{,}069$	−0,219	−0,90	−6,29	−8,05	−9,00	
$d_2 =$ 15,08	$\zeta =$ 1,33	1,43	1,31	1,24	1,28	2,14	1,50

Aus diesen Zahlen geht hervor, daß bei plötzlichen Erweiterungen ζ bei Drucksteigerung erst abnimmt und dann wieder zunimmt und daß es das *Borda*sche ζ übertreffen kann und nie wesentlich darunter sinkt.



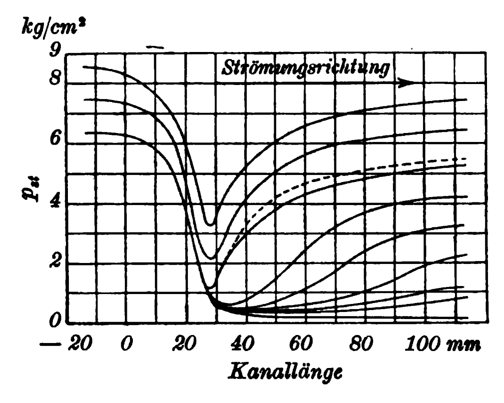
Bei allmählich erweiterten Röhren (s. Figur) sind die Anfangs- und Endwerte von ζ den vorigen

[1]) *F. Grashof*, Theoretische Maschinenlehre 1, Leipzig 1875, S. 421.

fast gleich, während dessen Minimum viel kleiner wird und früher auftritt. Beispielsweise fanden sich folgende Minimalwerte ζ_{min} für verschiedene Längen l_2 des sich erweiternden Teiles, darunter die Längen $l_2 = 0$ bei plötzlicher Erweiterung

$d_1 =$ 2,22 mm $d_2 =$ 15,08 mm	$l_2 =$ 0 $\zeta_{min} =$ —	10,2 1484	24,5 1419	50,5 843
$d_1 =$ 5,15 mm $d_2 =$ 15,08 mm	$l_2 =$ 0 $\zeta_{min} =$ 60,3	10,8 48,4	25,0 27,8	49,5 23,1
$d_1 =$ 7,72 mm $d_2 =$ 15,08 mm	$l_2 =$ 0 $\zeta_{min} =$ 7,80	10,5 5,12	25,0 3,42	50,5 1,10
$d_1 =$ 10,11 mm $d_2 =$ 15,08 mm	$l_2 =$ 0 $\zeta_{min} =$ 1,28	12 0,65	25,5 0,82	

Fliegners Beobachtungen finden ihre Bestätigung in denen *H. Hochschilds*.[1]) Beistehende Figur zeigt dessen Druckmessung im oben erwähnten Kanal IV bei 7,37 l sec^{-1} Durchfluß. Wenn der Druck überall über dem Luftdruck blieb, sank er an allen Kanalstellen, bei entsprechender Änderung des Anfangs- und Enddruckes gleich viel, so daß die graphische Darstellung kongruente Kurven zeigt, deren unterste die gestrichelte ist. Sobald an der engsten Stelle 1 kg cm^{-2} Pressung unterschritten wurde, nahmen die Drucke im sich erweiternden Teile bei gleichem



Durchflusse ab, wurde also der Druckunterschied, der die 7,37 l sec^{-1} durch den Kanal trieb, beträchtlich kleiner. Wenn durch Drosselung des Abflusses der Druck gesteigert wurde, machte sich die Nichtabsonderung von Luft auch dadurch bemerkbar, daß das rasselnde Geräusch plötzlich nachließ.

Das abweichende Verhalten der Flüssigkeiten im sich erweiternden gegenüber dem im sich verengernden Rohr, nämlich das Einschlagen verschiedener Wege, hat *W. Hampel*[2]) übrigens unmittelbar durch teilweise Färbung beobachtet. In einem Glasmodell, bei welchem Wasser

1) Versuche über die Strömungsvorgänge, S. 20, Zahlentaf. 6, Kurvenbl. 7.
2) Technische Blätter 38 (1906), S. 115; 40 (1908), S. 30. S. auch oben S. 19.

durch einen Ringspalt in den Raum zwischen einer Scheibe und einem Umdrehungs-Hyperboloid eintrat, zeigten sich die Wege jenen ähnlich, welche eine vollkommene Flüssigkeit eingeschlagen hätte. Bei umgekehrtem Fließen, also bei Eintritt an der Basis der sich erweiternden Düse, blieb das Wasser hingegen fast bis zur Scheibe in Achsennähe, erfüllten also Wirbel den Raum zwischen dem strömenden Mittelteil und dem Mantel.

69. Schieber und Ventile. *J. Weisbach*[1]) und *E. Kuichling*[2]) haben den Druckverlust, den Schieber verursachen, und zwar ersterer für einfache Bauweise und Abmessungen von einigen Zentimetern, letzterer für einen heutigen Wasserleitungsschieber von 0,61 m Durchgangsweite gemessen. Das Verhältnis des Druckhöhenverlustes h zur Geschwindigkeitshöhe im Leitungsrohre bezeichnete *Weisbach* mit ζ, indem er

$$h = \zeta \frac{U^2}{2g} \tag{128}$$

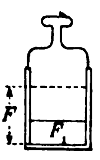
setzte. Benennt man ferner das Verhältnis der Höhe der bei teilweiser Öffnung eines Schiebers freigelegten halbmondförmigen Fläche zum Rohrdurchmesser mit dem Ausdruck Schieberstellung, so gilt nachstehende Tabelle.

Schieberstellung												
0	13/72	7/36	5/24	1/4	1/3	3/8	5/12	11/24	1/2	7/12	2/3	1
Querschnittsverhältnis (*Weisbach*)												
0				0,315		0,466			0,609			1
Widerstandsziffer ζ (*Weisbach*)												
	43,0	35,0	28,0	17,0	7,92	5,52	3,97	2,89	2,06	1,11	0,57	0
Querschnittsverhältnis (*Kuichling*)												
0				0,296		0,451			0,598			1
Widerstandsziffer ζ (*Kuichling*)												
	41,21	35,36	31,35	22,68	11,89	8,63	6,33	4,57	3,27	1,55	0,771	0

Bei den üblichen Schiebern wird eine wesentliche Durchflußverringerung hiernach erst erzielt, wenn die Scheibe (der sog. Schieberkeil) den größten Teil ihres Weges zurückgelegt hat. Andrerseits ist es aber nicht recht verständlich, daß bei offenem Schieber die Unterbrechung des schlichten Rohres, wie *Weisbach* will, unmerklich bleiben soll. Nach Messungen

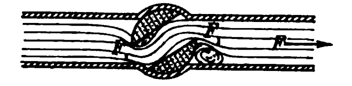
1) Untersuchungen usw., 1. Abt., Leipzig 1872, S. 7; *Weisbach-Herrmann*, 1. Teil, S. 1049.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 26 (1892), S. 439 (in Gemeinschaft mit *J. Thomson*).



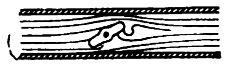
von *G. S. Williams*, *C. W. Hubbell* und *G. H. Fenkell*[1]) ist auch das Gegenteil der Fall und macht sich die erhöhte Wirbelung stromab weithin bemerkbar. Für Schieber in vierkantigen Leitungen gibt *Weisbach* nachstehende Tabelle:

Querschnittverhältnis $F_1 : F$:	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Widerstandsziffer ζ:	193	44,5	17,8	8,12	4,02	2,08	0,95	0,39	0,09	0,0



Ferner stammen von ihm nachstehende Angaben für den Durchgang des Wassers durch einen

Hahn in parallelepipedischem Rohr			Hahn in zylindrischem Rohr		
Stellwinkel	Querschnitts-verhältnis	Widerstands-ziffer	Stellwinkel	Querschnitts-verhältnis	Widerstands-ziffer
5°	0,926	0,05	5°	0,926	0,05
10°	0,849	0,31	10°	0,850	0,29
15°	0,769	0,88	15°	0,772	0,75
20°	0,687	1,84	20°	0,692	1,56
25°	0,604	3,45	25°	0,613	3,10
30°	0,520	6,15	30°	0,535	5,47
35°	0,436	11,2	35°	0,458	9,68
40°	0,352	20,7	40°	0,385	17,3
45°	0,269	41,0	45°	0,315	31,2
50°	0,188	95,3	50°	0,250	52,6
55°	0,110	275	55°	0,190	106
$66^3/_4$°	0	∞	60°	0,137	206
			65°	0,091	486
			$82^1/_8$°	0	∞



Nach *Weisbach*[2]) beträgt für den Durchgang des Wassers neben einer Drehklappe (Drosselklappe) bei einem

Stellwinkel	Querschnitts-verhältnis	Widerstandsziffer parallelepipedisches Rohr	Widerstandsziffer zylindrisches Rohr
5°	0,913	0,28	0,24
10°	0,826	0,45	0,52
15°	0,741	0,77	0,90
20°	0,658	1,34	1,54
25°	0,577	2,16	2,51
30°	0,500	3,54	3,91
35°	0,426	5,7	6,22
40°	0,357	9,27	10,8
45°	0,293	15,07	18,7
50°	0,234	24,9	32,6
55°	0,181	42,7	58,8
60°	0,134	77,4	118
65°	0,094	158	256
70°	0,060	368	750
90°	0	∞	∞

1) Amer. Soc. Civ. Eng. Trans. 47 (1902), S. 143.
2) Lehrbuch 1 (1845), S. 451.

Für eine Ventilklappe fand *J. Weisbach*[1]) bei einem Querschnittsverhältnis zwischen Durchgangsöffnung und Röhre von 0,535 nachstehende Zahlen:

Öffnungswinkel:	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
Widerstandsziffer:	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	4,6	3,2	2,3	1,7.

Mit Pumpenventilen verschiedenster Form befaßte sich *C. Bach*, der sich in folgendem Sinne ausspricht[2]): Bezeichnet P diejenige Kraft, mit welcher das geöffnete Ventil belastet sein muß, um sich in dieser Lage gegenüber der von der *strömenden* Flüssigkeit betätigten Wirkung im Gleichgewicht zu halten (also meist das Gewicht des Ventils *im Wasser*), D den Durchmesser der Ventilsitzöffnung, $F = \frac{\pi}{4} D^2$ den Querschnitt der Ventilsitzöffnung, h die Hubhöhe des Ventils, νe die Summe der auf dem Umfange πD gemessenen Rippenbreiten für den Fall der unteren Führung des Ventiles durch Rippen, b die radiale Breite der Dichtungsfläche $= \frac{1}{2}(D_1 - D)$ der Figuren, U die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser durch den Querschnitt F fließt, $\zeta \frac{U^2}{2g}$ die Widerstandshöhe oder den Druckhöhenverlust durch sämtliche vom Ventil verursachten Bewegungswiderstände, $\alpha, \beta, \gamma, \varkappa, \mu$ Erfahrungswerte; so gelten mit m als Längen, m² als Flächen und kg als Gewichte folgende Gleichungen:

$$P = 1000\, F \frac{U^2}{2g}\left[\varkappa + \left(\frac{D}{4\mu h}\right)^2\right], \tag{129}$$

$$P = 1000\, F \frac{U^2}{2g}\left[\varkappa + \left(\frac{F}{\mu(\pi D - \nu e)h}\right)^2\right], \tag{129 a}$$

$$\zeta = \alpha + \beta\left(\frac{D}{h}\right)^2, \tag{129 b}$$

$$\zeta = \alpha + \beta\left(\frac{D^2}{(\pi D - \nu e)h}\right)^2, \tag{129 c}$$

$$\zeta = \alpha + \beta\left(\frac{D}{h}\right) + \gamma\left(\frac{D}{h}\right)^2. \tag{129 d}$$

Dabei sind zu nehmen:

Für Tellerventile ohne untere Führung (Abb. *A*), wenn die Hubhöhe $h = 0{,}1\,D$ bis $0{,}25\,D$, die Breite $b = 0{,}1\,D$ bis $0{,}25\,D$ ist, die Gleichungen (129) und (129 b) mit

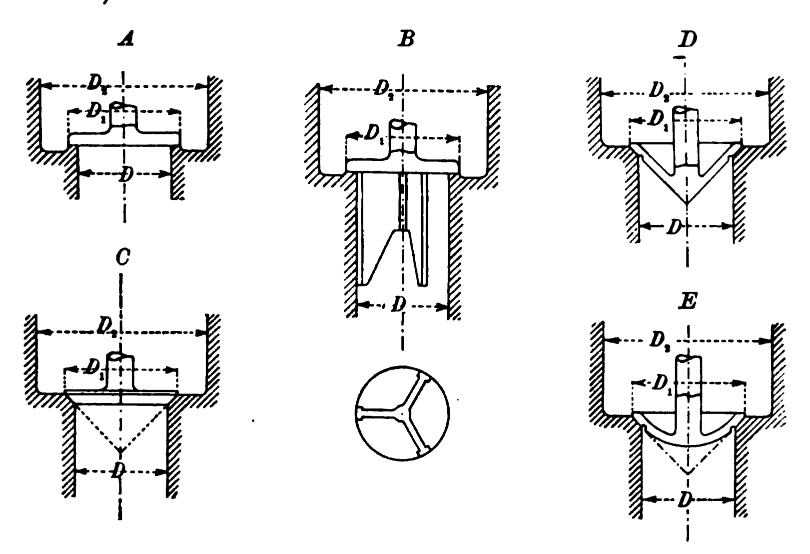
$\varkappa = 2{,}5 + 19\frac{b - 0{,}1\,D}{D}$, $\mu = 0{,}6$ bei schmaler bis 0,62 bei breiter Dichtungsfläche, $\alpha = 0{,}55 + 4\frac{b - 0{,}1\,D}{D}$, $\beta = 0{,}15$ bei schmaler bis 0,16 bei breiter Dichtungsfläche.

1) Ebenda S 453.

2) Z. d. Ver. deutsch. Ing. 30 (1886), S. 423; weitere Einzelheiten in *C Bach*, Versuche über Ventilbelastung und Ventilwiderstand, Berlin 1884.

Für Tellerventile mit unterer Führung (Abb. B) bei Hubhöhen $h = 0{,}125\,D$ bis $0{,}25\,D$ die Gl. (129 a) und (129 c) mit

Werten von $\varkappa$ und μ, welche 0,9 der oben angegebenen sind; Werten von α, welche die oben angegebenen um 0,8 bis 1,6 überschreiten, entsprechend einer Verengerung des Querschnittes der Ventilöffnung durch die Rippen auf $0{,}87\,F$ bis $0{,}8\,F$; $\beta = 1{,}7$ bis 1,75.



Für Kegelventile mit ebener Unterfläche (Abb. C) bei $b = 0{,}1\,D$ und $h = 0{,}1\,D$ bis $0{,}15\,D$ die Gl. (129) mit

$$\varkappa = -1{,}05, \quad \mu = 0{,}89;$$

ferner, weil die Änderung der Führung des seitlich ausweichenden Wassers bei Überschreitung der Hubhöhe $h = 0{,}15\,D$ eine plötzliche Änderung von P (aber nicht von ζ) bewirkt, bei $b = 0{,}1\,D$ und $h = 0{,}1\,D$ bis $0{,}25\,D$ die Gl. (129 d) mit

$$\alpha = 2{,}6, \quad \beta = -0{,}8, \quad \gamma = 0{,}14.$$

(Der Widerstand ist hier also wesentlich kleiner als bei Tellerventilen.)

Für Kegelventile mit kegelförmiger Unterfläche (Abb. D) bei Hubhöhen $h = 0{,}125\,D$ bis $0{,}4\,D$ die Gl. (129) und (129 b) mit

$$\varkappa = 0{,}38, \quad \mu = 0{,}68, \quad \alpha = 0{,}6, \quad \beta = 0{,}15.$$

Für Ventile mit kugelförmiger Unterfläche (Abb. E) bei Hubhöhen $h = 0{,}1\,D$ bis $0{,}25\,D$ Gl. (129) und (129 d) mit

$$\varkappa = 0{,}96, \quad \mu = 1{,}15, \quad \alpha = 2{,}7, \quad \beta = -0{,}8, \quad \gamma = 0{,}14.$$

Sämtliche Angaben setzen voraus, daß der ringförmige Querschnitt zwischen Ventilteller und Gehäusewand

$$\frac{\pi}{4}(D_2^2 - D_1^2) = 1{,}8\,F = 1{,}8\,\frac{\pi}{4}\,D^2$$

sei und daß das Wasser das Ventilgehäuse in senkrechter Richtung verlasse. Das von *Bach* benutzte Tellerventil ohne untere Führung, das Kegelventil mit ebener Unterfläche und das Ventil mit kugelförmiger Unterfläche waren an der ganzen Unterfläche sauber bearbeitet, das geführte Tellerventil dagegen nur an der Dichtungsfläche und den führenden Flächen der Rippen. Die Gehäusewandungen blieben unbearbeitet, dagegen war die Ventilsitzöffnung ausgebohrt.

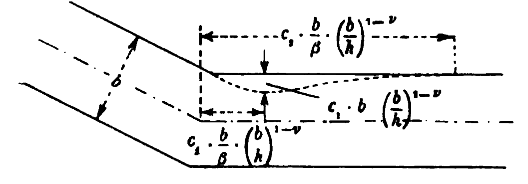
Beispiel. In einer Rohrleitung von $D = 0{,}05$ m Weite ist ein Tellerventil von $D_1 = 0{,}062$ m Durchmesser mit oberer Führung als Rückflußventil eingeschaltet. Der Durchfluß hat so groß zu sein, daß die Strömungsgeschwindigkeit U im Rohr sich zu 1,85 m berechnet. Welchen Druckhöhenverlust verursacht das Ventil bei 1 kg Gewicht im Wasser? Es findet sich $F = 0{,}00196$, $U^2 : 2g = 0{,}174$, daher $P = 1 = 1000 \cdot 0{,}00196 \cdot 0{,}174.\left[2{,}88 + \frac{0{,}000408}{h^2}\right] = 0{,}982 + \frac{0{,}000139}{h^2}$ oder $0{,}018\; h^2 = 0{,}000139$ oder $h = \sqrt{0{,}0077} = 0{,}0878$. Das Ventil wird sich also 0,0878 m vom Sitz erheben, womit $D^2 : h^2 = 0{,}0025 : 0{,}0077 = 0{,}325$, ferner $\zeta = 0{,}55 + 4\,\frac{0{,}006 - 0{,}005}{0{,}05} + 0{,}15 \cdot 0{,}325 = 0{,}55 + 0{,}08 + 0{,}049 = 0{,}68$ und der Druckverlust $= 0{,}68 \cdot 0{,}174 = 0{,}118$ m wird.

Für den Übergang des Wassers aus einem gewöhnlichen Feuerpfosten in einen Schlauch ermittelte *J. R. Freeman*[1]) eine Widerstandshöhe von

$$0{,}5\,\frac{U^2}{2g},$$

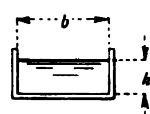
worin U die Geschwindigkeit im Schlauch bedeutet.

70. Richtungsänderungen von Gerinnen und Röhren. In einem *Knie* eines *Gerinnes* bewegen sich die Wasserteilchen vermöge ihrer Trägheit tunlichst in ihrer ursprünglichen Richtung weiter, ehe sie die neue einschlagen. Dadurch entsteht unterhalb des vorspringenden Eckes eine nicht durchflossene Stelle, also eine Einengung des durchflossenen Querschnittes, auf welche wieder eine



1) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 21 (1889), S. 459. Der Wert 0,5 ergibt sich aus dem von *Freeman* angegebenen Ausflußkoeffizienten. Daß die Verwendung von Kuppelungen von 64 mm Weite in einem Schlauch von 76 mm belanglos ist, siehe Journ. f. Gasb. u. Wasserv. 38 (1895), S. 170 nach *W. Jackson*.

Ausbreitung der Wasserfäden folgt, die einen Druckverlust, also eine Gefällshöhe gemäß *Borda* verlangt. Bedeutet b die Breite, h die gleichmäßige Tiefe, β den Winkel der beiden Richtungen, ν eine kleine Zahl, c_1 und c_2 Konstante, die übrigens sowie ν noch unbekannt sind, so schätzt *J. Boussinesq*[1])



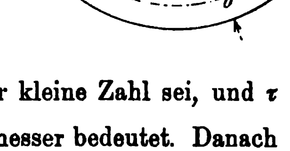
den Abstand der Verengung vom Eck $= c_1 \frac{b}{\beta}\left(\frac{b}{h}\right)^{1-\nu}$,

die hier auf das tote Wasser entfallende Fläche $= c_1 bh \left(\frac{b}{h}\right)^{1-\nu}$,

den Abstand der Stelle, wo die Wasserfäden wieder parallel werden, vom Eck $= c_2 \frac{b}{\beta}\left(\frac{b}{h}\right)^{1-\nu}$,

wobei er unter Eck den Achsenschnittpunkt versteht.

Einen Bogen eines Flusses faßt *Boussinesq* als eine fortlaufende Reihe von Knieen auf und gelangt nach Zwischenüberlegungen auf Grund obiger Ausdrücke zur Ansicht, daß der Druckverlust, also der Höhenverlust pro Längeneinheit, wenn die Geschwindigkeit U im unverengten Fluß herrscht, durch



$$\tau \frac{U^2}{h} \sqrt{\frac{b}{\mathfrak{R}}} \left(\frac{b}{h}\right)^{\frac{1-3\nu}{2}}$$

ausdrückbar sein müsse, worin $\frac{1-3\nu}{2}$ eine sehr kleine Zahl sei, und τ wieder eine Konstante, $\mathfrak{R}$ den Krümmungshalbmesser bedeutet. Danach fände sich, wenn in der Geraden $U = c\sqrt{hJ}$ gilt, im Bogen

$$J = \frac{U^2}{h}\left(\frac{1}{c^2} + \tau_1 \sqrt{\frac{b}{\mathfrak{R}}}\right); \tag{130}$$

hier ist τ_1 eine neue Konstante, die nach Untersuchungen von *W. Lahmeyer*[2]) ungefähr $= \frac{3}{4}\frac{1}{c^2}$ sein müßte, also die Dimension $m^{-1}\,sec^2$ hat.

Mit Knieröhren befaßte sich *J. Weisbach*[3]), welcher bei Versuchen mit einer Röhre von 3 cm Weite für einen halben Ablenkungswinkel δ den Widerstandskoeffizienten

$$\zeta = 0{,}9457 \sin^2\delta + 2{,}047 \sin^4\delta \tag{131}$$

fand oder für

$\delta =$	10°	20°	30°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
$\zeta =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,26	1,56	1,86	2,16	2,43.

1) Eaux courantes, S. 602; J. de math. (3) 9 (1883), S. 129.

2) Allgemeine Bauzeitung 17 (1852), S. 153.

3) Lehrbuch 1, Leipzig 1845, S. 437.

Hiernach wäre bei einem rechtwinkligen Knie oder $= 45^0$ der durch die Richtungsänderung herbeigeführte Druckhöhenverlust

$$\zeta \frac{U^2}{2g} = 0{,}984 \frac{U^2}{2g}$$

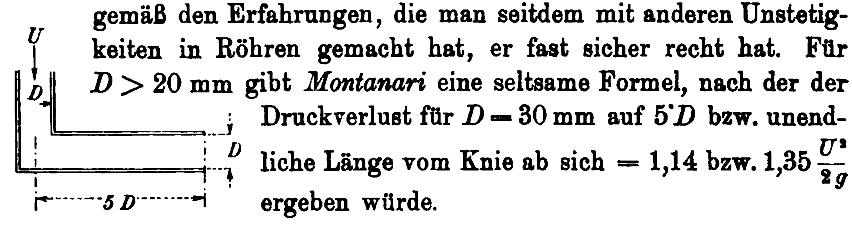
oder fast der Geschwindigkeitshöhe gleich. Bei engerem Rohr war ζ größer und zeigte sich z. B. für ein Knie von 1 cm Weite und 90° Ablenkung $= 1{,}536$. Letzterer Angabe schließt sich die *T. Montanaris* an, der mit rechtwinkligen Knien von $D = 2r = 1$ bis 4 cm Weite Versuche anstellte, und sagt, es sei für $2r < 2$ cm der durch die Ablenkung hinzutretende Druckhöhenverlust auf eine Länge von $5\,D$ vom Knie abwärts

$$\left(1{,}09 + \frac{45}{D^2}\right) \frac{U^2}{2g}$$

und auf unendliche Länge vom Knie abwärts

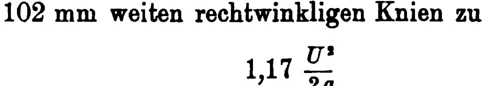
$$\left(1{,}30 + \frac{53{,}5}{D^2}\right) \frac{U^2}{2g},$$

wobei D in mm auszudrücken sei. *Montanari*[1]) beschränkt hiernach die Wirkung des Knies nicht auf dessen unmittelbare Nachbarschaft, worin

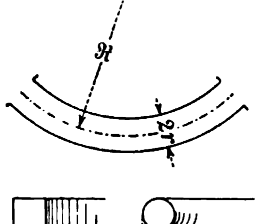


gemäß den Erfahrungen, die man seitdem mit anderen Unstetigkeiten in Röhren gemacht hat, er fast sicher recht hat. Für $D > 20$ mm gibt *Montanari* eine seltsame Formel, nach der der Druckverlust für $D = 30$ mm auf $5\,D$ bzw. unendliche Länge vom Knie ab sich $= 1{,}14$ bzw. $1{,}35 \frac{U^2}{2g}$ ergeben würde.

Verläßlicher erscheinen die Ermittelungen *A. W. Brightmores*[2]), welcher den zur Rohrreibung hinzukommende Druckverlust in 76 bzw. 102 mm weiten rechtwinkligen Knien zu



$$1{,}17 \frac{U^2}{2g}$$



bestimmte, welcher Wert zwischen den bisher angeführten liegt und gegen eine Abnahme von ζ bei wachsender Weite spricht.

Für *Krümmer* (Kropfröhren) von $2r$ Lichtweite, deren Achse einen Viertelkreis vom Halbmesser $\mathfrak{R}$ bildet — solche Krümmer seien im folgenden als Ellbogen bezeichnet — fand *J. Weisbach*[3]) auf Grund eigener

1) Politecnico 45 (1893), S. 522.
2) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 169 (1907), S. 325.
3) Lehrbuch 1, Leipzig 1845, S. 439.

Versuche und solcher von *L. G. du Buat* empirisch als Widerstandsziffer ζ bei

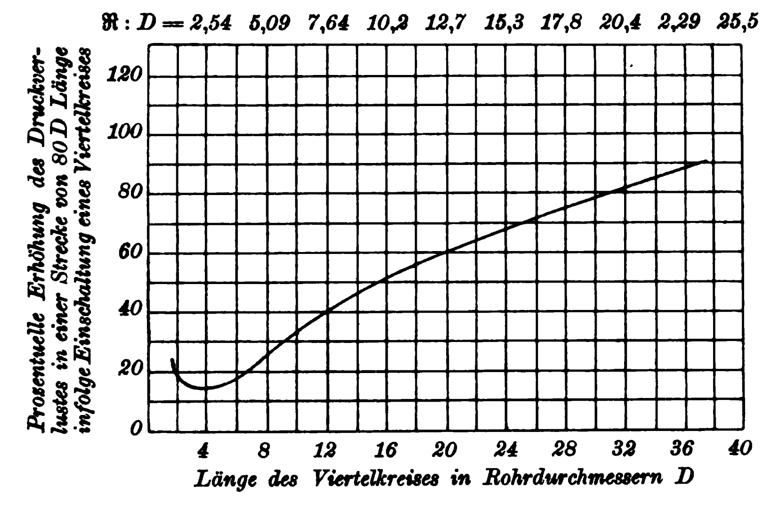
$$(132)\quad \begin{cases} \text{kreisförmigen Querschnitt} = 0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^{7/2}, \\ \text{rechteckigen} \quad\text{„}\quad = 0{,}124 + 3{,}104\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^{7/2}, \end{cases}$$

wozu bemerkt werde, daß bei den „rektangulären Querschnitten" *Weisbach* nur die Lichtweite in der Krümmungsebene zu berücksichtigen scheint, weil nur diese die Einschnürung des Wassers beeinflußt. Durch Ausrechnen von (133) erhält man für

$r:\mathfrak{R} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta =$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978
$\zeta =$	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

Da sich in solchen Krümmern die Einschnürung schon vollständig vollzogen habe, bewirkt nach *Weisbach* ein größerer Zentriwinkel als 90° keine Erhöhung von ζ.

Diese Anschauungen lassen sich heute nicht mehr aufrechthalten. Zunächst stellte *J. R. Freeman*[1]) fest, daß in Spritzenschläuchen von

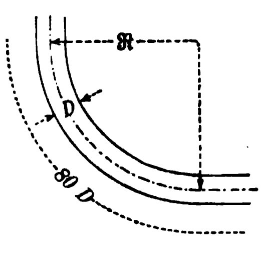


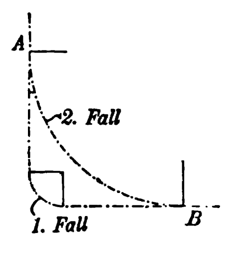
von 63 und 67 mm Weite der Zuwachs des Druckverlustes, welchen Ellbögen (Quadranten) von 61, 91 und 122 cm Halbmesser hervorriefen, mit letzterem wuchs. Dann fanden *G. S. Williams*, *C. W. Hubbell* und *G. H. Frenkell*[2]), daß der Druckverlust keineswegs auf den Bogen selbst beschränkt sei. Es erhöht sich in diesem nämlich die Wirbelung und so muß das Wasser noch eine längere Strecke durchlaufen, ehe es sich

1) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 21 (1889), S. 365.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 47 (1902), S. 183.

wieder beruhigt. Die Genannten, welche für ihre Versuche Straßenleitungen von 0,3 bis 0,76 m Dmr. benutzten, geben beistehend wiedergegebene Kurve, aus der hervorgeht, um wieviel Prozent zu Beginn einer Strecke von 80 Durchmessern Länge befindliche Ellbögen verschiedener Länge den Druckverlust der Strecke erhöhen. Wenn man z. B. in einen Strang vom Durchmesser D einen Ellbogen einlegen muß,





ist es am günstigsten, demselben eine Länge von $4D$, also der Rohrachse einen Krümmungshalbmesser $\mathfrak{R}$ von der Länge $\frac{8D}{\pi}$ zu geben. Damit steigt auf $80D$ Länge der Druckverlust auf 1,13 desjenigen, der ohne jede Krümmung vorhanden wäre. Würde man aber die Krümmung von 90^0 auf eine Länge von $38D$ verteilen, so stiege der Druckverlust fast auf den doppelten der geraden Strecke. Allerdings wird im zweiten Falle zwischen zwei *gegebenen* Punkten A und B die Rohrlänge um

$$0{,}273\,(38\,D - 4\,D) = 9{,}3\,D$$

kürzer als im ersten, wodurch wieder ein entsprechender Druckverlust entfällt. Zu dem überraschenden Ergebnisse der Versuche bemerkt *J. P. Church*[1]) erläuternd, daß der pro Längeneinheit des Bogens zur Rohrreibung der geraden Strecke hinzutretende Druckverlust zwar bei flacher Krümmung abnehme, aber in geringerem Maße, als die bei dem gegebenen Zentriwinkel dem Krümmungshalbmesser proportionale Bogenlänge wächst. Die Schwierigkeit bei Biegung von Metallröhren den ursprünglichen Querschnitt unverändert zu erhalten, bewog *C. W. L. Alexander*[2]), Röhren und Ellbogen aus an der Innenseite gefirnißtem Holz zu benutzen. Die Lichtweite war 32 mm und das Druckgefälle im geraden Rohr ergab sich bei der Geschwindigkeit U (in m sec^{-1}) zu

$$J = 0{,}0411\,U^{1,77}.$$

Bei Einlegen eines Ellbogens von der Länge l zeigte sich der Zuwachs an Druckhöhenverlust ebenfalls $U^{1,77}$ proportional nämlich, wenn $r \gtreqless 0{,}2\,\mathfrak{R}$ war, zu

$$(133)\qquad 1{,}66\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^{0,83} l \cdot 0{,}0411\,U^{1,777} = 0{,}107\left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^{0,83} \mathfrak{R}\,U^{1,777},$$

während bei schärferer Krümmung bis zu $r = 0{,}5\,\mathfrak{R}$ der Zuwachs das Gesetz

1) Ebenda S. 215.

2) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 159 (1905), S. 363.

$$25{,}0 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^{2,5} l \cdot 0{,}0411\, U^{1,777} = 1{,}61 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^{2,5} \mathfrak{R}\, U^{1,777}$$

befolgte. Ähnlich berechnete *Alexander* für ein Messingrohr von *Saph* und *Schoder* den Zuwachs zu

$$3{,}27 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^{0,83} l \cdot 0{,}0262\, U^{1,76} = 0{,}135 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right)^{0,83} \mathfrak{R}\, U^{1,76}.$$

Nach obigen Formeln wächst der von der Krümmung stammende Druckverlust einmal mit wachsender, das andere Mal bei abnehmender Krümmung. Dazwischen habe er, wenn $D = 2r$ die Rohrweite bedeutet, für

$$\mathfrak{R} = 2{,}5\, D \quad \text{oder} \quad \frac{r}{\mathfrak{R}} = 0{,}2$$

seinen kleinsten Wert. Die Versuche *Alexanders* litten an dem Fehler, daß die an den Bogen angeschlossene gerade Strecke viel zu kurz war, als daß sich in ihr die Bogeneinwirkung erschöpft hätte. — *A. W. Brightmore*[1]) verwendete Flanschenröhren von 76 und 102 mm Weite und fand den durch Ellbögen verursachten gesamten Zuwachs an Druckverlust (gegenüber dem in geraden Röhren) genau U^2 proportional. Für $\mathfrak{R} = 3$ bis $4D$ war er, wie in den weiten Leitungen *Williams* und seiner Mitarbeiter, am kleinsten, dann hatte er ein Maximum für $\mathfrak{R} = 6$ bis $7\,D$, worauf er wieder sank, während er bei *Williams* bei $\mathfrak{R} = 24\,D$ noch immer mit $\mathfrak{R}$ wuchs. Daß auch hier bei weiten Leitungen bei fortgesetzter Verflachung der Krümmung der Druckverlustzuwachs doch einmal wieder abnimmt, geht übrigens daraus hervor, daß er für $\mathfrak{R} = \infty$ verschwinden muß. *A. W. Brightmore* fand ferner, daß für das günstigste Krümmungsverhältnis $\mathfrak{R} =$ beiläufig $4\,D$ der Zuwachs, den der gesamte Druckverlust dadurch erleidet, daß ein Teil des Rohres einen Ellbogen bildet, vom Rohrdurchmesser fast unabhängig ist, also nur von der Geschwindigkeit (und auch wohl von der Rauhigkeit) abhängt und z. B. für 1,52 m sec^{-1} Geschwindigkeit etwa 32 mm beträgt. Das stimmt mit *Alexanders* Angaben nicht, nach welchen bei gegebenem Verhältnis $r : \mathfrak{R}$ der Druckverlust mit dem Krümmungshalbmesser, also wenn dieser $= 4\,D$ ist, mit D selbst wachsen soll. Für $\frac{r}{\mathfrak{R}} = 0{,}2$ bzw. 0,125 (oder $\mathfrak{R} = 2^1/_2$ bzw. $4D$) verursacht nach *Alexanders* Formel in seinem Rohr von $D = 63{,}5$ mm bei einer Geschwindigkeit $U = 1{,}524$ m sec^{-1} ein Ellbogen eine Zunahme des Druckhöhenverlustes von 9,9 bzw. 10,2 mm und damit ein Drittel von dem, was nach *Brightmore* zu erwarten wäre. *E. W. Schoder*[2]) machte dann abermals Versuche mit Eisenrohrellbögen

1) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 169 (1907), S. 315.
2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 62 (1909), S. 67.

von 15 cm Weite und 0,2 bis 3,05 m Radius und fand den geringsten Druckverlust bei flacher Krümmung, nämlich bei $\mathfrak{R}$ ungefähr $= 30r$; auch war der zusätzliche Verlust viel kleiner als nach *Williams* Angaben. Dagegen leitete *G. J. Davis*[1]) aus diesen Versuchen ab, daß sie *Brightmores* Angabe, es seien die zusätzlichen Ellbogenverluste für $\mathfrak{R} = 4D = 8r$ bei allen Rohrweiten gleich groß, bestätigen.

Das Verhalten von Ellbogen erscheint nach dem Gesagten noch nicht genügend erforscht und für Bögen kleineren Zentriwinkels fehlen Untersuchungen fast gänzlich. Nach Beobachtung von *Schoder*[2]) an einer Leitung mit Bögen von 2° bis 4° Zentriwinkel scheinen solche allerdings wirkungslos zu sein.

IX. Der Ausfluß durch Öffnungen.

71. Geschichtliche Entwicklung. Die Reaktion. Die Koeffizienten. Das Ausflußproblem war einer der Ausgangspunkte[3]) der theoretischen Hydraulik und schon die Schüler *Galileis*, namentlich *Castelli* und *Toricelli*[4]), haben sich mit ihm befaßt. Ersterer habe um 1640 gezeigt, daß die Geschwindigkeit bei Ausfluß des Wassers aus kleinen Öffnungen mit deren Tiefenlage unter dem Spiegel (und zwar, wie er glaubte, proportional) zunehme, letzterer beobachtete, daß ein Flüssigkeitsstrahl, der aus einem Gefäße gespeist wird, nahezu bis zum freien Gefäßspiegel aufsteigen kann. Nach dem Fallgesetz mußten sich hiernach die Ausflußgeschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen verhalten. Auf Grund eigener Versuche wurde dieses Gesetz von *Mariotte*[5]) und von *D. Guglielmini*[6]) bestätigt. Dabei fand ersterer, daß die Sprunghöhe aus einer Öffnung in dünner Wand größer als aus einem Mundstück ist. *I. Newton*[7]) trachtete die Ausflußgesetze theoretisch zu begründen, gelangte jedoch zunächst zur irrtümlichen Folgerung, daß die Geschwindigkeit gleich der Endgeschwindigkeit eines durch die *halbe* Druckhöhe freifallenden Körpers sei. Den Widerspruch mit früheren und eigenen Versuchen erklärte er später[8]) dahin, daß die Geschwindigkeit zwar in

1) Ebenda S. 109.

2) Ebenda S. 88. Krümmer, die Potentialbewegung zulassen: *H. Grether*, Verhandl. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbefl. 1909, S. 117f.

3) Näheres zu ersehen in *M. Rühlmann*, Hydromechanik, 2. Aufl., Hannover 1880, S. 187f.

4) *Toricelli*, del moto dei gravi, Firenze 1644.

5) Traité du mouvement des eaux et des autres fluides, Paris 1686, Teil 3, Gespräch 2.

6) Mensura aquarum fluentium, Bononia 1690.

7) Philosophiae naturalis principia mathematica 1687, L. 2 Prop. 36.

8) 2. Auflage der Principia 1740.

der Gefäßmündung der halben, aber etwas tiefer im eingeschnürten Strahl, der vena contracta, bereits der ganzen Druckhöhe entspreche, wonach die Einschnürung im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ erfolgen müsse. Nachdem *Mariotte* zur Bestimmung der aus einem Gefäße fließenden Wassermenge den Wasserzoll (pouce d'eau) eingeführt hatte, ging der *Marchese G. Poleni*[1]) auf die Abhängigkeiten der Ausflußmenge näher ein. Er wies nach, daß ein zylindrisches Mundstück sie vermehrt, ferner daß mit dessen Länge der Ausfluß erst zunimmt, dann wieder abnimmt. Er benutzte auch konische Mundstücke und fand, daß der Strahl die Öffnung unter Umständen gar nicht ausfüllt. Bei kreisförmigem Loch in dünner Wand bestimmte er den Strahlquerschnitt $= 0{,}622$ der Lochfläche.

Die Kenntnis der absoluten Größe der *Ausflußgeschwindigkeit* ist *Daniel Bernoulli*[2]) zu verdanken, der sein schon erwähntes Prinzip mit den Worten aussprach, daß zwischen dem wirklichen Herabsteigen (descensum actualem) einer Flüssigkeit in einem Gefäße und deren virtuellem Aufsteigen (ascensum potentialem) stets Gleichheit stattfinde. Die Gleichung *Bernoullis* lautet

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{hF^2}{F^2 - f^2}, \tag{134}$$

worin V die Geschwindigkeit, h die Tiefe unter dem Spiegel, F den Gefäßquerschnitt, f die Öffnungsfläche bedeutet. Aus ihr folgt für recht kleine Öffnung die Formel

$$V = \sqrt{2gh}, \tag{134a}$$

welche häufig *Toricelli*sche Formel genannt wird.

Der Ausfluß ist nicht ohne Wirkung auf die Druckverteilung im Innern des Gefäßes. So lange hier Ruhe herrscht, heben sich die Wasserdrucke aufeinander gegenüberliegende Flächen auf. Strömt aber ein Strahl vom eingeschnürten Querschnitt ψF mit der Geschwindigkeit $V = \sqrt{2gh}$ in der Tiefe h unter dem Spiegel durch eine Öffnung aus, die man sich zunächst in einer Seitenwand denken kann, so erhält fortgesetzt in der Zeiteinheit eine Masse

$$\frac{\gamma \psi F V}{g},$$

die früher ruhend war, eine Beschleunigung V. Das ist, weil im eingeschnürten Querschnitt der Druck Null ist, nach dem Impulssatz nur möglich, wenn ein Druck

$$\frac{\gamma \psi F V}{g} \cdot V = \frac{\gamma \psi F V^2}{g} = 2\gamma \psi F h \tag{135}$$

1) De Castellis, Florentia 1718, u. italienisch Delle Pescaje, Raccolta 3, S. 414 f.

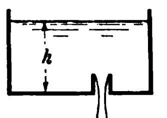
2) Hydrodynamica, Argentorati 1738.

den Strahl vertreibt. Der Druck, den das Gefäß im entgegengesetzten Sinn der Ausflußrichtung erleidet, oder die *Reaktion*, ist also doppelt so groß wie der statische Druck auf den Strahlquerschnitt. Die Richtigkeit dieses Satzes haben Versuche von *D. Bernoulli*[1]), von dem obiger Beweis herrührt, *Brunnaci*[2]) und anderen erwiesen.

Nach (134a) müßte die in der Zeiteinheit ausfließende Wassermenge $F\sqrt{2gh}$ betragen, sie ist aber geringer, nur

(135a) $$Q = \mu F\sqrt{2gh},$$

wobei der Ausflußkoeffizient[3]) μ also < 1 ist. *J. C. Borda*[4]) hat diese Erscheinung untersucht und für eine kreisförmige Bodenöffnung in dünner Wand $\mu = 0{,}625$ ermittelt. Noch kleiner, nämlich $= 0{,}514$, zeigte sich μ,



wenn das Wasser zur Öffnung durch einen nach innen gerichteten, zylindrischen Stutzen treten mußte. Für diesen Fall leitete *Borda* μ aus dem Impulssatz theoretisch ab. Der Druck auf die Stutzeninnenmündung beträgt bei einem Eigengewicht γ des Wassers, weil die Bewegung in der Druckrichtung erfolgt und der in Geschwindigkeitshöhe verwandelte Teil der Druckhöhe selbst wieder als Druckhöhe wirkt,

$$\gamma Fh.$$

Wenn nun der eingeschnürte Querschnitt μF mißt und aus ihm eine Menge $\mu F V$ in der Zeiteinheit ausfließt, erhält in der Zeiteinheit eine vorher in Ruhe befindliche Masse $\frac{\gamma F V}{g}$ die Beschleunigung V. Nach besagtem Satz müßte daher

$$\gamma Fh = \frac{\gamma F V^2}{g}$$

sein, worin nach (134a) $V^2 = 2gh$ ist, so daß sofort der Wert $\mu = \frac{1}{2}$ hervorginge, der sich von der meßbaren Einschnürung nicht weit entfernt. Auffallend war es aber, daß sich sowohl bei einem einfachen Loch in dünner Wand wie bei einspringendem Mundstück die Wassermenge noch kleiner zeigte, als der verjüngte Strahl sie erwarten ließ; so gab die Messung des aus einem Bodenloch tretenden Strahles eine Einschnürung von 0,646 gegenüber dem erwähnten $\mu = 0{,}625$. Die Geschwindigkeit konnte also nicht ganz jene des *Bernoulli*schen Theorems erreichen. Hiermit war es klar, daß der *Ausflußkoeffizient* μ als Produkt zweier anderer Koeffizienten, des *Kontraktionskoeffizienten* ψ und des *Geschwindigkeitskoeffizienten* φ, aufgefaßt werden kann.

1) Hydrodynamica, Argentorati 1738, Sect. 13, § 4, S. 280.

2) *Rühlmann* zitiert Hydromechanik, 2. Aufl., S. 634: Memorie della Soc. Italiana delle Scienze 17, Verona 1816.

3) Zusammenhang zwischen μ und ζ s. unten Gl. (148).

4) Paris, Mém. de l'acad. Royale des Sciences 1766 (1769), S. 599.

72. Der Geschwindigkeitskoeffizient. Der Geschwindigkeitskoeffizient erklärt sich wesentlich durch die Reibung, also durch die Zähigkeit des Wassers und da auf dem kurzen Wege, den dieses bei seinem Ausflusse zurücklegt, nicht viel Arbeit verrichtet wird, ist der Geschwindigkeitskoeffizient nahezu = 1. Bei glattpolierten, metallenen Mundstücken, bei welchen die Kontraktion nahezu vermieden erscheint, also der Kontraktions- mit dem Ausflußkoeffizienten fast ganz übereinstimmt, haben Versuche von *Michelotti*, *Eytelwein*, *Weisbach* und anderen nachgewiesen, daß die wirklich ausfließende Wassermenge 96 bis 99 Prozent der theoretischen beträgt. Insbesondere fand *Weisbach*[1]) für ein gut abgerundetes Mundstück von 1 cm Lichtweite für

$h =$ 0,02	0,5	3,5	17	103 m
0,959	0,967	0,975	0,994	0,994

Neben der Reibung übt auch die Drucksteigerung im Innern des Strahles eine Wirkung aus. Bei dem Ausfluß aus einer Öffnung in dünner Wand treten nämlich die Wasserfäden konvergierend aus, so daß im Strahlinnern ein Gegendruck entsteht, der die Geschwindigkeit verkleinert. Beträgt dieser Gegendruck p (über dem Atmosphärendruck) oder in Flüssigkeitshöhe gemessen $\frac{p}{\gamma}$ (wobei γ das Eigengewicht der Flüssigkeit), so erlangt nach dem *Bernoulli*schen Theorem, also soweit von der Reibung abgesehen wird, ein Teilchen, das bis zur Tiefe $h + z$ unter den Spiegel sinkt, hier die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\left(h + z - \frac{p}{\gamma}\right)}. \tag{136}$$

Am Umfang, wo nur atmosphärischer Druck herrscht oder $p = 0$ ist, hat daher in der Tiefe $h + z$ die Geschwindigkeit die Größe $\sqrt{2g(h+z)}$, während sie nach innen abnimmt. *Bazin*[2]) hat die Geschwindigkeit mit der *Pitot*schen Röhre gemessen und gefunden, daß sie in einer wagrechten Öffnung in deren Mitte ihr Minimum $v_{\min}$ hat. Das Nähere besagt nachstehende Tabelle:

Lage der Öffnung	Abmessungen	Einschnürung	Höhe von $v_{\min}$ über der Mitte	$\frac{v_{\min}}{\sqrt{2gh}}$
wagrecht	○ 10 cm Dmr.	vollständig		0,64
„	○ 10 cm Dmr.	„		0,64
senkrecht	○ 20 cm Dmr.	„	0,03 cm	0,62
„	□ 20/20 cm	„	0,02 cm	0,64
„	▭ 20/80 cm	oben und unten	0,01 cm	0,69

1) Civilingenieur (2) 5 (1859), S. 87, *Weisbach-Herrmann*, S. 968.
2) Paris, Mém. prés. par div. sav. 32 (1902), No. 4, S. 31, 38, 40, 41.

Bei dem aus der wagrechten runden Öffnung tretenden Strahl verteilten sich in der Öffnungsfläche die (im allgemeinen geneigten) Geschwindigkeiten wie folgt, wenn r den Lochhalbmesser (von 10 cm), a den Abstand von der Mitte bezeichnet:

$a : r$	= 0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$v : \sqrt{2gh}$	= 0,636	0,636	0,645	0,652	0,660	0,670	0,680	0,688	0,703	0,702.

Schon nahe unterhalb der Ausflußöffnung glichen sich die Geschwindigkeiten fast aus und stiegen zugleich rasch an, so daß beim wagrechten Rundloch von 0,2 m Durchmesser das Verhältnis $v : \sqrt{2gh}$ in der Tiefe 0,035 m unter der Öffnungsfläche bereits 0,84 betrug. In 0,1 oder 0,12 m Tiefe unter der Öffnung war das Minimum völlig verschwunden. Für die *mittlere* Geschwindigkeit V gilt, wenn h die Tiefe der Öffnungsmitte unter dem Spiegel und z den Höhenabstand zwischen der Öffnungsmitte und der betreffenden Strahlstelle bezeichnet, nach der oben gegebenen Definition des Geschwindigkeitskoeffizienten

$$V = \varphi\sqrt{2g(h+z)}. \tag{136a}$$

Stets hatte φ in einiger Entfernung von der Öffnung ein Maximum. Bei wagrechter Öffnung bleibt dieses um einige Tausendstel kleiner als 1, während es bei lotrechter Öffnung je nach Druckhöhe h und Form 1,03 oder 1,04 erreichen kann und bei einem Kreis von 20 cm Durchmesser 1,011 beträgt. Daß $V > 1$ zu werden vermag, ist nach *Bazin*[1]) nur erklärlich, weil der Ansatz $V = \sqrt{2g(h+z)}$ gleiche Geschwindigkeit aller Wasserfäden im Querschnitt voraussetzt, und in Strahlen, die ihren Querschnitt stark ändern, vielleicht stellenweise geringerer als Atmosphärendruck herrscht.

73. Die Einschnürung. Nach Austritt aus einer Öffnung in dünner Wand zieht sich der Strahl rasch zusammen, womit offenbar die Geschwindigkeit wachsen muß. Da nun das Wasser während des Falles eine Beschleunigung erfährt, ist anzunehmen, daß die Geschwindigkeit im Strahl mit der Entfernung von der Öffnung wächst, also der Querschnitt, so lange der Strahl nicht zerstäubt, abnimmt. Dementsprechend fanden *F. Savart*[2]), *G. Magnus*[3]) und *U. Masoni*[4]) bei kreisrunden und *H. Bazin*[5]) bei kreisrunden und rechteckigen Öffnungen keinen eigentlichen Kontraktionskoeffizienten im Sinne des Verhältnisses eines Minimalquerschnittes zur Öffnungsfläche. *U. Masoni*, der die Strahlform

1) Ebenda S. 45.
2) Ann. chim. phys. 53 (1883), S. 337, 338.
3) Ann. Phys. Chem. (4) 5 (1855), S. 44.
4) Politecnico 43 (1895), S. 550.
5) Paris, Mém. prés. par div. sav. 32 (1902), N. 4, S. 42, 17.

durch Beleuchtung des Strahles und Messung des Schattens bestimmte, fand sie nicht nur vom Öffnungshalbmesser, sondern auch von dessen Verhältnis zur Druckhöhe unabhängig. Nach *Bazins* Messung ist bei einem wagrechten Loch von 0,1 m Durchmesser unter 1 m Druckhöhe die Form die folgende (wenn z die Tiefe unter der Öffnungsfläche, r den Öffnungshalbmesser, ψ das Flächenverhältnis bezeichnet)

0,1 m
1,0 m

$z:2r=$	0,58	0,88	1,38	1,88	2,88	3,88	4,88	5,88
$\psi=$	0,598	0,587	0,575	0,560	0,537	0,519	0,504	0,491

Auch bei verschiedenen Flüssigkeiten scheint die Kontraktion, wie *Weisbach*[1]) durch Vergleich derselben bei Wasser, Quecksilber und Rüböl ermittelte, ziemlich gleich groß zu sein.

Da der Geschwindigkeitskoeffizient sich wenig, der Kontraktionskoeffizient aber wesentlich von 1 unterscheidet, kommt es beim Ausfluß vornehmlich auf letzteren an, so daß der Kontraktionskoeffizient sogar manchmal mit dem Ausflußkoeffizienten identifiziert wird. Ersterer ist nun, wie schon *Borda* gezeigt hat, der theoretischen Erforschung nicht unzugänglich. Hier soll nun noch eine Betrachtung folgen, die an den oben erwähnten Begriff der Reaktion anknüpft.

Es werde vom Rande der Ausströmungsöffnung F ausgehend, die in der Tiefe h unter dem Spiegel liege, eine Fläche F_1 gebildet, welche die Wasserfäden senkrecht schneidet. Es werde ferner vorausgesetzt, daß die Strömungsgeschwindigkeit bei dem Durchgang durch die Fläche F_1 überall gleich groß und zwar $= v_1$ sei. Dann wirkt zunächst auf die Fläche F_1 ein *statischer* Druck und ebensolcher Gegendruck $h - \frac{v_1^2}{2g}$, dessen Resultierende senkrecht zur Randlinienebene, also zur Öffnung gerichtet ist und (bei einem Eigengewicht γ)

h
F
F_1
μF

$$\gamma F\left(h - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

beträgt. Da ferner in der Zeiteinheit die Menge $\frac{\gamma}{g} v_1 \int dF_1$ aus der Ruhe in Bewegung gerät, erfordert dies nach dem Impulssatz eine in der Strahlrichtung von den Gefäßwänden ausgeübte besondere Kraft

$$\frac{\gamma}{g} v_1 \int (dF_1 \cdot v_1 \cos\delta) = \gamma \frac{v_1^2}{g} \int \cos\delta \, dF_1 = \frac{\gamma v_1^2}{g} F,$$

wobei δ die Neigung des Flächenteiles dF_1 gegen die Öffnung bezeichnet,

1) Polyt. Zentralblatt (1851) col. 385 und Experimentalhydraulik, Freiberg 1855, S. 181. *Weisbach-Herrmann*, S. 1080.

also $\cos\delta\, dF_1$ die Projektion von dF_1 auf die Öffnung darstellt. Die auf die Fläche F_1 drückende Mittelkraft und die gleich große aber entgegengesetzte Reaktion des von F_1 abgegrenzten Körpers gegen die Gefäßwände hat daher die Größe

$$\gamma F\left(h - \frac{v_1^2}{2g}\right) + \frac{\gamma v_1^2}{g} F = \gamma F\left(h + \frac{v_1^2}{2g}\right).$$

Diese Reaktion muß aber nach *Bernoulli* $= 2\psi\gamma F h$ sein. Daher gilt

$$2\psi\gamma F h = \gamma F\left(h + \frac{v_1^2}{2g}\right), \tag{137}$$

worin, da gleiche Mengen durch F und ψF fließen (bei einer Geschwindigkeit v in ψF),

$$v_1 = \frac{\psi F}{F_1} v = \frac{\psi F}{F_1}\sqrt{2gh}$$

ist. In (137) eingesetzt gibt dies

$$2\psi\gamma F h = \gamma F h + \frac{\gamma\psi^2 F^2}{F_1^2} h \quad \text{oder} \quad 2\psi = 1 + \psi^2 \frac{F^2}{F_1^2}$$

oder

$$\psi = \frac{F_1^2}{F^2} - \sqrt{\frac{F_1^4}{F^4} - \frac{F_1^2}{F^2}}. \tag{137a}$$

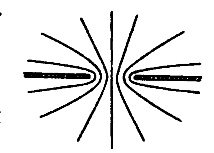
Für den nach innen gerichteten Stutzen erhält man hiernach, wenn man sich die Fläche F_1 als Kugelfläche vorstellt, $F_1 = 4F$ und $\psi = 0{,}51$, was noch besser mit der Erfahrung stimmt als *Bordas* 0,5. Für eine Halbkugel oder $F_1 = 2F$ zeigt sich $\psi = 0{,}536$, also ein kleinerer Wert als tatsächlich kreisförmige Löcher in dünner Wand ergeben, bei welcher ψ nahezu $= 0{,}6$ zu nehmen ist. Das läßt sich dadurch erklären, daß für F eine flachere Haube als die Halbkugel zu nehmen gewesen wäre. Dem Wert $\psi = 0{,}6$ entspräche $F^2 = 0{,}556\, F_1^2$ oder $F_1 = 1{,}34\, F$, also eine Kugelhaube, deren Höhe $= 0{,}507$ des Öffnungshalbmessers ist. Besondere Genauigkeit sei übrigens dieser Berechnungsweise nicht zugesprochen, die nur zur Erläuterung des mechanischen Vorganges hier gegeben wurde.[1])

0,507

Für einen unendlich langen Bodenspalt, für den das Problem zu einem ebenen wird, und Ausfluß unter Wasser gibt die theoretische Hydromechanik für vollkommene Flüssigkeiten den Vorgang an, der freilich infolge der unvermeidlichen Wirbel vom wirklichen stark ab-

1) Die willkürlichen Aufstellungen *J. Hermaneks*, Wien, Sitzungsberichte 112[2a] (1903), S. 879, lassen eine solche Erläuterung besonders angebracht erscheinen. Der Behauptung des Genannten, daß der von ihm errechnete Koeffizient von 0,667 für eine kreisförmige Öffnung der Erfahrung entspreche, muß ebenfalls entgegengetreten werden; durchschnittlich ist ψ etwa 0,62.

weichen dürfte. Die Strömungslinien wären nach ihr Hyperbeln, die die Randpunkte des Spaltes zu Brennpunkten hätten; so daß die Wasserfäden sich immer mehr ausbreiten würden. Muß aber aus irgend einer Ursache das Wasser der Tiefe (dem negativ Unendlichen) zustreben, so zieht sich der Strahl nach unten etwas zusammen. Längs seiner beiden Oberflächen muß dabei der Außendruck und daher auch der Innendruck entsprechend der Tiefenlage zunehmen, darf sich also zufolge des *Bernoulli*schen Theorems die Geschwindigkeit nicht ändern.[1])



Die Erscheinung wird dann der Ausströmung einer zähen Flüssigkeit in freie Luft sehr ähneln, bei welcher Ausströmung allerdings das Quadrat der Oberflächengeschwindigkeit wie die Tiefe unter dem Gefäßspiegel zunimmt. In der Darstellung als komplexe Funktion (Gl. 10c) löst, wie *G. Kirchoff*[2]) nachwies, für $Z = \Phi + i\Psi$ die Gleichung

$$x + iy = 1 - e^{-Z} \pm \sqrt{e^{-2Z} - 1} \mp \operatorname{arctang} \sqrt{e^{-2Z} - 1} \tag{138}$$

das Problem, oder bei anderer Schreibweise von arctang $i\sqrt{1 - e^{-2Z}}$

$$x + iy = 1 - e^{-Z} \pm \sqrt{e^{-2Z} - 1} \mp \frac{i}{2} \operatorname{lognat} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2Z}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2Z}}}, \tag{138a}$$

wozu noch π addierbar ist, da Bögen, die sich um π unterscheiden, dieselbe Tangente haben. Da nach (138) die Größe $x + iy$ eine Funktion von $Z = \Phi + i\Psi$ ist, muß auch Z eine Funktion von $x + iy$ sein und liefern die Ansätze $\Phi =$ konst. sowie $\Psi =$ konst. Potential- und Strömungslinien. Speziell für $\Psi = 0$ geht (138 a) in

$$x + iy = 1 - e^{-\Phi} + i\sqrt{1 - e^{-2\Phi}} - \frac{i}{2} \operatorname{lognat} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\Phi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\Phi}}}$$

oder, weil je die reellen Teile und die imaginären Teile links und rechts gleich sein müssen, in

$$\begin{cases} x = 1 - e^{-\Phi}, \\ y = \sqrt{1 - e^{-2\Phi}} - \frac{1}{2} \operatorname{lognat} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\Phi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\Phi}}} \end{cases} \tag{138b}$$

über. Die Geschwindigkeit erhält man nach (10g), indem man den Modul des Differentialquotienten $\frac{dZ}{d(x + iy)}$ aufsucht. Die Differentiation von (138) liefert

---

1) Diese Auffassung stammt von *H. von Helmholtz*, Berlin, Monatsberichte der Akademie 1868, der den *Borda*schen Strahl behandelte.

2) *G. Kirchoff*, Vorlesungen über mathematische Physik, 1. Mechanik z. B. 3. Aufl., Leipzig 1883, S. 297.

$$e^{-Z} \mp \frac{e^{-2Z}}{\sqrt{e^{-2Z}-1}} \pm \frac{1}{\sqrt{e^{-2Z}-1}} = e^{-Z} \mp \sqrt{e^{-2Z}-1}$$
$$= e^{-Z} \mp i\sqrt{1-e^{-2Z}}$$

und der Modul dieser Komplexen oder die Quadratsumme des reellen und des mit i multiplizierten Teiles ist für $\Psi = 0$ oder $Z = \Phi$

$$e^{-2\Phi} + 1 - e^{-2\Phi} = 1,$$

also konstant, wonach längs des Stromfadens (138 b) die Geschwindigkeit sich nicht ändert, dieser also eine freie Grenze bildet. Ähnlich erhält man aus (138a) für $\Psi = \pi$ (also $e^{-i\psi} = -1$, $e^{-2i\psi} = 1$) als zweite Grenze

$$\text{(138 c)} \qquad \begin{cases} x = 1 + e^{-\Phi} + \pi, \\ y = \sqrt{1-e^{-2\Phi}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{lognat}\,\dfrac{1+\sqrt{1-e^{-2\Phi}}}{1-\sqrt{1-e^{-2\Phi}}}. \end{cases}$$

Die beiden symmetrisch gestalteten Strahlgrenzen beginnen an den Punkten, an denen $\Phi = 0$ und $x = 0$ bzw. $= 2 + \pi$ ist. Für $y = -\infty$ oder $\Phi = \infty$ zeigt sich andrerseits $x = 1$ bzw. $= 1 + \pi$. Der mit der Breite $2 + \pi$ beginnende Strahl zieht sich also bis ins Unendliche auf π zusammen, wonach die Einschnürung

$$\frac{\pi}{2+\pi} = 0{,}611$$

beträgt, was mit der Erfahrung im Einklange erscheint.[1])

74. Der Ausflußkoeffizient bei vollkommener Einschnürung. Für die Aufgaben der Technik ist besonders die Ausflußmenge von Belang. Sie wurde bereits von *Mariotte*[2]) bestimmt, dessen schon erwähnter Wasserzoll den Ausfluß aus einer kreisrunden Öffnung von 1 Pariser Zoll (2,71 cm) Durchmesser in lotrechter dünner Wand unter einer Druckhöhe von 7 Linien (1,58 cm) über der Kreismitte nach seinen Messungen $0{,}00022\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}} = 19{,}2\ \mathrm{m^3}$ in 24 Stunden bedeutete. Ver-

1) Literatur über anderweitige Strahlformen siehe *A. E. H. Love* in Enzyklopädie d. math. Wissensch., 4. Bd. Mechanik, 3. Teilbd. 16, S. 99 f.

2) Traité du Mouvement des eaux, Paris 1686, Teil 3, Gespräch 1. Die Benutzung des Wasser- oder Brunnenzolles selbst ist viel älter, findet sich auch in der Türkei und dürfte morgenländischen Ursprunges sein; vgl. *Ph. Forchheimer* u. *J. Strzygowski*, Die byzantinischen Wasserbehälter von Konstantinopel, Wien 1893, S. 29 f. Den preußischen Wasserzoll bestimmte *G. Hagen*, Handb. d. Wasserbaukunst, 3. Aufl. 1869, 1, S. 219. — Ausfluß durch ein Quadrat von 1 Zoll engl. (Miner's inch) und durch niedrige Spalten unter kleinem Druck: *H. T. Bovey*, Treatise on Hydraulics, 2. Aufl., New-York 1904, S. 44; *M. Merriman*, 3. Aufl., New-York, S. 122.

schiedenartige Messungen machten *B. A. Michelotti, Ch. Bossut, H. Buff* und *J. Weisbach.* Letzterer[1]) fand den Ausflußkoeffizienten[2]) μ der Formel

$$Q = \mu \pi r^2 \sqrt{2gh}, \tag{139}$$

in der Q den Ausfluß in $m^3 sec^{-1}$, r den Halbmesser in m, h die Höhe des Spiegels über der Öffnungsmitte in m bedeutet, für einen

Durchmesser von	1	2	3	4 cm
bei 0,6 m Druckhöhe	0,628	0,621	0,614	0,607
„ 0,25 „	0,637	0,629	0,622	0,614.

Bei sehr kleinen Mündungen und geringen Druckhöhen ist nach *J. Hachette*[3]) und *H. Buff*[4]) μ beträchtlich größer als bei mittleren Mündungen und Geschwindigkeiten (z. B. 0,69 bei 0,47 cm Weite und 4 cm Druckhöhe), was um so auffallender ist, als die Oberflächenspannung des Strahles in ihm einen Gegendruck hervorrufen muß, der den Ausfluß vermindert. *Hachette* ist daher der Ansicht, daß bei Durchmessern unter etwa 1 cm die Wandbohrung bereits als Mundstück wirke.

Der Bauweise der Formel (139) liegt der Gedanke zugrunde, daß man bei kleinen Öffnungen die Druckhöhe als überall gleich groß betrachten darf. Bei vergleichsweise großer Öffnung ist es aber richtiger, behufs zutreffender Beurteilung von μ den Wechsel der Druckhöhe von Streifen zu Streifen zu berücksichtigen und daher, weil ein Streifen von der Tiefenlage $h - z$ die Breite $2\sqrt{r^2 - z^2}$ besitzt,

$$Q = \mu_1 \int_{-r}^{r} 2\sqrt{2g(h - z)}\sqrt{r^2 - z^2}\, dz \tag{139a}$$

zu setzen. Die Ausrechnung von (139 a) ergibt[5])

$$Q = \mu_1 \left(1 - \frac{1}{32}\frac{r^2}{h^2} - \frac{5}{1024}\frac{r^4}{h^4} + \cdots\right) \pi r^2 \sqrt{2gh}. \tag{139b}$$

Auf μ_1 bezieht sich eine Zusammenstellung von *Hamilton Smith jr.*[6]), die auf den Versuchen der schon genannten Forscher, sowie solchen von *T. G. Ellis*[7]) und *Smith* selber fußt.

---

1) Lehrbuch 1, Braunschweig (1845), S. 405.

2) Bezüglich des Zusammenhanges des Ausflußkoeffizienten μ mit den Widerstandskoeffizienten ζ siehe unten § 77, S. 273.

3) Ann. chim. phys. 3 (1816), S. 80.

4) Ann. Phys. Chem. (2) 16 (1839), S. 240.

5) Vgl. z. B. *U. Masoni*, Idraulica, 2. ed. Napoli 1900, S. 167, 3. ed. S. 244.

6) Hydraulics, London—New-York 1886, S. 59, 22.

7) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 5 (1876), S. 63, 73f.

H. Smiths Ausflußkoeffizienten.

1000 μ_1 für kreisrunde Öffnung in lotrechter dünner Wand, Ausfluß in Luft.

Höhe h		Öffnungsdurchmesser in englischen Fußen und cm												
engl. Fuß	cm	0,02 0,6	0,03 0,9	0,04 1,2	0,05 1,5	0,07 2,1	0,10 3,0	0,12 3,7	0,15 4,6	0,20 6,1	0,40 12,2	0,60 18,3	0,80 24,4	1,00 30,5
0,4	12			637	631	624	618	612	606					
0,5	15		643	633	627	621	615	610	605	600	596	592		
0,6	18	655	640	630	624	618	613	609	605	601	596	593	590	
0,7	21	651	637	628	622	616	611	607	604	601	597	594	591	590
0,8	24	648	634	626	620	615	610	606	603	601	597	594	592	591
0,9	27	646	632	624	618	613	609	605	603	601	598	595	593	591
1	30	644	631	623	617	612	608	605	603	600	598	595	593	591
1,2	37	641	628	620	615	610	606	604	602	600	598	596	594	592
1,4	42	638	625	618	613	609	605	603	601	600	599	596	594	593
1,6	49	636	624	617	612	608	605	602	601	600	599	597	595	594
1,8	55	634	622	615	611	607	604	602	601	599	599	597	595	595
2,0	61	632	621	614	610	607	604	601	600	599	599	597	596	595
2,5	76	629	619	612	608	605	603	601	600	599	599	598	597	596
3	91	627	617	611	606	604	603	601	600	599	599	598	597	597
3,5	107	625	616	610	606	604	602	601	600	599	599	598	597	596
4	122	623	614	609	605	603	602	600	599	599	598	597	597	596
5	152	621	613	608	605	603	601	599	599	598	598	597	596	596
6	183	618	611	607	604	602	600	599	599	598	598	597	596	596
7	213	616	609	606	603	601	600	599	599	598	598	597	596	596
8	244	614	608	605	603	601	600	599	598	598	597	596	596	596
9	274	613	607	604	602	600	599	599	598	597	597	596	596	595
10	305	611	606	603	601	599	598	598	597	597	597	596	596	595
20	610	601	600	599	598	597	596	596	596	596	596	596	595	594

Zur Umrechnung von μ_1 in μ gibt *H. Smith* nachstehende Tabelle:

$h:r =$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,6
$\mu:\mu_1 =$	0,9604	0,9753	0,9823	0,9867	0,9897	0,9918	0,9933	0,9953
$h:r =$	3,0	3,4	3,8	4,2	5	6	9	20
$\mu:\mu_1 =$	0,9965	0,9973	0,9978	0,9982	0,9987	0,9991	0,9996	1,0.

V. Dwelshauver-Déry[1]) fand bei einer Öffnung von 2 cm Durchmesser in lotrechter Wand folgende Werte für die Größen der Formel (139) $R = \mu\sqrt{2gh} \cdot \pi r^2$ mit h in cm und Q in m^3/Stunde

h	4	6	8	10	12	14	16
μ	0,6472	0,6445	0,6423	0,6403	0,6384	0,6367	0,6350
Q	0,5738	0,7383	0,8709	0,9846	1,0854	1,1769	1,2610
h	18	20	22	24	26	28	29
μ	0,6335	0,6321	0,6307	0,6295	0,6285	0,6277	0,6273
Q	1,3392	1,4127	1,4821	1,5481	1,6114	1,6725	1,7021.

1) Technologie sanitaire 1 (1895/6), S. 245, nach Révue univers. des mines 1895.

Bei einer Ausströmung aus einer engen Öffnung ist die *Oberflächenspannung* von Belang, indem sie einen Gegendruck erzeugt. Nach *P. Volkmann*[1]) beträgt sie für Wasser von

0°	10°	20°	30°	40° C
0,0769	0,0755	0,0740	0,0725	0,0709 g cm^{-1}.

In der Oberfläche des Ausflußstrahles von r cm Halbmesser herrscht demnach bei 10° C pro cm Strahllänge eine Tangentialkraft von 0,0755 g, welche eine Pressung von $0{,}0755 : r$ hervorruft. Ist z. B. die Öffnung 0,5 cm weit oder hat der eingeschnürte Strahl einen Halbmesser $r = 0{,}15$ cm, so entsteht ein Druck von $0{,}0755 : 0{,}15 = 0{,}5$ g cm^{-2}, so daß in der Ausflußformel statt der Druckhöhe h (in m) eigentlich eine Druckhöhe $h - 0{,}005$ einzusetzen wäre. Auf dem Einfluß der Oberflächenspannung beruht ein hübsches Experiment von *Isarn*[2]), bei welchem man in der Strahlnähe Äther verdampfen läßt, wodurch die Strahloberfläche sofort Äther aufnimmt, die Oberflächenspannung stark abnimmt und der Ausfluß merklich wächst, falls man die Druckhöhe nicht zu groß wählte.

Befindet sich eine *rechteckige Öffnung* in einer *lotrechten, dünnen Wand*, liegt die Oberkante in der Tiefe h_1, die Unterkante in der Tiefe h_2 unter dem Spiegel und beträgt die Öffnungsbreite b, so hat die Öffnung die Fläche $b(h_2 - h_1)$ und die mittlere Tiefenlage $\frac{h_1 + h_2}{2}$ und kann der Ausfluß

$$Q = \mu_1 b (h_2 - h_1) \sqrt{2g \frac{h_1 + h_2}{2}} \tag{140}$$

gesetzt werden, wobei die Höhenunterschiede h_1 und h_2 von Spiegelpunkten aus zu messen seien, die genug weit von der Öffnung liegen, um keine Senkung zu erfahren. Für solche Öffnungen liegen insbesondere Versuche von *J. V. Poncelet* und *J. A. Lesbros* vor, die nach *Poncelets* Ableben der letztere fortsetzte.[3]) Die Ergebnisse sind nachstehend zusammengestellt.

1) Ann. Phys. Chem. N. F. 56 (1895), S. 457. Weitere Daten und Literatur: *F. Pockels* in *A. Winkelmanns* Handbuch der Physik 1, 2. Aufl., Leipzig 1908, S. 1166.

2) Journal de physique 4 (1875), S. 167.

3) Paris, Mém. prés. par div. sav. 3 (1832), S. 469, 470, 475; 13 (1852), S. 442, 462.

Tabelle der Werte von μ_1 in Formel (140).

Höhe h über oberen Rand	Scharfe Kanten						scharfe Kanten	Brett 5 cm Dicke
	Tafel 25—30 *Lesbros* u. 12 *Poncelet* u. *Lesbros*,						32 u. 33 *Lesbros*	
	Breite der Öffnung ist = 20 cm						= 60 cm	
	Höhe der Öffnung in cm							
cm	1	2	3	5	10	20	2	20
1	0,702	0,660	0,634	0,607			0,644	
2	0,695	0,660	0,639	0,616	0,596	0,572	0,643	
3	0,689	0,659	0,640	0,620	0,600	0,578	0,642	0,593
4	0,684	0,659	0,640	0,623	0,603	0,582	0,642	0,595
5	0,680	0,658	0,640	0,625	0,605	0,585	0,641	0,597
6	0,677	0,657	0,639	0,626	0,607	0,587	0,641	0,599
7	0,674	0,657	0,638	0,627	0,609	0,583	0,640	0,600
8	0,671	0,656	0,638	0,628	0,610	0,589	0,640	0,601
9	0,669	0,655	0,637	0,629	0,610	0,591	0,639	0,601
10	0,667	0,655	0,637	0,630	0,611	0,592	0,639	0,602
20	0,655	0,649	0,634	0,631	0,615	0,598	0,635	0,605
30	0,650	0,645	0,632	0,630	0,616	0,600	0,633	0,607
40	0,646	0,642	0,631	0,629	0,617	0,602	0,631	0,607
50	0,643	0,640	0,631	0,628	0,617	0,603	0,930	0,607
60	0,641	0,638	0,630	0,627	0,617	0,604	0,629	0,607
70	0,638	0,637	0,629	0,627	0,616	0,604	0,628	0,607
80	0,635	0,635	0,628	0,626	0,616	0,605	0,628	0,606
90	0,632	0,634	0,627	0,625	0,615	0,605	0,627	0,606
100	0,629	0,632	0,627	0,625	0,615	0,605	0,626	0,605
150	0,617	0,620	0,621	0,619	0,611	0,602	0,623	0,602
200	0,613	0,613	0,613	0,613	0,607	0,601	0,620	0,602
300	0,609	0,608	0,607	0,606	0,603	0,601	0,615	0,601

Hamilton Smith jr.[1]) gibt auch, wesentlich auf Grund eigener Versuche und solcher von *T. G. Ellis* eine Zahlentafel der Werte von μ_2 in der Formel

(141) $$Q = \mu_2 \frac{2}{3} b \sqrt{2g\,(h_2{}^3 - h_1{}^3)}\,.$$

In ihr bedeutet Q den Ausfluß, b die Öffnungsbreite, h_1 die Höhe des Spiegels über der oberen, h_2 die über der unteren Rechteckskante, wobei Spiegelteile zu nehmen sind, die von der Öffnung nicht beeinflußt erscheinen. Die Formel ergibt sich ohne weiteres durch Zerlegung der Öffnung in wagrechte Streifen und Integration des Ausflusses der Streifen, also aus

(141a) $$Q = \mu_2 b \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2gz}\, dz,$$

worin z die Tiefe unter dem Spiegel. *Smiths* Tabelle bezieht sich speziell

1) Hydraulics, London-New-York 1886, S. 58, 21.

auf *quadratische* Öffnungen, also auf den Fall, daß $b = h_2 - h_1$ ist, und $\frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ bedeutet in ihr also die Druckhöhe über der Öffnungsmitte.

$1000\,\mu_2$ für quadrat. Öffnungen in lotrechter, dünner Wand, Ausfluß in Luft.

Höhe $\frac{1}{2}(h_1+h_2)$		Seitenlänge in engl. Fußen und cm												
engl. Fuß	cm	0,02 0,6	0,03 0,9	0,04 1,2	0,05 1,5	0,07 2,1	0,10 3,0	0,12 3,7	0,15 4,6	0,20 6,1	0,40 12,2	0,60 18,3	0,80 24,4	1,00 30,5
0,4	12	—	—	643	637	628	621	616	611	—	—	—	—	—
0,5	15	—	648	639	633	625	619	614	610	605	601	597	—	—
0,6	18	660	645	636	630	623	617	613	610	605	601	598	596	—
0,7	21	656	642	633	628	621	616	612	609	605	602	599	598	596
0,8	24	652	639	631	625	620	615	611	608	605	602	600	598	597
0,9	27	650	637	629	623	619	614	610	608	605	603	601	599	598
1	30	648	636	628	622	618	613	610	608	605	603	601	600	599
1,2	37	644	633	625	620	616	611	609	607	605	604	602	601	600
1,4	42	642	630	623	618	614	610	608	606	605	604	602	601	601
1,6	49	640	628	621	617	613	609	607	606	605	605	603	602	601
1,8	55	638	627	620	616	612	609	607	606	605	605	603	602	602
2	61	637	626	619	615	612	608	606	606	605	605	604	602	602
2,5	76	644	624	617	613	610	607	606	606	605	605	604	603	602
3	91	632	622	616	612	609	607	606	606	605	605	604	603	603
3,5	107	630	621	615	611	609	607	606	605	605	605	604	603	602
4	122	628	619	614	610	608	606	606	605	605	605	603	603	602
5	152	626	617	613	610	607	606	605	605	604	604	603	602	602
6	183	623	616	612	609	607	605	605	605	604	604	603	602	602
7	213	621	615	611	608	607	605	605	604	604	604	603	602	602
8	244	619	613	610	608	606	605	604	604	604	603	603	602	602
9	274	618	612	609	607	606	604	604	604	603	603	602	602	601
10	305	616	611	608	606	605	604	604	603	603	603	602	602	601
20	610	606	605	604	603	602	602	602	602	602	601	601	601	600

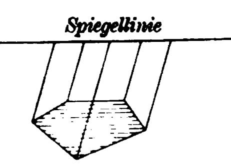
Für Öffnungen, die weder rechteckig noch kreisrund sind, fehlt es an Erfahrungswerten. Ohne Einschnürung und Reibung wäre der Ausfluß aus einer Öffnung von der Fläche f bei beliebig geneigter Wand

$$\int \sqrt{2gz}\,df,$$

worin z die Tiefenlage unter dem Spiegel bedeutet und das Integral über die ganze Fläche zu erstrecken ist. Wie groß nun μ im Ausdruck für den wirklichen Ausfluß

$$Q = \mu \int \sqrt{2gz}\,df \tag{142}$$

ist, kann nur geschätzt werden. — Ist die Öffnung polygonal, so kann man zum Zwecke der Berechnung des Integrales die Öffnung aus positiven und negativen Trapezen zusammensetzen, die bis zum Spiegel reichen und deren Parallelseiten senkrecht auf der Spiegellinie stehen. Für einen zu dieser Linie senkrechten Wandstreifen von der Breite db, der vom Spiegel bis zur Tiefe z hinabreicht, ist der Ausfluß



$$\mu\, db \int_0^z \sqrt{2gz}\, \frac{dz}{\sin\alpha} = \frac{2}{3}\, \mu \sqrt{2g}\, z^{3/2} \frac{db}{\sin\alpha},$$

worin α die Wandneigung bezeichnet.

Ein bis zum Spiegel reichendes Trapez von der wagrechten Trapezhöhe b und den Ecktiefen z_1 und z_2 liefert daher

$$\int_0^{b_{12}} \frac{2}{3}\mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin\alpha} z^{3/2}\, db = \int_{z_1}^{z_2} \frac{2}{3}\mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin\alpha} z^{3/2} \frac{b_{12}}{z_2 - z_1}\, dz$$

$$= \left(\frac{2}{3}\mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin\alpha} \cdot \frac{2}{5} z^{5/2} \cdot \frac{b_{12}}{z_2 - z_1}\right)_{z_1}^{z_2} = \frac{4}{15}\mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin\alpha} b_{12} \frac{z_2^{5/2} - z_1^{5/2}}{z_2 - z_1}.$$

Beispiel. Bei einem Dreieck mit den Eckpunkttiefen z_1, z_2, z_3 und den Streifenbreiten b_{12}, b_{23}, b_{31} ist daher der Ausfluß

$$= \frac{4}{15} \frac{\mu\sqrt{2g}}{\sin\alpha} \left(b_{12} \frac{z_2^{5/2} - z_1^{5/2}}{z_2 - z_1} + b_{23} \frac{z_3^{5/2} - z_2^{5/2}}{z_3 - z_2} + b_{31} \frac{z_1^{5/2} - z_3^{5/2}}{z_1 - z_3}\right),$$

worin nach der Figur b_{31} als negativ zu betrachten ist.

Der Ausfluß ist von der Temperatur nicht unabhängig, doch steht der Zusammenhang noch nicht fest, denn nach *B. F. Isherwood* [1]) würde μ beträchtlich mit der Temperatur wachsen, während nach *W. C. Unwin* [2]) μ bei scharfem Rand nicht merklich von ihr abhängt und bei abgerundeter Öffnung zwischen 16° und 90° C nur um 4% zunimmt.

J. Weisbach [3]) und *H. Smith* [4]) haben auch einige Versuche mit Quecksilber und Öl vorgenommen. Bei Ausfluß von Quecksilber aus kreisförmiger Öffnung in lotrechter dünner Wand ist nach *Smith* bei 25 cm Druckhöhe $\mu = 0{,}61$ und nimmt dann — ähnlich wie bei Wasser — bei wachsender Druckhöhe ab, um sich asymptotisch dem Wert 0,58 oder 0,59 zu nähern. Schmieröl zeigt ein viel größeres μ von ungefähr 0,73. Zähigkeit verringert also nicht immer, wie man vielleicht glauben sollte, die Ausflußmenge, sondern vergrößert sie unter Umständen.

1) Journ. of the Franklin Instit. (3) 75 (1878), S. 339.

2) Phil. Mag. (5) 6 (1878), S. 281 f.

3) Untersuchungen a. d. Gebiete d. Mechanik u. Hydraulik, Leipzig 1843, S. 80.

4) Hydraulics, 1886, S. 62. Über Weingeist vgl. *H. Buff*, Anm. S. 267.

Über den Erguß einer Flüssigkeit in eine andere liegen noch keine Untersuchungen vor.

75. Ausflußkoeffizient bei unvollkommener Einschnürung. Je mehr man die Einschnürung durch Führungswände im Gefäße verhindert, desto mehr steigert man den Ausfluß. Dies zeigte zunächst *G. Bidone*[1]), der das Verhältnis des Ausflußkoeffizienten μ_n bei teilweiser Einschnürung zu dem, μ, der vollständigen Einschnürung

$$\mu_n : \mu = 1 + \varkappa \frac{s}{S}$$

setzte, worin s die eingefaßte Länge, S den ganzen Öffnungsumfang bezeichnet. Auch *J. Weisbach*[2]) machte einschlägige Versuche, und es fanden: *Bidone* für Kreise $\varkappa = 0{,}128$, für kleine Quadrate $\varkappa = 0{,}152$, *Weisbach* für kleine Rechtecke $\varkappa = 0{,}134$, für Rechtecke von 20 cm Breite und 10 cm Höhe $\varkappa = 0{,}157$.

Bei seinen viereckigen Öffnungen änderte *J. A. Lesbros*[3]) namentlich in Hinblick auf praktische Zwecke den Ausfluß durch Einbauten im Innern, sowie durch Anfügung von Mundstücken und Leitgerinnen an die Außenseite, so daß er etwa 30 Mündungsformen erhielt. Die Änderungen, welche seitdem in der Bauweise und den Abmessungen von Kraftanlagen eingetreten sind, würden den Wert der *Lesbros*schen Versuche sehr vermindern, wenn man nicht annehmen dürfte, daß bei ähnlicher Vergrößerung *aller* Abmessungen (also auch der Wandstärken, soweit sie auf den Wasseraustritt wirken) der Abflußkoeffizient ungeändert bleibt. So fand *Graeff*[4]) für verschiedene Stellungen einer eisernen Schütze in der Sperrmauer des Furens die Abflußziffer unabhängig von der Pressung. Bedenklicher ist es, daß *Hamilton Smith jr.*[5]) bei scharfrandigen Rechtecken Abweichungen bis zu 4 v. H. von *Lesbros* erhielt. Nunmehr folge eine Zusammenstellung[6]) der wichtigsten *Lesbros*schen Ergebnisse. In ihr bezeichnet

A eine gewöhnliche scharfkantige Mündung ohne alle Einfassung: die Zuschärfung ist derart, daß sich die Öffnung nach außen erweitert und der Strahl sich schon an der Innenseite loslöst;

B eine solche Mündung A innen an einer Seite mit einer lotrechten Wand bekleidet, welche 2 cm von der einen Seitenkante der Mündung absteht und rechtwinklig zur Mündungsebene gerichtet ist;

---

1) Torino, Memorie 27 (1823), S. 83f.; 40 (1838) S. 13f., Formel: S. 38.

2) Lehrbuch 1, S. 414 nach „Der Ingenieur" Bd. 2. *Weisbach-Herrmann*, S. 987.

3) Paris, Mém. prés. par div. sav. 13 (1852).

4) *Graeff*, Traité d'hydraulique, 1883.

5) Hydraulics, S. 56.

6) Auch in *Weisbach-Herrmann*, 1, S. 994f., woselbst aber Spalte G unrichtig.

C die Mündung *A* auf jeder Seite mit einer solchen Wand eingefaßt;
D die Mündung *A* innen beidseitig mit lotrechten Wänden eingefaßt, welche unter einem rechten Winkel gegeneinander laufen und hierbei unter einem Winkel von 45° und zwar im Abstande von 2 cm von den Seitenkanten der Mündung an deren Ebene stoßen;
E die Mündung *A* mit einer wagrechten Wand, welche das Ausflußgefäß quer durchsetzt und genau bis an die untere Mündungskante reicht;
F die Mündung *B*;
G die Mündung *C* und
H die Mündung *D* mit einer wagrechten Wand wie in *E*, welche die Einschnürung an der Unterkante aufhebt.

Koeffizient μ der Formel $Q = \mu F \sqrt{2gh}$; h = Spiegelhöhe unmittelbar an der Mündungsebene über Öffnungsmitte; a = desgl. über Öffnungsoberkante.

a	Öffnung von 20 cm Höhe							
cm	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
2	0,572	0,587	—	0,589	0,599	—	—	—
5	0,585	0,593	0,631	0,595	0,608	0,622	—	0,636
10	0,592	0,600	0,631	0,601	0,615	0,628	0,722	0,639
20	0,598	0,606	0,632	0,607	0,621	0,633	0,676	0,643
50	0,603	0,610	0,631	0,611	0,623	0,636	0,668	0,644
100	0,605	0,611	0,628	0,612	0,624	0,637	0,664	0,642
150	0,602	0,611	0,627	0,611	0,624	0,637	0,661	0,641
200	0,601	0,610	0,626	0,611	0,619	0,636	0,659	0,640
300	0,601	0,609	0,624	0,610	0,614	0,634	05,66	0,638
	Öffnung von 5 cm Höhe							
2	0,616	0,627	0,647	0,631	0,664	0,663	—	0,678
5	0,625	0,630	0,646	0,632	0.667	0,669	0,690	0,677
10	0,630	0,633	0,645	0,633	0,669	0,674	0,688	0,677
20	0,631	0,635	0,642	0,633	0,670	0,676	0,687	0,675
50	0,628	0,634	0,637	0,632	0,668	0,676	0,682	0,671
100	0,625	0,628	0,635	0,627	0,666	0,672	0,680	0,670
150	0,619	0,622	0,634	0,621	0,665	0,670	0,678	0,670
200	0,613	0,616	0,634	0,615	0,664	0,670	0,674	0,669
300	0,606	0,609	0,632	0,608	0,662	0,669	0,673	0,668

Die nächstfolgende Tabelle betrifft Mündungen wie die früheren, jedoch mit Gerinnen, welche sich außen genau an die Seiten und den Boden anschlossen, so daß diese an der Öffnung ihre Abschrägung der Außenkanten verloren. Ein unterstrichener Buchstabe bedeutet ein wagrechtes Gerinne von 3 m Länge, ein durchstrichener ein 2,5 m langes Gerinne von $^1/_{10}$ Neigung.

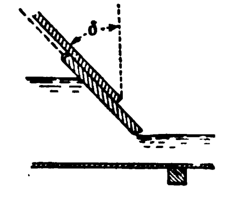
Bezeichnung wie in der vorhergehenden Tabelle.

a cm	Öffnung von 20 cm Höhe mit Gerinne									
	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{C}$	E	$\not{E}$	F	$\not{F}$	$\underline{G}$	$\not{G}$	$\underline{H}$
2	0,480	0,489	0,496	0,480	0,527	—	—	—	—	0,488
5	0,511	0,517	0,531	0,510	0,553	0,509	0,546	0,528	—	0,520
10	0,542	0,545	0,563	0,538	0,574	0,534	0,569	0,560	0,593	0,552
20	0,574	0,576	0,591	0,566	0,592	0,562	0,589	0,589	0,617	0,582
50	0,599	0,602	0,621	0,592	0,607	0,591	0,608	0,591	0,632	0,618
100	0,601	0,609	0,628	0,600	0,610	0,601	0,615	0,601	0,638	0,623
150	0,601	0,610	0,627	0,602	0,610	0,604	0,617	0,604	0,641	0,624
200	0,601	0,610	0,626	0,602	0,609	0,604	0,617	0,604	0,642	0,624
300	0,601	0,609	0,624	0,601	0,608	0,602	0,616	0,602	0,641	0,622
	Öffnung von 5 cm Höhe mit Gerinne									
2	0,488	0,555	0,557	0,487	0,585	0,483	0,579	0,512	—	0,494
5	0,577	0,600	0,603	0,571	0,614	0,570	0,611	0,582	0,625	0,577
10	0,624	0,625	0,628	0,605	0,632	0,609	0,628	0,621	0,639	0,616
20	0,631	0,633	0,637	0,617	0,645	0,623	0,643	0,637	0,649	0,629
50	0,625	0,630	0,635	0,626	0,652	0,630	0,650	0,647	0,656	0,636
100	0,624	0,627	0,635	0,628	0,651	0,633	0,651	0,649	0,656	0,638
150	0,619	0,622	0,634	0,627	0,650	0,632	0,651	0,647	0,656	0,637
200	0,613	0,616	0,634	0,623	0,650	0,631	0,651	0,644	0,656	0,635
300	0,606	0,609	0,632	0,618	0,649	0 628	0,651	0,639	0,656	0,632

Verwandt mit *Lesbros'* Fall $\underline{G}$ ist der Ausfluß aus dem Spalt unter einer Spannschütze, den *J. V. Poncelet*[1]) untersuchte. Schließt die Schütze mit der Lotrechten den Winkel δ ein, so gelte für[2])

$$\operatorname{tang}\delta = 0 \qquad 0{,}5 \qquad 1,$$
$$\mu = 0{,}7 \qquad 0{,}74 \qquad 0{,}8;$$

daß für $\delta = 0$, dieses μ jenes des Falles $\underline{G}$ übertrifft, erklärt sich durch die innere Abschrägung oder Abrundung der Schützenkante.



Die Einschnürung kann man auch mäßigen, indem man das Wasser durch einen verengten Gefäßteil, also mit einiger Geschwindigkeit der Öffnung zulaufen läßt. Bezeichnet man das Verhältnis zwischen Öffnungsquerschnitt f und Mündungsfläche F, also $f:F$ mit n und den Ausflußkoeffizienten bei vollkommener bzw. bei verminderter Einschnürung mit μ bzw. μ_n, so kann man nach *J. Weisbach*[3]) mit größter Genauigkeit

$$(143)\quad \begin{cases} \text{für kreisförmige Öffnung } \mu_n = \mu[1 + 0{,}04564(14{,}821^n - 1)], \\ \text{für rechteckige Öffnung } \mu_n = \mu[1 + 0{,}0760(9^n - 1)] \end{cases}$$

1) Mém. sur les roues hydrauliques à aubes courbes, nouv. éd., Metz 1827, S. 44.

2) *Poncelet*, Lehrbuch der Anwendung der Mechanik, deutsch von *Schnuse* (Zitat nach *Grashof*, Theoretische Maschinenlehre 1, 1875, S. 462).

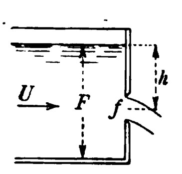
3) Lehrbuch 1 (1845), S. 416. *Weisbach-Herrmann*, S. 989.

setzen, wonach sich der Bruch $\frac{\mu_n - \mu}{\mu}$ für

$n =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
b. Kreis	0,014	0,034	0,059	0,092	0,134	0,189	0,260	0,351	0,471	0,613
b. Rechteck	0,019	0,042	0,071	0,107	0,152	0,208	0,278	0,365	0,473	0,608

ergibt.

Eben wurde vorausgesetzt, daß als Druckhöhe die Tiefenlage der Öffnung unter dem Spiegel nahezu ruhenden Wassers betrachtet wird.



Mißt man hingegen von einem Spiegel aus, unter dem eine senkrecht zur Öffnungsebene gerichtete Ankunftsgeschwindigkeit U herrscht, so muß man nach dem *Bernoulli*schen Theorem die Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ zum Höhenunterschied von Spiegel und Öffnung hinzufügen. Man hat dann nämlich als Ausfluß

$$(143\text{a}) \qquad Q = \mu f \sqrt{2g\left(h + \frac{U^2}{2g}\right)} = \mu f \sqrt{2gh + U^2}$$

oder da zugleich bei einem Querschnitt F des Zulaufgerinnes

$$Q = FU$$

sein muß,

$$Q = \mu f \sqrt{2gh + \frac{Q^2}{F^2}},$$

woraus

$$(143\text{b}) \qquad Q = \frac{\mu f}{\sqrt{1 - \mu^2 \frac{f^2}{F^2}}} \sqrt{2gh} = \mu_n f \sqrt{2gh}$$

hervorgeht. Für μ muß man in Ermangelung einschlägiger Versuche zu den Ermittelungen greifen, die *Lesbros* für den Ausfluß aus Gefäßen anstellte. Für rechteckige Öffnungen in lotrechter dünner Wand stellte *Weisbach*[1]) Versuche an. Derselbe maß die Höhe h einen Meter stromauf von der Öffnung aus und fand, so lange f nicht viel größer als $0,5\,F$ blieb, ziemlich genau

$$(144) \qquad Q = \mu f\left[1 + 0{,}641\left(\frac{f}{F}\right)^2\right]\sqrt{2gh},$$

also den neuen Ausflußkoeffizienten μ so groß, daß stets

$$(144\text{a}) \qquad \frac{\mu_n - \mu}{\mu} = 0{,}641\left(\frac{f}{F}\right)^2$$

war. Unter μ verstand er hierbei den von *Poncelet* und *Lesbros* ermittelten Ausflußkoeffizienten der Formel (140) und der zugehörigen Ta-

1) Lehrbuch 1 (1845), S. 418. *Weisbach-Herrmann*, S. 991.

belle. Zur Abkürzung der Rechnung gab er noch nachstehende Zusammenstellung:

$\frac{f}{F}$ =	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\frac{\mu_n - \mu}{\mu}$ =	0,002	0,006	0,014	0,026	0,040	0,058	0,079	0,108	0,130	0,160

76. Ausfluß durch Ansatzröhren. Eine *zylindrische* Ansatzröhre verringert zwar die Sprungweite des austretenden Strahles, verdickt aber letzteren derart, daß die Ausflußmenge wächst und für eine gewisse Länge ihr Maximum hat. Dies entdeckte der *Marchese Poleni*[1]), als er nacheinander zylindrische Stutzen (von wie es scheint neun Linien Weite) und

0,8 18 36 57 108 Linien Länge

benutzte und sich die entsprechenden Ausflußzeiten wie

$$1{,}29 : 1{,}04 : 1 : 1 : 1{,}4$$

verhielten. *B. A. Michelotti, G. Bidone, J. F. d'Aubuisson, J. A. Eytelwein* und *J. Weisbach*[2]) erhielten für Ansatzröhren, deren Länge etwa $2^1/_2$ bis 3 mal so groß wie der Lochdurchmesser war, gut übereinstimmende Werte und zwar im Mittel den Ausflußkoeffizienten $\mu = 0{,}815$. Übrigens wächst μ, wenn die Rohrweite oder die Druckhöhe kleiner wird. So fand *Weisbach* bei einem Drucke von 0,23 bis 0,6 m für Stutzen, welche dreimal so lang als weit waren,

bei	1	2	3	4 cm Weite
μ =	0,843	0,832	0,821	0,810

und fand *Buff*, daß bei einem 0,6 cm weiten, 9,4 cm langen Ansatz μ allmählich von 0,855 auf 0,825 fiel, wenn die Druckhöhe von 4 cm auf 86 cm stieg. *U. Masoni*[3]) bestimmte bei einem 2 cm weiten Stutzen von 7 bzw. 12 cm Länge unter 0,085 bis 1,1 m Druckhöhe $\mu = 0{,}83$ bzw. 0,80.

Beim Ausfluß von Wasser durch kurze parallelepipedische Ansatzröhren fand *Weisbach*[4]) $\mu = 0{,}819$ und bei quadratischem Querschnitt von 2 auf 2 cm schwankte nach *Masoni* bis zu 6 cm Länge μ zwischen 0,82 und 0,83, während es bei 12 cm Länge nur mehr 0,79 betrug.

Den Ausflußkoeffizienten für Ansatzröhren kann man, davon ausgehend, daß der Strahl sich in ihnen erst vom Öffnungsquerschnitt f

1) Delle pescaje 69, lateinisch erschienen 1718, Raccolta, 2. ed., 3, S. 415.
2) Lehrbuch 1 (1845), S. 422. *Weisbach-Herrmann,* S. 1002.
3) Idraulica, 2. ed., S. 198; 3. ed., S. 277.
4) Lehrbuch 1 (1845), S. 423; Idraulica, 3. ed., S. 277.

auf f_1 zusammenzieht und dann wieder auf $f_2 = f$ ausdehnt, näherungsweise aus dem Ausflußkoeffizienten 0,62 für scharfkantige Öffnungen ableiten. Dabei macht man allerdings zwischen Ausflußkoeffizienten und Einschnürungskoeffizienten keinen Unterschied. Im Strahlhals ist die Geschwindigkeit, wenn hier ein Unterdruck h unter dem atmosphärischen herrscht und sich der Ansatzstutzen in der Tiefe H unter dem Gefäßspiegel befindet,

$$U_1 = \sqrt{2g(H+h)}. \tag{145}$$

Von seinem Hals dehnt sich der Strahl wieder aus, und zwar derart, daß bei dem Werte 0,62 des Einschnürungskoeffizienten am Stutzende die Geschwindigkeit

$$U_2 = 0{,}62\, U_1$$

beträgt. Diese Ausdehnung ist gemäß (123b) mit einem Druckunterschied zwischen Hals und Außenende von $\frac{U_2(U_1 - U_2)}{g}$ verbunden und da das Außenende unter Atmosphärendruck steht, herrscht am Hals tatsächlich Unterdruck und zwar von der Größe

Venturis Versuch.

$$h = \frac{U_2}{g}\left(\frac{U_2}{0{,}62} - U_2\right) = 0{,}613\,\frac{U_2^2}{g}, \tag{145a}$$

womit, da $U_2 = U$ in der Gefäßöffnung sein muß, (145) auch

$$\frac{U}{0{,}62} = \sqrt{2gH + 1{,}226\, U^2} \quad \text{oder} \quad 1{,}376\, U^2 = \sqrt{2gH}$$

oder

$$U = 0{,}85\sqrt{2gH} \tag{145b}$$

geschrieben werden kann. Erfahrungsgemäß ist aber, wie oben gesagt wurde, U nur wenig kleiner, etwa $= 0{,}82\sqrt{2gH}$, welcher Wert sich übrigens ergibt, wenn man für den Druckunterschied h statt (123) die Formel (125) *de Saint-Venants* benutzt[1]). Entdeckt wurde der Unterdruck, der gemäß (145a) und (145b)

$$h = 0{,}613 \cdot 0{,}73 \cdot 2H = 0{,}89\, H \tag{145c}$$

und nach *de Saint-Venants* Formel $0{,}75\, H$ betragen sollte, von *G. B. Venturi*, der ihn in der oben dargestellten Weise nachwies[2]). Er fand

1) Siehe z. B. *Masoni*, Idraulica, 2. ed., S. 196.

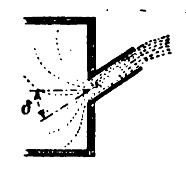
2) *G. B. Venturi*, Recherches experimentalles sur le principe de communication laterale dans les fluides, Bull. Soc. philomatique 1797, auch deutsch in *Gilberts* Ann. de Physik 2 (1799), S. 421, 432. — Gl. (145c) gilt für den Unterdruck unter Schützen, doch kann γh nicht größer als 1 atm werden.

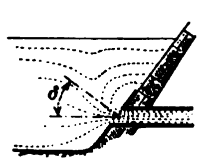
bei 32,5 Zoll Druckhöhe H die Saughöhe $h = 24$ Zoll, also $h = 0{,}74 H$, worin eine Bestätigung *de Saint-Venants* liegt. Da der Druck zwar unter den äußeren sinken, aber nicht negativ werden kann, findet, wie *J. N. P. Hachette* und *H. Buff*[1]) zeigten, keine Vermehrung der Ausflußmenge gegenüber jener aus dünner Wand statt, wenn sich das Wasser in einen luftleeren Raum ergießt. *M. Capitó* und *U. Masoni*[2]) haben nachgewiesen, daß es die den Strahl herunterziehende Schwere ist, welche ihn zum Anlegen an die Rohrwand bringt, daß also letzteres Ursache und nicht Folge der Bildung eines luftverdünnten Raumes um den eingeschnürten Strahl ist. Es kann nämlich auch ein Hindernis verschiedener Art oder die Inversion des Strahles (siehe unten S. 275) bei nicht kreisförmigem Querschnitt das Anliegen bewirken.

Schief abgesetzte oder angesetzte Ansatzröhren geben nach *Weisbach*[3]) bei einem Winkel δ zwischen Rohrachse und Wandnormalen für

$\delta =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
$\mu =$	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719,

worin μ der Ausflußkoeffizient.





Ferner fand *Weisbach*[4]), daß aus einer Röhre mit innerem Ansatz, wenn die ringförmige Stirn der Röhre mindestens $^1/_5$ mal so breit wie die Rohrweite ist, soviel ausfließt, wie aus einer Röhre mit ihrer Stirnfläche in der Wand. Ist die Stirn schmäler, so fällt der Ausflußkoeffizient geringer aus. Bei sehr schmaler Stirn wird er nach *Bidone* und *Weisbach* $= 0{,}71$, falls der Strahl das Rohr ausfüllt, und $= 0{,}53$ (siehe oben S. 252), falls er sich nicht an die Innenleibung anlegt. Im ersten Fall ist der Strahl zerrissen und sprüht besenförmig auseinander, im zweiten ist er stark eingeschnürt und kristallrein.

Ist eine Ansatzröhre inwendig teilweise eingefaßt, stößt sie z. B. mit einer Seite an den Boden an, so steigt nach Versuchen *Weisbachs* der Ausfluß nicht ansehnlich, wohl aber fließt dann das Wasser an der Führungsseite schneller als an der entgegengesetzten Seite.

---

1) Ann. Phys. Chem. (2) 16 (1839), S. 240.

2) Palermo, Collegio degl' ingegneri, Atti 1884; Napoli, R. Istituto d'incorragiamento, Atti (4) 5 (1893), No. 5.

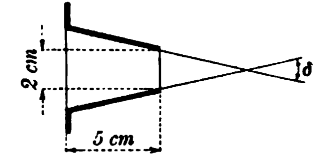
3) Lehrbuch 1 (1845), S. 425. *Weisbach-Herrmann,* S. 1005.

4) Ebenda S. 423. *Weisbach-Herrmann,* S. 1003.

Geht eine kurze Ansatzröhre von einer Wand aus, deren Fläche F den Rohrquerschnitt f nicht vielmals übertrifft, so bewirkt die Zulaufgeschwindigkeit eine Zunahme von μ auf μ_n und ist bei einem Flächenverhältnis $f : F =$

n	= 0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{\mu_n - \mu}{\mu}$	= 0,006	0,013	0,027	0,043	0,060	0,080	0,102	0,127	0,152	0,181	0,227

Daß glatte und abgerundete *Mundstücke* der Wasserbewegung fast gar keinen Widerstand leisten, ist bereits oben (S. 223) bei Betrachtung der Rohrverengungen bemerkt worden. Auch wurde bei Besprechung des Geschwindigkeitskoeffizienten oben S. 249 angegeben, daß bei solchen Mundstücken μ mit φ fast übereinstimmt und 0,96 bis 0,99 beträgt.



Gering ist auch der Widerstand *sich verjüngender konischer Stutzen. Castel*[1]) erhielt mit einem Kegelstutzen von 2 cm Austrittsweite und 5 cm Länge unabhängig von der Druckhöhe, die zwischen 0,2 und 3 m schwankte, folgende Ergebnisse (δ = Kegelscheitelwinkel, φ = Geschwindigkeits-, μ = Ausflußkoeffizient):

δ =	2°50′	5°26′	6°54′	10°30′	12°10′	13°40′	15°2′	18°10′	23°4′	33°52
φ =	0,906	0,928	0,938	0,953	0,957	0,964	0,967	0,970	0,973	0,979
μ =	0,914	0,930	0,938	0,945	0,949	0,956	0,949	0,939	0,930	0,920

Lespinasse[2]) fand bei einer 2,92 m langen vierkantigen Düse, die sich von 73/97,5 cm Weite auf 15,5/19 cm Weite verjüngte, deren gegenüberliegende Wände also Winkel von 11°38′ einschlossen, bei 0,19 $m^3\,sec^{-1}$ Durchfluß und 2,92 m Druckhöhe $\mu = 0,98$.

Vorstehenden Angaben seien noch Versuchswerte von *H. Heinemann*[3]) beigefügt, der bei 0,1 bis 0,3 m Druckhöhe für

$$\delta = 60^\circ \quad 90^\circ \quad 120^\circ$$
$$\mu = 0{,}838 \quad 0{,}807 \quad 0{,}749$$

fand. Nach diesen Zahlen erreicht die Ausströmung für einen Scheitelwinkel δ von etwa $13\frac{1}{2}^\circ$ ihr Maximum mit $\mu = 0{,}956$ (bei 1,55 cm Endweite war das Maximum 0,946) und nimmt dann langsam ab. Die Geschwindigkeitsziffer φ dürfte bis zu etwa $\delta = 8^\circ$ den Wert Eins haben. Dann wird $\mu < \varphi$, womit klar ist, daß nunmehr eine Einschnürung statt hat.

1) *J. F. d'Aubuisson de Voisine*, Traité d'hydraulique, 2. éd., Paris-Strasbourg 1846, S. 60, nach Ann. des mines (3) 3 (1838), S. 1.

2) Ebenda nach Toulouse, Mém. de l'Académie 2 (1784).

3) *H. Heinemann*, Rational-Theorie d. Beweg. d. Wassers, Hagen 1872, S. 174.

Für $\delta = 180^\circ$ wird das Ansatzstück zum Loch in dünner Wand und für $\delta > 180^\circ$ zu einem nach innen tretenden Kegelstutzen, endlich zum *Borda*schen Stutzen. An solchen Mundstücken, alle von 2 cm weiter Innenöffnung, nahm *Weisbach* 33 Erhebungen vor, die *G. Zeuner*[1]) zur Aufstellung der einheitlichen empirischen Formel (der „Kontraktionsskala") für den Ausflußkoeffizienten

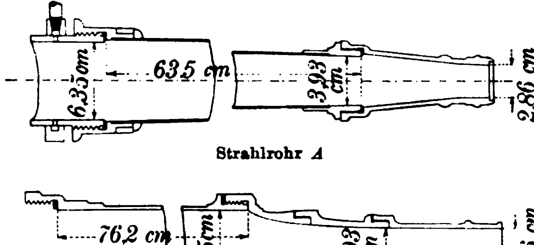
$$\mu = 0{,}6385 + 0{,}2121 \cos^3 \frac{\delta}{2} + 0{,}1065 \cos^4 \frac{\delta}{2}$$

bewogen. Mit den Beobachtungen (μ_1) stimmt diese Formel wie folgt:

	0°	11¼°	22½°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\mu =$	0,966	0,949	0,924	0,882	0,753	0,684	0,632	0,606	0,577	0,546	0,541
$\mu_1 =$	0,957	0,952	0,937	0,883	0,737	0,716	0,639	0,604	0,591	0,549	0,543

Der große Wert, den hier μ für kleine δ, insbesondere für $\delta = 0$, zeigte, ist dadurch erklärlich, daß die Anschlußkanten der Mundstücke an den Boden abgerundet waren.

Konisch zusammenlaufende *Strahlrohre* mit angeschraubten Mundstücken, wie sie Feuerwehren benutzen, hat in größerer Zahl *J. R. Freeman*[2]) untersucht. Er maß die Druckhöhe am Strahlrohranfange und fand, daß die Ausflußkoeffizienten bei Verwendung der üblichen glatten Mundstücke nur wenig wechseln. So erhielt er bei nachstehend aufgeführten Formen die beigeschriebenen μ für Strrahlrohr samt Mundstück:



Strahlrohr A

Strahlrohr B

Strahlrohrdmr. Anfang	Strahlrohrdmr. Ende	Mundstück Schaft	Mundstück Auslauf	Öffnungsweite	μ	Abb.
mm	mm			cm		
6,35	8,94	konisch	Zylinder 2,5 cm lang	2,86	0,976	A
6,35	3,94	konisch	Ende abgeschnitten	2,86	0,977	
6,35	6,85	kelchförmig	Zylinder 2,5 cm lang	2,86	0,971	B
6,35	3,94	glockig	Zylinder	2,86	0,980 od. 0,986	
6,35	8,94	konisch	Zylinder 2,5 cm lang	2,86	0,983	

1) Civilingenieur (2) 2 (1856), S. 54.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 21 (1889), S. 303, Table 1, 2, 3.

Wesentlich ist die Glätte: Vorsprünge im Innern verhindern nicht nur den Ausfluß, sondern zerreißen auch den Strahl. Man pflegt daher vorsichtshalber die Endweite des Strahlrohres etwas größer als die Anfangsweite des Mundstückes zu machen. Dieser Rücksprung an der Anschlußstelle hat sich ohne jeden Einfluß gezeigt. Entschieden schädlich ist dafür ein ringförmiger Vorsprung am Mundstückende und zwar waren bei Strahlröhren mit Mundstücken die ohne Vorsprung etwa $\mu = 0{,}975$, gegeben hätten infolge der Ringleiste die μ nunmehr die folgenden[1])

Durchmesser in cm		Verhältnis der		μ	Verhältnis	*Weisbachs*
in d. Öffnung	hinter d. Leiste	Durchmesser	Flächen		$\mu : 0{,}6$	μ_n
3,01	3,17	0,950	0,903	0,866	1,44	0,885
2,81	3,17	0,886	0,785	0,742	1,24	0,802
3,34	3,94	0,848	0,719	0,729	1,22	0,765
3,17	3,81	0,833	0,694	0,736	1,23	0,753
3,17	6,35	0,5	0,250	0,634	1,06	0,627

Als Druckhöhe h in der Formel $Q = \mu f \sqrt{2gh}$ für den Ausfluß Q durch die Öffnung f betrachtete *Freeman* bei Berechnung der fünften Spalte dieser Tabelle die Summe aus der am Strahlrohranfange (mittels Quecksilberstandröhren) ermittelten Druckhöhe h_1 und der Geschwindigkeitshöhe. Beträgt der Anfangsquerschnitt des Strahlrohres F, so herrscht am Strahlrohranfange die Geschwindigkeit $\frac{Q}{F}$, womit die Ausflußformel

$$Q = \mu f \sqrt{2g\left(h_1 + \frac{1}{2g}\frac{Q^2}{F^2}\right)} = \mu f \sqrt{2gh_1 + \frac{Q^2}{F^2}}$$

oder

$$Q = \mu f \sqrt{2g \frac{h_1}{1 - \mu^2 \frac{f^2}{F^2}}} \tag{146}$$

lautet. In der Formel $Q = \mu f \sqrt{2gh}$ setzt daher *Freeman*

$$h = h_1 : \left(1 - \mu^2 \frac{f^2}{F^2}\right) \tag{146a}$$

ein. Die sechste Spalte gibt das Verhältnis des beobachteten μ zu dem Ausflußkoeffizienten 0,6 der vollständigen Einschnürung an und auf den gleichen Wert der Ausflußziffer bei vollständiger Einschnürung beruht die zum Vergleich beigegebene letzte Spalte, in der μ_n nach *Weisbachs* Formel (143) unter der Annahme berechnet wurde, daß in ihr deren $\mu = 0{,}6$ zu setzen sei. Dabei ist freilich die Reibung im Strahlrohr vernachlässigt, womit es sich zum Teil erklärt, daß sich die Werte *Freemans*

1) Ebenda S. 336.

im allgemeinen kleiner als die *Weisbachs* zeigten. Als *Freeman* später[1]) seine Versuche mit glatten konischen Mundstücken von 6,3, 5,1 und 4,4 cm Öffnungsweite in der Weise wiederholte, daß er die Druckhöhe statt am Strahlrohranfang am Mundstückansatz maß, fand er denn auch sein μ größer als früher, nämlich = 0,995 statt = 0,975, was für einen nicht unerheblichen Einfluß der Strahlrohrreibung spricht.

77. **Doppelkegelstutzen,** welche sich erst verengen, dann erweitern und damit ungefähr die Form nachahmen, die der Ausflußstrahl in einem zylindrischen Ansatzrohr annimmt, untersuchte *G. B. Venturi*[2]). Er bemerkte, daß bei gleichen Enddurchmessern des Doppelkegels und des Zylinders ersterer mehr Wasser als letzterer gibt, was er durch die Verringerung der Wirbel erklärte, und er verglich die Ausflußzeiten verschiedener Formen für den Öffnungsdurchmesser und Enddurchmesser von 4 cm. Wenn man den Ausflußkoeffizienten für dünne Wand = 0,61 setzt, ergeben sich aus seinen Messungen nachstehende Ausflußkoeffizienten

	dünne Wand	zylindr. Ansatz			
Zeitverhältnis	1	1,32	1,32	1,26	1,49
Ausflußkoeffizient	0,61	0,81	0,81	0,77	0,91

Möglicherweise war das günstige Verhalten des Doppelkegels oder Doppelkelches bereits den Römern bekannt, denn *Sex. Jul. Frontinus*[3]) erwähnt bereits, daß Rohranschlüsse dieser Art dem Empfänger mehr Wasser als zylindrische zuführen; so kann wenigstens die Stelle „calix devexus amplius rapit“ gedeutet werden. Verschiedene Versuche über Doppelstutzen und einfache sich erweiternde Stutzen liegen von *J. A. Eytelwein*[4]), *Sereni* und *P. Richelmy*[5]) vor. *J. Weisbach*[6]) zeigte, daß bei letzteren Ansätzen eine Abrundung des Wandanschlusses den Ausfluß wesentlich verstärkt. So gab eine Anschlußröhre von 4 cm Länge, 1 cm Durchmesser an der Wand und 1,54 cm Durchmesser an der Mündung, wobei der Divergenzwinkel $8^0 4'$ maß, je nachdem der Anschluß abgerundet war oder nicht, $\mu = 0{,}738$ oder $= 0{,}395$. *C. Razzaboni*[7]) empfiehlt zur Berechnung des Ausflusses Q in $m^3 sec^{-1}$ für sich

1) Ebenda 24 (1891), S. 506.

2) Recherches expérimentales 1797. *Gilberts* Ann. d. Phys. 2 (1799), S. 454.

3) De aquis urbis Romae, Art. 36. Unter Nerva 97 n. Chr. erhielt *Frontinus* die Aufsicht über die Wasserleitungen von Rom.

4) Handbuch der Mechanik fester Körper, 2. Aufl., Leipzig 1823. S. 101.

5) Torino, Memorie (2) 25 (1871), S. 31. *Richelmy* nennt: *Sereni*, Mem. sul moto dell' aqua nei tubi, Roma 1848.

6) *Weisbach-Herrmann*, S. 1010.

7) Bologna, Memorie della r. accademia (4) 7 (1886), S. 85, 9 (1888), 10 (1889), S. 397; (5) 1 (1890), S. 455.

erweiternde Kegel, die unmittelbar an der Wand beginnen bzw. abgerundet an die Wand anschließen die Ausdrücke

(147) $$Q = 0{,}64\,k\,D^2\sqrt{h}\sqrt[4]{l} \quad \text{bzw.} \quad = k\,D^2\sqrt{h}\sqrt[4]{l},$$

worin D den Durchmesser am Röhrenanfang, h die Druckhöhe, l die Röhrenlänge bezeichnet und, wie eine Nachrechnung lehrt, D, h und l in m zu messen sind, ferner für einen

Divergenzwinkel von	5° 5′ 21″	3° 23′ 34″	1° 41′ 47″	0°
k =	10,66	9,80	8,60	7,80

ist.

In der Kehle kann der Druck nicht unter Null sinken, ja nicht einmal sich der Null sehr nähern, weil sonst entweichende Gase, die vordem absorbiert waren, und Wasserdampf die Kontinuität vereiteln. Daher kann der Druckhöhenunterschied — da die Atmosphäre denselben Druck wie rd. 10 m Wassersäule ausübt — nicht $h + 10$ (worin h die Tiefenlage der Öffnung unter dem Spiegel in m) erreichen und muß die Geschwindigkeit im verengten Querschnitt F_1 unter $\sqrt{2g(h+10)}$, die in der Endmündung vom Querschnitt F_2 unter

$$\frac{F_1}{F_2}\sqrt{2g(h+10)}$$

bleiben. Eine beliebige Steigerung des Ausflusses bei gegebenen Kehlquerschnitt F_1 nur durch Vergrößerung der Endmündung F_2 ist daher nicht möglich. Bei zu großer Endmündung oder zu weitem Klaffen ändert sich eben die Erscheinung und bildet das Wasser, ähnlich wie schon auf S. 232 bemerkt wurde, einen freien Strahl, der den Kegel nicht ausfüllt.

Es sind nunmehr eine große Anzahl *Ausflußkoeffizienten* μ angegeben worden. Diese μ stehen in innigem *Zusammenhang* mit den *Widerstandskoeffizienten* der Formeln (122a), (123) usw. Wenn aus einer Öffnung von der Fläche F in der Tiefe h unter dem Spiegel die Menge

$$Q = \mu F\sqrt{2gh}$$

austritt, so ist die mittlere Austrittsgeschwindigkeit

$$V = \frac{Q}{F} = \mu\sqrt{2gh},$$

daher die Geschwindigkeitshöhe an der Mündung

$$\frac{V^2}{2g} = \mu^2 h,$$

so daß von der Druckhöhe h die Höhe

$$h - \mu^2 h = (1-\mu^2)\cdot\frac{V^2}{\mu^2\,2g}$$

verloren gegangen ist. Dieselbe Druckverlusthöhe wird aber bei Einführung eines Widerstandskoeffizienten durch

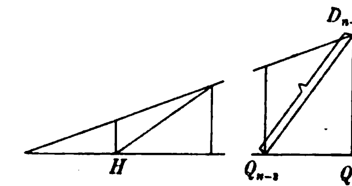
$$\zeta \frac{V^2}{2g}$$

ausgedrückt. Es gilt daher

(148) $$\zeta = \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}},$$

womit für jedes μ das zugehörige ζ leicht gefunden werden kann.

Beispiel 1. Besitzt ein Rohr (z. B. bei einem Sprinkler oder einem Regenfall zum Feuerlöschen), welches den Durchmesser D habe, in gleichen Zwischenabständen gleich große Ausflußöffnungen F, so lassen sich die Ausflüsse Q_1 bis Q_n nach *J. P. Frizell*[1]) wie folgt berechnen. Zählt man der Strömung entgegen, so herrscht an der ersten Öffnung eine Druckhöhe H und beträgt der Ausfluß



$$Q_1 = \mu F \sqrt{2gH} = a\sqrt{H}.$$

Dann folgen eine Strecke mit dem Durchlauf Q_1 und einem Druckhöhenverlust, der sich (vgl. z. B. die Formeln (27) *Dupuits* oder (33 b) *Saph* und *Schoders*) durch bQ_1^2 ausdrücken läßt, die zweite Öffnung mit dem Ausfluß $a\sqrt{H+bQ_1^2}$ usw. Es findet sich für

die $n-1^{\text{te}}$ Öffnung $\quad a\sqrt{H+b(Q_1^2+\cdots+Q_{n-2}^2)} = Q_{n-1} - Q_{n-2}$,

die n^{te} Öffnung $\quad a\sqrt{H+b(Q_1^2+\cdots+Q_{n-1}^2)} = Q_n - Q_{n-1}$

und hiernach $ba^2 Q_{n-1}^2 = (Q_n - Q_{n-1})^2 - (Q_{n-1} - Q_{n-2})^2$. Zeichnet man demnach zwei Gerade unter dem Winkel arctang $a\sqrt{b}$, mißt man auf einer dieser Geraden (Schenkel) vom Winkelscheitel aus die Q und sind Q_1 bis Q_{n-1} bereits gefunden, so erhält man den Punkt Q_n, indem man in Q_{n-1} eine Senkrechte auf dem genannten Schenkel errichtet, bis sie den zweiten Schenkel in D_{n-1} schneidet und das Stück $Q_n Q_{n-1} = Q_{n-2} D_{n-1}$ macht.

2. Soll man einen langgestreckten Behälter aus einer Zuleitung derart speisen, daß der Zufluß möglichst gleichmäßig längs des Behälters erfolgt, so kann man dies durch eine entsprechende Lochung erreichen[2]). Beträgt der Gesamtzufluß Q, so strömt bei gleichmäßiger Verteilung auf die Länge l längs dx in der Zeiteinheit $\frac{Q}{l}dx$ ein. Bezeichnet man die Flächensumme aller (einander ähnlichen) Öffnungen, die längs der Längeneinheit angebracht sind, mit y und die Überdruckhöhe in der Leitung gegenüber dem Behälterdruck mit h, so muß daher

$$\frac{Q}{l}dx = \mu \cdot y\,dx \cdot \sqrt{2gh} \quad \text{oder} \quad y = \frac{Q}{\mu\sqrt{2g}\,l\sqrt{h}}$$

sein. Da sich auf der Strecke dx nach Gl. (33 b) der Druckhöhenverlust zu

$$b\left(Q - \frac{Q}{l}x\right)^2 dx = \text{etwa } 0{,}0016\,\frac{Q^2}{D^{5,25}}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx$$

1) Journ. of the Franklin Institute (3) 76 (1878), S. 84.

2) *F. Schaffernak*, bisher unveröffentlicht.

oder auf der Rohrstrecke x, wie die Integration zeigt, zu

$$b\,Q^2\left(x-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{3\,l^2}\right)$$

bestimmt, so folgt für die Druckhöhe h an der Stelle x, wenn H die Druckhöhe im Rohr an der Eintrittsstelle in den Behälter bezeichnet,

$$h=H-b\,Q^2\left(x-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{3\,l^2}\right),$$

womit man für die Lochflächen die Regel

$$y=\frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\cdot\frac{Q}{l\sqrt{H-b\,Q^2\left(x-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{3\,l^2}\right)}}$$

erhält. Für $\mu=0{,}61$, $Q=1\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}}$, $D=0{,}8$ m, $H=0{,}15$ m, $l=20$ m erhält man

$$y=\frac{1}{0{,}61\cdot 4{,}43}\;\frac{1}{20\sqrt{0{,}15-0{,}005163\,x\left[1-\frac{x}{l}+\left(\frac{x^2}{3\,l^2}\right)^2\right]}}$$

$$=\frac{0{,}04777}{\sqrt{1-0{,}0344\left(1-\frac{x}{l}+\frac{x^2}{3\,l^2}\right)x}}$$

und für $x:l=0$, $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$, 1 für y die Werte 0,0478, 0,0513, 0,0534, 0,540, 0,0544. Darnach sind z. B. zwischen 4,5 und 6,5 m von der Eintrittsstelle 3 Löcher von 0,114 und 2 von 0,113 m Durchmesser oder zusammen von 0,0514 m² Fläche anzubringen.

78. Der Ausflußstrahl. Es ist bereits erwähnt worden, daß bei Ausfluß aus dünner Wand eine Einschnürung des Strahles stattfindet, wobei es bei kreisförmiger und rechteckiger Öffnung[1]) nach *H. Bazin* (der ein Rechteck von 20 cm Höhe und 80 cm Breite gewählt hatte) keinem Zweifel unterliegt, daß infolge der Beschleunigung während des Falles die Einschnürung mit der Entfernung von der Gefäßöffnung fortgesetzt zunimmt. Nicht so sicher ist es bei lotrechten quadratischen Öffnungen in dünner Wand, bei welchen[2]) *J. V. Poncelet* und *J. A. Lesbros* (bei 20 cm Seitenlänge des Quadrates) mittels Rahmen, von welchen aus sie Stahlspitzen vorschoben, folgende Querschnittsflächen des Strahles maßen:

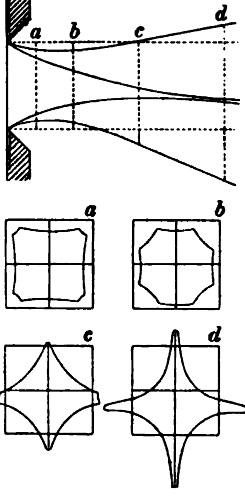
Öffnungsabstand	6,4	11	15	20	25	30	35	40	50 cm
Querschnitt	252	245	237	233	232	225	239	243	244 cm²

Wenn auch *J. A. Lesbros*[3]) später in 30 cm Abstand einen Querschnitt von 231 cm² (statt nur 225 cm²) ermittelte, so wäre hier doch ein

1) Paris, Mém. prés. par div. sav. 32 (1902), Nr. 4, S. 42.
2) Ebenda 3 (1832), S. 367.
3) Ebenda 13 (1852), S. 42.

wahres Flächenminimum nachgewiesen, wenn nicht die Schwierigkeit der Messung eingebogener Flächen im schwankenden Strahl auch dies Ergebnis zweifelhaft machen würde.

Der besprochene Strahl bleibt nämlich nicht rechteckig. Schon der Strahl aus *lotrechtem* Kreis wird allmählich elliptisch; aus einem Quadrat tretend aber wird er achteckig und schließlich sternförmig. Die Ursache dieser Erscheinung liegt in der Oberflächenspannung, welche die Ecken zunächst abstumpft und dann den Umrißpunkt über die Gleichgewichtslage hinaus einzieht. Dadurch gehen die Kanten in Furchen, diese in Rippen über, so daß zum Teil seltsame Querschnittsformen entstehen[1]), wie es besonders *G. Bidone*[2]), *J. V. Poncelet* und *J. A. Lesbros* und *H. A. Magnus*[3]) beobachtet haben.



Übrigens zeigen sich nach letzterem[4]) auch bei kreisförmiger Öffnung in dünner Wand Anschwellungen in der Öffnungsnähe, wenn die Zuströmung nicht von allen Seiten in gleicher Weise erfolgt.

Bäuche zeigen sich nach *H. G. Magnus* und *F. Savart* ebenfalls wenn man das Wasser im Gefäß erschüttert, wodurch Schwingungen entstehen, welche die fallende Bewegung zeitweise hindern und eine Trennung bewirken.

Das Aussehen des Strahles aus dünner Wand ist von dem aus einem Ansatz verschieden[5]). Ersterer gleicht einem geschliffenen starren Glasstabe, in dem sich alle Gegenstände spiegeln; letzterer aber ist matt, trübe gefärbt und an der Oberfläche fein gefurcht. Indem die Furchen wie kleine Wellen ihre Stellung fortwährend ändern, entsteht zugleich ein flimmernder Glanz. Er ist ferner starkem Schwanken ausgesetzt, das sich in kurzen Perioden wiederholt, bis er bei Erniedrigung des Wasserstandes im Gefäße schließlich wegen Unterschreitung der unteren Grenzgeschwindigkeit in der Ansatzröhre das Aussehen eines Strahles der ersten Art annimmt.

Springt unter Druck stehendes Wassers aus einer wagrechten Öffnung,

---

1) Ebenda 13 (1852), S. 44, 50 Taf. 6.

2) Torino, Memorie 34 (1830), S. 237 u. f.

3) Ann. Phys. Chem. (4) 5 (1855), S. 24 u. f.

4) Ebenda S. 42.

5) Vgl. z. B. *G. Hagen*, Handbuch der Wasserbaukunst, 1. Teil 1, 3. Aufl. (1869), S. 162; siehe auch oben: die kritische Geschwindigkeit.

so entsteht ein lotrechter Strahl, der sich, soweit der Luftwiderstand nicht stört, nach dem Gesetz der Wurfbewegung nach oben verlangsamt, so daß bei einer Ausflußgeschwindigkeit w_0 im Abstande z von der Öffnung die Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{w_0^2 - 2gz}$$

herrscht. Da dieselbe Wassermenge alle Strahlquerschnitte durchsteigen muß, nehmen diese nach oben in dem Maße zu, wie w kleiner wird, wodurch der sogenannte *Newton*sche Katarakt[1]) entsteht.

Von technischer Bedeutung wegen seiner Verwendung beim Feuerlöschen ist besonders die Steighöhe des Strahles. Bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten kann die Sprunghöhe s ohne merklichen Fehler der Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$ gleichgesetzt werden. Bei größerer Geschwindigkeit aber bleibt sie des Luftwiderstandes wegen merklich hinter letzterer zurück. *Mariotte*[2]) folgerte aus seinen Versuchen, daß bei Ausfluß aus dünner Wand das Stück, um das der springende Strahl unter dem Spiegel des Ausflußgefäßes zurückbleibt, dem Quadrate der Steighöhe s proportional sei und zwar gilt nach ihm für die Druckhöhe in Pariser Fußen bzw. Metern

$$\frac{h}{s} = 1 + \frac{s}{300} \text{ bzw. } = 1 + \frac{s}{97} = 1 + 0{,}0103\,s. \tag{149}$$

J. Weisbach[3]) fand statt dessen durch mannigfaltige Versuche bei Druckhöhen von 1 bis 24 m für h und s in Meter für eine Kreisöffnung von 1 bzw. 1,41 cm Durchmesser

$$\frac{h}{s} = 1 + 0{,}01158\,h + 0{,}000582\,h^2 \tag{150}$$

$$\text{bzw.} \quad = 1 + 0{,}00778\,h + 0{,}0006038\,h^2,$$

für ein kurzes konoidisches Mundstück von 1 cm Weite

$$\frac{h}{s} = 1{,}027 + 0{,}00048\,h + 0{,}0009561\,h^2, \tag{150a}$$

für ein konisches Mundstück, daß sich bei 14,5 cm Länge von 3 cm Weite auf 1 cm verjüngt,

$$\frac{h}{s} = 1{,}045 + 0{,}00037\,h + 0{,}000859\,h^2, \tag{150b}$$

für dasselbe Mundstück nach Verkürzung auf 10,5 cm Länge

$$\frac{h}{s} = 1{,}022 + 0{,}00239\,h + 0{,}000327\,h^2. \tag{150c}$$

1 1,41 14,5 cm 10,5 cm 3 3

1) *I. Newton,* Philosophiae naturalis principia, tom 2, sect. 7.

2) Traité du mouvement des eaux, Paris 1686, 4. Teil, 1. Gespräch.

3) Z. d. V. deutsch. I. 5 (1861), S. 113 = *Weisbach-Hermann,* S. 1028.

Auch *O. Lueger*[1]) und andere[2]) geben Daten über die Höhe, welche nach Zerteilung eines aus einem Feuerwehrstrahlrohr tretenden Strahles die obersten sichtbaren Tropfen erreichen.

Sehr sorgfältige Versuche nahm *J. R. Freeman*[3]) vor, der sich besonders hütete, seine Proben bei Wind vorzunehmen, weil er sich überzeugte, daß schon ein schwacher Luftzug genügt, die Steighöhe der obersten Tropfen um ein Zehntel zu verringern. Noch bedeutender zeigte sich der Einfluß des Windes auf die wagrechte Entfernung. Bei Windstille steigen nach ihm die obersten Tropfen bei einer Druckhöhe h am Strahlrohranfange aus einer Mundstücköffnung vom Durchmesser d bei glatter Führung bis zur Höhe

$$(151) \qquad s = h - 0{,}000113\,\frac{h^2}{d},$$

und bei einem am Mundstückende nach innen vortretenden Ring bis zur Höhe

$$(151\text{a}) \qquad s = h - 0{,}000131\,\frac{h^2}{d}$$

empor. Dabei versteht *Freeman*[4]) unter h die Summe aus dem manometrischen Druck und der, freilich unbedeutenden, Geschwindigkeitshöhe am Strahlrohranfang. Diese Formeln seien aber nur für Druckhöhen von 28 bis 49 m und bei Öffnungsweiten von 1,9 bis 3,5 cm zuverlässig, denn bei größerer Öffnung verliere d an Bedeutung, so daß es, wenn es größer als 5,1 wird, nur etwa mit dem Wert 5,1 in die Formeln einzuführen ist. Auch wachse bei Druckhöhen h von mehr als 49 m der Luftwiderstand stärker als bis dahin, nämlich stärker als h^2. Die Säule bleibe für $s = 23$ bzw. 30 m bis zur Höhe $0{,}94\,s$ bzw. $0{,}9\,s$ zusammenhängend und bilde für

$s =$	15,2	22,9	30,5	38,1	45,7
bis zur Höhe	$0{,}88\,s$	$0{,}79\,s$	$0{,}73\,s$	$0{,}67\,s$	$63\,s$

einen erstklassigen Löschstrahl. Zur Erläuterung dieses Begriffes sei erwähnt, daß *Freeman* von einem „guten Löschstrahl" verlangt, daß er anscheinend noch $^9/_{10}$ seines Wassers innerhalb eines Kreises von 38 cm und $^3/_4$ innerhalb eines Kreises von 26 cm führe; ferner, daß er auch bei frischer Brise noch brauchbar (eigentlich „fair" = anständig) sei; endlich, daß er bei Windstille durch eine Fensteröffnung an eine Zimmerdecke gespritzt dort noch heftig zerstäube. Die Druckhöhe h in (151)

---

1) Städt. Tiefbau 2 = *O. Lueger,* Wasserversorgung d. Städte, Abt. 1, Darmstadt 1895, S. 120; Daten üb. Feuerpfosten ebenda, 2. Abt., Leipzig 1908, S. 257.

2) Siehe *Freeman,* Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 21 (1889), S. 373.

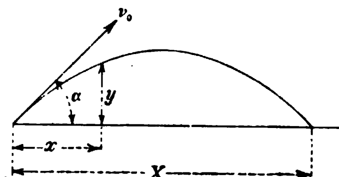
3) Ebenda S. 379f. 4) Ebenda S. 392, 460.

und (151a) setzt sich aus der manometrischen Druckhöhe am Strahlrohranfange und der Geschwindigkeitshöhe zusammen, wie dies bereits Gl. (146a) erläutert.

Ohne Luftwiderstand würde das Wasser dem Gesetze der reinen Wurfbewegung folgen, nach welchem[1]) bei einem Anfangssteigungswinkel α jedes Teilchen eine Parabel mit den Ordinaten

(152) $$s = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2}[1 + \operatorname{tang}^2 \alpha]$$

beschriebe (worin x = Abszissen, v_0 = Anfangsgeschwindigkeit) und die größte Wurfweite



(152a) $$X = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

für $\alpha = 45^0$ am größten ausfiele. Bei Wasserstrahlen ist die Abweichung von diesen Gesetzen schon erheblich und *Freeman*[2]) fand für die größte Wurf- oder Sprungweite

bei einer Druckhöhe von	3,5 bis 7	10	35 m
den Steigewinkel α =	45^0	35 bis 40^0	30 bis 34^0.

Eine Formel stellte er für die Sprungweite nicht auf, sondern gab eine graphische Darstellung und Tabellen.

Beispiel. Wieviel Wasser strömt aus einem Feuerpfosten, in welchem 4,6 Atmosphären Überdruck herrscht, durch einen rauhen Schlauch von 210 m Länge und 5 cm Weite und ein Strahlrohr von 1,5 cm weiten Mundstücköffnung aus, und wie hoch reicht der Strahl? Die Geschwindigkeit v_0 in der Mundstücköffnung erfordert eine Geschwindigkeit $0{,}09\,v_0$ im Schlauch. Für den Eintritt aus dem Feuerpfosten in den Schlauch (§ 69) ist $\zeta = 0{,}5$, für die Reibung im Schlauch (§ 23) $c = 50$, für den Austritt aus dem Strahlrohr (§ 76) $\mu = 0{,}975$ oder nach (148)

$$\zeta = \frac{1 - 0{,}95}{0{,}95} = 0{,}05.$$

Demnach gilt vom Feuerpfosten ausgehend für den Druckhöhenaufwand einschließlich der Geschwindigkeitshöhe mit $1 : 2g = 0{,}51$

$$0{,}5(0{,}09 v_0)^2\, 0{,}051 + \frac{4(0{,}09 v_0)^2}{50^2 \cdot 0{,}05} 210 + 0{,}05 v_0^2\, 0{,}051 + v_0^2\, 0{,}051$$
$$= (0{,}0002 + 0{,}0544 + 0{,}0026 + 0{,}0510) v_0^2 = 0{,}1082 v_0^2 = 46$$

oder $v_0 = 20{,}6 \text{ m sec}^{-1}$, wonach aus der $1{,}77 \text{ cm}^2$ großen Öffnung $3{,}65 \text{ l sec}^{-1} = 219 \text{ l min}^{-1}$ strömen. Der wirksame Druck am Strahlrohranfange entspricht $(0{,}0026 + 0{,}0510) v_0^2 = 0{,}0536 \cdot 425 = 22{,}8$ m Wassersäule. Nach (151), soweit dies hier gilt, wäre die Steighöhe s der obersten Tropfen

$$= 22{,}8 - 0{,}000113 \frac{520}{0{,}015} = 22{,}8 - 3{,}9 = 18{,}9 \text{ m}$$

---

1) Siehe z. B. *Weisbach-Herrmann*, S. 117.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 21 (1889), S. 387.

und würde bis zur Höhe 0,791 · 18,9 = 15,0 der Strahl löschen. Nach *Weisbachs* Formel (150b), die sich auf ähnliche Abmessungen bezieht, wie dieses Beispiel, wäre

$$22{,}8 = h = 1{,}045 + 0{,}00037 \cdot 22{,}8 + 0{,}000859 \cdot 519{,}8 = 1{,}50\, s$$

und daher $s = 15{,}2$.

Im Auftrage der Technischen Kommission des Deutschen Feuerwehrausschusses hat *Weigand* Versuche vorgenommen, welche unmittelbar den Zusammenhang zwischen dem Druck in der Wasserleitung, im Feuerpfosten, der Strahlweite und dem Ausfluß ergaben. Er gibt z. B. für gummierten Flachsschlauch folgende Zahlen[1]):

Schlauchdmr. 44 mm		Einfacher Schlauch $p_0 = 4{,}5$ atm				Zwei Schläuche $p_0 = 4{,}6$ atm			
l	d	p_1	p_2	x	Q	p_1	p_2	x	Q
m	mm	atm	atm	m	$\mathrm{l\,min^{-1}}$	atm	atm	m	$\mathrm{l\,min^{-1}}$
15	18	2,8	2,2	27	325	2,5	1,5	22,5	575
15	16	2,8	2,4	29	275	3,2	2,3	26	530
15	14	3,2	2,8	31	225	3,2	2,7	30	450
15	12	3,3	3,0	30	175	3,8	3,5	28	325
105	18	3,0	1,0	21	275	3,3	1,1	19	500
105	16	3,1	1,6	25	210	3,3	1,5	21	425
105	14	3,2	2,0	27	190	3,6	2,3	25,5	370
105	12	3,2	2,0	24	140	3,8	2,9	22	270
210	18	3,1	0,3	15	200	3,5	0,3	13,5	400
210	16	3,3	0,9	18	185	3,6	0,9	19,5	380
210	14	3,4	1,3	20,5	155	3,8	1,5	17	320
210	12	3,4	2,0	—	135	3,9	2,3	21,5	300
315	18	3,4	—	11	160	3,6	0,0	11,5	350
315	16	3,5	0,6	15	150	3,4	0,5	15	315
315	14	3,4	1,0	20	145	3,6	0,9	18	300
315	12	3,6	1,7	19,5	140	3,6	1,7	18	265

l = Schlauchlänge, d = Öffnungsweite des Mundstückes, p_0 = manometrischer Überdruck in der Wasserleitung, p_1 desgl. im Feuerpfosten, p_2 desgl. im Strahlrohransatz, x = Strahlweite, Q = Ausflußmenge. Bei doppelter Schlauchlegung hat jeder Schlauch die Länge l, und spritzt man durch zwei Strahlrohre je $^1/_2\, Q$.

Ein 75 mm weiter, 300 m langer gummierter Schlauch, der sich in zwei gummierte Schläuche von je 15 m Länge und 44 mm Weite gabelte, gab mit $p_0 = 4{,}5$ atm Überdruck für

d	p_1	p_2	x	Q
= 18 mm	= 3,0 atm	= 1,1 atm	= 25 m	= 500 $\mathrm{l\,min^{-1}}$
16	2,9	1,5	24	425
14	3,4	2,0	24	400
12	3,4	2,4	27	310
10	3,7	3,0	27	250

1) Feuerspritze (1905) Nr. 8; seit 1906 jährlich in *Bandaus* Feuerwehrkalender, woselbst auch Angaben für 44 mm weiten Rohhanfschlauch und für 75 mm weiten gummierten Hanfschlauch.

79. Beziehung von Ausfluß und Überfall. Wenn man bei einem Ausfluß aus einer rechteckigen Öffnung in lotrechter Wand durch Verminderung des Zulaufes den Wasserspiegel ständig senkt, so reißt sich, wie *Hégly*[1]) bemerkte, der Strahl, noch ehe seine Oberfläche bis zur oberen Öffnungskante gesunken ist, plötzlich von letzterer los, wobei sich der Spiegel ein wenig senkt. Wenn man umgekehrt bei einem Überfall durch Steigerung des Zuflusses die Strahloberfläche ständig hebt, so erfolgt die Rückwandlung in die Ausflußerscheinung mit einer plötzlichen Hebung, und zwar bei einem *höheren* Wasserspiegel als die frühere Wandlung. Wenn der Spiegel also zwischen gewissen Grenzlagen liegt, kann das Wasser sowohl einen Ausfluß, als auch einen Überfall bilden. Bei einer Öffnung von 20 cm Höhe und 80 cm Breite befinden sich beispielsweise die Grenzlagen (in 5 m Abstand von der Öffnung gemessen) 0,248 und 0,228 m über der Unterkante für den „Ausfluß" bzw. 0,234 und 0,223 m für den „Überfall", wobei

$$0{,}228 - 0{,}223 = 0{,}005 \quad \text{und} \quad 0{,}248 - 0{,}234 = 0{,}014 \text{ m}$$

die erwähnte plötzliche kleine Senkung bzw. Hebung bei der Umwandlung vorstellt.

Wenn der Überdruck in einem zylindrischen Ausflußrohr immer kleiner wird, so hört das Wasser schließlich auf, einen Strahl zu bilden, und fällt statt dessen über, wobei der Rohrrand die Rolle einer kreisförmigen Überfallkante spielt. Für die genannten zwei Ausströmweisen gelten verschiedene Gesetze, zwischen welchen nur ein kurzer Übergang stattfindet. *F. E. Lawrence* und *P. L. Braunworth*[2]) befaßten sich mit dieser Frage. Sie brachten etwas unter der Rohrkante eine mit offener Spitze endigende (sog. *Pitot*sche) Röhre an, die sie mit einem U-förmigen Manometerrohr verbanden. Die Erhebung des Wassers im Manometer über der Rohrkante (oder eigentlich über der bei vollem Rohr infolge der Oberflächenspannung ein klein wenig höheren Spiegelmitte) faßten sie als Druckhöhe h auf, und fanden, daß bei Angabe des Ausflusses Q, des Rohrdurchmessers D und der Druckhöhe h in Metermaß (bzw. englischem Fußmaß) für $h = 0$ bis $0{,}388\, D^{1,04}$

$$Q = 5{,}34\, D^{1,29}\, h^{1,29} \quad (\text{bzw.} = 8{,}8\, D^{1,29}\, h^{1,29}) \tag{153}$$

ist; daß dann ein Übergangszustand eintritt, bis

$$h = 0{,}143\, D^{1,03}$$

1) Paris, C. R. 122 (1896), S. 917.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 57 (1906), S. 265. Formeln: S. 288, 290.

wird und daß hierauf das neue Gesetz

$$Q = 3{,}44\,D^{2{,}025}\,h^{0{,}53} \quad (\text{bzw.} = 5{,}84\,D^{2{,}025}\,h^{0{,}53}) \tag{153a}$$

gilt. Die Verfasser sagen ferner, daß, wenn der Wechsel plötzlich statt allmählich erfolgen würde, er für

$$h = 0{,}559\,D^{1{,}01}$$

stattfände. Da für die Höhe h des plötzlichen Wechsels sowohl (153a) als auch (153) gelten müßten, ergibt die Rechnung für diesen Fall immerhin etwas abweichend

$$3{,}44\,D^{2{,}025}\,h^{0{,}53} = 5{,}34\,D^{1{,}29}\,h^{1{,}29}$$

oder

$$0{,}644\,D^{0{,}735} = h^{0{,}76} \quad \text{oder} \quad h = 0{,}561\,D^{0{,}967}.$$

Die Gleichungen (153) und (153a) bleiben trotzdem für die richtige Abschätzung des Ausflusses artesischer Bohrungen von Belang, bei denen man bisher nur an den Strahl, nicht an den Überfall dachte, sowie für die Beurteilung einer Speisung durch aufsteigende Röhren.

80. Ausfluß unter Wasser. Erfolgt ein Ausfluß unter Wasser und liegen die Spiegel in den Höhen h_1 und h_2 über der Öffnung, so wäre nach dem *Bernoulli*schen Theorem die Ausflußgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{2g\,(h_1 - h_2)}\,. \tag{154}$$

Auch hier findet eine Einschnürung statt und beträgt der Ausfluß durch eine Öffnung vom Querschnitt f

$$Q = \mu f \sqrt{2g\,(h_1 - h_2)} \tag{154a}$$

mit μ als Ausflußkoeffizient. Dieser ist stets kleiner, als wenn das Wasser durch dasselbe Mundstück in freie Luft fließt. Das Verhältnis beider Koeffizienten beträgt nach *J. Weisbach*[1]) im Mittel 0,986. Nach *P. Richelmy*[2]) zeigte sich allerdings bei 13,5 weiter kreisförmiger sowie bei 13,5 und 22,6 cm weiter quadratischer Öffnung die Abnahme größer.

K. W. Bornemann[3]) baute in ein Gerinne von 1,14 m Breite zwei kleine Griessäulen ein, welche die Öffnung auf $b = 1{,}01$ m verringerten, legte eine 43 mm starke Schütze gegen die Griessäulen und maß den Durchfluß bei Schützenhüben a von 0,034 bis 0,174 m. Leider standen ihm nur 0,135 $m^3\,sec^{-1}$ Wasser zur Verfügung. Er fand

1) Untersuchungen aus dem Gebiete der Mechanik u. Hydraulik, 2. Abt., Leipzig 1843, S. 80.

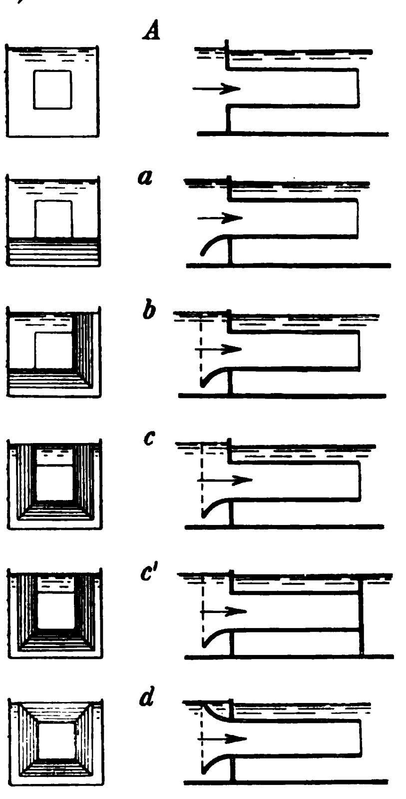
2) Torino, Memorie (2) 15 (1855), S. 117.

3) Civilingenieur (2) 17 (1871), S. 54. Einwendungen *Linnenbrügges*, ebenda (2) 25 (1879), S. 25, widerlegte *Bornemann* in *M. Rühlmanns* Hydromechanik, 2. Aufl., Hannover 1880, S. 747.

$$Q = \left(0{,}6378 + 0{,}30\,\frac{h_1 - h_2}{h_2 - 0{,}5\,a}\right) a\,b\,\sqrt{2g\,(h_1 - h_2)}\,, \tag{154b}$$

worin h_1 die Höhe des Oberwassers, h_2 die des Unterwassers über der durchlaufenden Sohle, also $h_2 - 0{,}5a$ die Gegendruckhöhe auf die Öffnungsmitte bedeutet, und er h_2 dort maß, wo der Unterwasserspiegel seine größte Erhebung zeigte und beruhigt war.

Durch den großen Maßstab des benutzten Bauwerkes zeichnen sich die Untersuchungen aus, die *C. B. Stewart*[1]) vornahm. Er ließ das Wasser durch Kastenröhren von 1,22 m Breite und Höhe, aber höchst verschiedener Länge ausfließen. Letztere wechselte nämlich von nur 0,94 bis 4,27 m. An die Wand des Speisebeckens (oder richtiger Speiseganges, da er nur 3,05 m Breite und eine ähnliche Tiefe hatte) stieß das Kastenrohr bei



einigen Versuchen an, während es bei anderen mit Führungen in das Speisebecken hineinragte. Je nachdem keine, einfache, doppelte, drei- oder vierseitige Führung vorhanden war, sei die Form mit A, a b, c oder d bezeichnet; endlich bezeichne c' die Form c mit der Beigabe einer Abschlußwand im Wasseraufnahmegang, in welchen bei den Formen A, a, b, c und d das Kastenrohr frei hineinragte. Die Führungsflächen waren als Zylinderflächen mit Viertelellipsen von 61 und 91 cm Halbachsenlänge als Leitlinien ausgebildet. Bei allseitiger Führung, der Form d, bildete diese daher einen vierkantigen Trichter von 2,44 m Einlaufbreite und -Höhe. Im Speisegang schwankte die Geschwindigkeit U_0 zwischen etwa 0,08 und 0,15 m sec^{-1}, war also nicht groß. Immerhin wurde als Druckhöhe die Summe aus dem Spiegelhöhenunterschiede h (vom

1) Investigation of flow through large submerged orifices and tubes 1 = Bulletin of the university of Wisconsin 216, Madison 1908.

Speise- und Aufnahmegang) und der Geschwindigkeitshöhe $\frac{U_0^2}{2g}$ im Speisegang betrachtet. Die Zahlen der nachfolgenden Tabelle beziehen sich auf die Formel

$$Q = \mu F \sqrt{2gh + U_0^2}$$

und

$$h = \zeta_u \frac{U^2}{2g},$$

worin F den Kastenrohrquerschnitt und U die mittlere Geschwindigkeit im Kastenrohr $= Q : F$ ist. Da hiernach ζ_u nicht nur den Verlust im Rohr, sondern auch die Vernichtung der Geschwindigkeitshöhe im Aufnahmegang umfaßt, nimmt es vergleichsweise große Werte an.

Druckhöhenverlust h in cm	Form	Ausflußkoeffizient μ				Widerstandskoeffizient ζ_u			
		Länge des Kastenrohres ohne Führung in m							
		0,094	0,76	1,52	4,27	0,094	0,76	1,52	4,27
1,5	*A*	0,63	0,76	0,80	0,83	2,55	1,73	1,58	1,46
	a	0,67	0,74	0,80	0,84	2,25	1,85	1,56	1,43
	b	0,73	0,76	0,82	0,85	1,86	1,78	1,48	1,38
	c	0,82	0,76	0,86	0,88	1,48	1,73	1,34	1,30
	d	0,93	0,98	0,98	0,92	1,15	1,10	1,17	1,19
3	*A*	0,61	0,71	0,76	0,79	2,70	1,97	1,76	1,62
	a	0,63	0,69	0,77	0,79	2,51	2,09	1,72	1,60
	b	0,68	0,71	0,78	0,80	2,17	1,97	1,63	1,55
	c	0,76	0,71	0,82	0,83	1,71	1,97	1,50	1,45
	d	0,92	0,90	0,89	0,88	1,19	1,24	1,27	1,29
4,6	*A*	0,61	0,70	0,75	0,79	2,73	2,08	1,77	1,62
	a	0,63	0,68	0,76	0,80	2,55	2,14	1,73	1,58
	b	0,67	0,70	0,78	0,81	2,22	2,08	1,65	1,54
	c	0,76	0,70	0,81	0,83	1,74	2,08	1,49	1,45
	d	0,92	0,90	0,89	0,88	1,17	1,24	1,27	1,28
6,1	*A*	0,61	0,71	0,76	0,80	2,73	2,01	1,73	1,56
	a	0,63	0,69	0,77	0,81	2,54	2,11	1,69	1,52
	b	0,67	0,71	0,79	0,82	2,21	2,01	1,61	1,47
	c	0,76	0,71	0,83	0,85	1,71	2,01	1,45	1,40
	d	0,94	0,91	0,90	0,89	1,14	1,21	1,24	1,25
7,6	*A*	0,61	0,71	0,78	0,82	2,72	1,96	1,66	1,49
	a	0,63	0,70	0,78	—	2,52	2,04	1,63	—
	b	0,68	0,71	0,80	—	2,18	1,96	1,56	—
	c	0,77	0,71	0,85	—	1,68	1,96	1,40	—
	d	0,95	0,93	0,92	—	1,10	1,17	1,19	—
9,1	*A*	0,61	0,73	0,79	0,84	2,69	1,90	1,61	1,41
	a	0,64	—	—	—	2,48	—	—	—
	b	0,68	—	—	—	2,14	—	—	—
	c	0,78	—	—	—	1,64	—	—	—
	d	0,97	—	—	—	1,06	—	—	—

Die Form c' gab bei 4,27 m Kastenrohrlänge bei einem Druckhöhenverlust

h	μ	ζ_u
$h = 1{,}5$ cm	$\mu = 0{,}87$	$\zeta_u = 1{,}31$
3	0,82	1,49
4,6	0,82	1,49
6,1	0,84	1,43

Auch der Austritt von Wasser in Wasser erfolgt wie der von Wasser in Luft durch einen Strahl, der schließlich durch die Reibungen zerstört wird. *C. Weigelt*[1]) ließ gefärbtes Wasser, sowie gefärbte Lösungen mit 10, 20 und 30 Prozent Kochsalz unter $^1/_4$ m und unter 4 m Überdruck in ungefärbtes Wasser von 0,1, 0,2, 0,3 und 0,6 m sec^{-1} Strömungsgeschwindigkeit fließen und die entstehenden Streukegeln, welche dem aus Schornsteinen strömenden Rauch sehr ähneln, photographieren. Mit der Entfernung von der Ausflußstelle wurde der Umriß immer welliger und flockiger und zwar schien die Mischung mit dem farblosen Mittel bei der 10prozentigen Lösung am raschesten vor sich zu gehen. *C. Weigelt* hofft, daß aus solchen Versuchen Schlüsse auf die Mengung von Abwässern mit Flußwasser gezogen werden können. Das scheint möglich; doch müßte vorher mindestens geprüft werden, ob die Verbreitung des Salzes so wie die des Färbemittels erfolgt.

Läßt man etwas (gefärbtes) Wasser in ruhiges (ungefärbtes) unter einem Druckunterschied von wenigen Millimetern durch Öffnen und Schließen eines Hahnes, also durch kurze Zeit, treten, so nimmt der eingetretene Teil eine an den *Newton*schen Katarakt (siehe S. 276) erinnernde pilzähnliche Gestalt an[2]). Die Reibung an den Seiten verursacht dabei ein Wirbeln der Hutkrempe. Wiederholung eines solchen Vorganges, also stoßweiser Wassereintritt, kann dabei bewirken, wie *E. Reusch*[3]) beobachtete, daß der neue Strahl einen Kegel ungefärbten Wassers vor sich her durch die Hutmitte treibt, wodurch nur ein Wirbelring übrig bleibt, der den bekannten Rauchringen gleicht.

Den *Zusammenstoß zweier Strahlen* hat *F. Savart*[4]) beobachtet. Treffen sich zwei einander entgegengerichtete, wagrechte, gleich dicke und schnelle zylindrische Strahlen, so entsteht eine fast kreisrunde lot-

1) Z. f. Gewässerk. 5 (1903), S. 283.

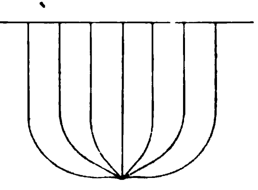
2) *A. Overbeck*, Ann. Phys. Chem. N. F. 2 (1877), S. 5 u. f. *G. Kötschau* setzte die Versuche fort, ebenda N. F. 26 (1885), S. 530f. *K. Mack* photographierte die Gebilde, ebenda N. F. 68 (1899), S. 183. Verwandte Literatur: *F. Auerbach* in *A. Winkelmanns* Handbuch der Physik 1, 2. Aufl., Leipzig 1908, S. 1069.

3) Ann. Phys. Chem. (4) 20 (1860), S. 309 u. f.

4) Ann. phys. chim. 55 (1833), S. 257f.

rechte Scheibe. Der Versuch läßt sich durch Änderung der Öffnungsdurchmesser der Druckhöhen und der gegenseitigen Lage der Strahlen abändern und liefert dann eine große Zahl verschiedener Gebilde[1]).

81. Der Ausflußwirbel. Wird ein zylindrisches Gefäß durch eine kleine Bodenöffnung langsam entleert, so sinken nach Beobachtung von *O. Tumlirz*[2]) die Spiegelteilchen lotrecht nieder, ohne daß der Spiegel merklich uneben würde. Bei vergleichsweise größerer Öffnung entsteht über letzterer in der Regel ein Senkungstrichter, in welchem das Wasser wirbelt. Ein solcher läßt bei Vernachlässigung der Reibung unter Annahme kreisförmiger Bahnen (vom Radius r) eine einfache mathematische Behandlung zu. Dem *Bernoulli*schen Theorem gemäß muß in der Tiefe z unter dem ursprünglichen Spiegel, wenn auf die Trichterfläche der Druck p_0 wirkt, für den Druck p im Innern — wenn r_0 den Halbmesser des Trichterrandes, u die Geschwindigkeit im allgemeinen, u_0 jene am Trichterrand bedeutet —



(155)
$$\frac{p - p_0}{\gamma} = z - \frac{u^2 - u_0^2}{2g}$$
oder

(155 a)
$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma}{g} u \frac{du}{dr}$$

gelten. Das Gleichgewicht der wagrechten Kräfte verlangt, daß die Fliehkraft
$$\frac{\gamma u^2}{gr} = \frac{dp}{dr}$$
sei, woraus in Verbindung mit (155 a)
$$u + r\frac{du}{dr} = \frac{d(ru)}{dr} = 0$$
oder

(155 b)
$$u = \frac{u_0 r_0}{r}$$

hervorgeht. Das bedeutet, daß die Geschwindigkeit dem Halbmesser verkehrt proportional ist, wie schon *Leonardo da Vinci*[3]) behauptete und *G. B. Venturi* bestätigt hat. Für die Trichteroberfläche ($p = p_0$) folgt aus (155) und (155 b)
$$z = \frac{u^2 - u_0^2}{2g} = \frac{u_0^2 r_0^2}{2g}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right).$$



1) *G. Magnus* in Ann. Phys. Chem. (4) 5 (1855), S. 5f.

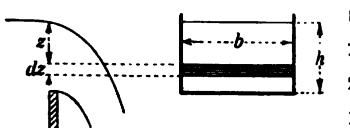
2) Wien, Sitzungsberichte 105[2a] (1896), S. 1024.

3) *G. B. Venturi*, Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Léonard de Vinci, Paris 1797, S. 21. Bezügl. weiterer Literatur über Bewegungen im sich entleerenden Gefäße sei auf *Ph. Forchheimer*, Enzykl. d. math. Wiss., 4. Bd. Mechanik, 3. Teilbd., S. 405 f. verwiesen.

Bei Vermeidung jedes Anlasses zu exzentrischen Bewegungen gelingt es übrigens, wie *A. Budau* beobachtet hat, das Wasser ohne Wirbelbildung zum Abfluß zu bringen.[1]) Durch die Fliehkraft des Wirbels wird das Wasser von der Öffnung weggedrängt und die Druckhöhe verkleinert, daher auch die Ausflußmenge verringert. Sie fällt dementsprechend noch kleiner aus, wenn man das Wasser, ehe der Abfluß beginnt, schon in kreisende Bewegung setzt, wie ebenfalls *Budau* beobachtet hat. — Bei Ausfluß aus einer Wandöffnung in der Tiefe h setzt sich die Umlaufgeschwindigkeit v mit $\sqrt{2gh}$ nach dem Kräfteparallelogramm zusammen.

X. Der Überfall.

82. **Vollkommener Überfall ohne seitliche Strahleinzwängung bei scharfer Kante und freiem Strahl.** Wenn die Öffnung, durch die Wasser aus einem Gefäße tritt, bis über den Spiegel reicht, pflegt man die Erscheinung als Überfall zu bezeichnen. Der erste, der sich mit diesem Vorgang befaßte, war der Marchese *G. Poleni*[2]), welcher den Wandausschnitt des Überfalles als eine Anzahl aneinander stoßender Öffnungen auffaßte und sich sowohl auf den vollkommenen Überfall mit Austritt in freie Luft als auch auf den unvollkommenen, bei welchem ein Teil des Ausflusses unter Wasser erfolgt (von ihm motus mixtus genannt), einließ. Nennt man die Spiegel zu beiden Seiten des Überfalles *Ober- und Unterwasserspiegel*, so liegt bei dem vollkommenen Überfall der Unterwasserspiegel tiefer, bei dem unvollkommenen Überfall höher als die niedrigste Stelle der Überfallkante oder des Überfallrückens (Wehrrückens, Wehrkrone). Bei *Polenis* Auffassung kann man



sich bei vollkommenem Überfall aus einem rechteckigen Wandausschnitt (der die Höhe h zwischen der wagrechten Kante und der Oberfläche, sowie die Breite b in m habe) diesen in wagerechte Streifen zerlegt denken. Aus einem in der Tiefe z unter dem Oberwasserspiegel gelegenen solchen Streifen fließt dann sekundlich, wenn man zunächst von einem Ausflußkoeffizienten absieht,

$$b\,dz\sqrt{2gz},$$

und aus dem ganzen Ausschnitt unter Beigabe eines Ausflußkoeffizienten μ die Menge

$$Q = \mu\int_0^h b\sqrt{2gz}\,dz = \frac{2}{3}\mu b h\sqrt{2gh}. \tag{156}$$

---

1) Die betreffende Anordnung befindet sich in seinem Laboratorium in Wien.

2) De motu aquae mixto, Patavii 1717; italienisch in Raccolta d'autori, che trattano del moto dell' acqua 2. ed. 3, S. 304, Firenze 1767.

Unmittelbar über der Wehrkrone weist der Spiegel bereits eine Senkung auf und besitzt das Wasser schon eine Geschwindigkeit. Es ist daher logisch und geschah von allen Forschern, unter h den Höhenabstand zwischen der Wehrkrone (Wehrrücken oder -kante) und solchen Spiegelpunkten zu verstehen, an denen der Spiegel noch keine merkliche Senkung aufweist. Die theoretische Schwierigkeit, daß der Spiegel überhaupt im Gefälle liegt, ist bei der Geringfügigkeit des letzteren praktisch nicht vorhanden.

Die ersten beachtenswerten Versuche[1]) machte *L. G. du Buat*[2]), welcher mit Überfallhöhen h von 0,045 bis 0,178 m arbeitete und das μ der Formel (156) $= 0{,}652$ fand. Weitere Versuche nahmen *Brindley*, *Smeaton*, *Christian*, *Kypke*[3]) (auf Veranlassung *Eytelweins*) und *Bidone*[4]) vor. Aus *Kypkes* Messungen ging ein Mittelwert $\mu = 0{,}629$ hervor, während *Bidone* bei rings scharfer Kante $\mu = 0{,}605$ fand. Die Versuche, die *J. V. Poncelet* mit *J. A. Lesbros* begann und letzterer allein fortsetzte[5]), beschränkten sich zwar auf die Breite $b = 0{,}2$ m, waren aber dafür zahlreich und sorgfältig. Spätere Versuche *Castels*, welche sich bei 0,36 und 0,74 m Gerinnebreite von 0,01 bis 0,36 und 0,74 m Überfallbreite und von 0,03 bis 0,24 m Überfallhöhe erstreckten, gaben zur Einführung der Zulaufgeschwindigkeit in die Formel für die Überfallmenge Anlaß. Es ist klar, daß die Zulaufgeschwindigkeit, welche vom Gefälle im Zulaufgerinne herrührt, den Erguß Q erhöht, daß also ein schmäleres Zulaufgerinne bei gleicher Höhe h und Breite b mehr Wasser liefert, wie ein breiteres. *J. F. D'Aubuisson de Voisins*[6]) leitete nun aus *Castels* Messungen verschiedene Formeln ab, die aber nicht so klar erscheinen wie nachstehende Aufstellung *J. Weisbachs*.[7])

Hat das Wasser eine mittlere Ankunftsgeschwindigkeit U, so tritt zu jeder Druckhöhe s, wenn man darüber hinwegsieht, daß die Einzelgeschwindigkeiten der Teilchen mit der mittleren Geschwindigkeit nicht

1) Bezüglich der geschichtlichen Darstellung sei auf *M. Rühlmann*, Hydromechanik, 2. Aufl. Hannover 1880, S. 200 verwiesen.

2) Principes d'hydraulique Paris 1779, in der Ausgabe von 1816 in tome 2 N. 409—415.

3) *Eytelwein*, Handbuch der Mechanik fester Körper u. Hydraulik, 2. Aufl., S. 123.

4) Torino, Memorie 28 (1824), S. 295.

5) Paris, Mém. prés. par div. sav. 3 (1832), S. 352, 13 (1852), S. 60, 79 f.

6) Traité d'hydraulique, 2. éd., 1840, S. 76. Ann. chim. phys. 62 (1836), S. 113. Er zitiert Mém. de l'Acad. de Sciences de Toulouse 4 (1837).

7) *Hülßes* Maschinen-Enzyklopädie, Leipzig 1841, 1, S. 478. Daß sich stellenweise zu große Angaben von μ finden, betonte *W. Heyne*, Z. d. öst. I. u. A.V. 54 (1902), S 837.

ganz übereinstimmen, noch eine Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ hinzu. Das Integral lautet also nunmehr

$$\mu \int_0^z b \sqrt{2g\left(z + \frac{U^2}{2g}\right)}\, dz$$

und der Ausfluß findet sich zu

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[\left(h + \frac{U^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{U^2}{2g}\right)^{3/2}\right], \tag{156a}$$

wofür man, wenn U klein ist, wie es zumeist zutrifft, auch

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(h + \frac{U^2}{2g}\right)^{3/2} = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g}\, (h + 0{,}051\, U^2)^{3/2} \tag{156b}$$

schreiben kann.

Die Anwendbarkeit dieser und ähnlicher Formeln hängt wesentlich von der Kenntnis der verschiedenen μ ab, und da ist zunächst die Anordnung, bei welcher das Zulaufgerinne breiter als der Wandausschnitt ist, wodurch der Strahl eine Einschnürung erfährt, von dem Überfallwehr zu unterscheiden, das in das Gerinne eingebaut ist, so daß die Gerinnewände Führungen bilden. Das Wehr selbst kann eine scharfe Kante oder einen flachen oder abgerundeten Rücken besitzen. Die in ein Kastengerinne eingebauten Wehre mit lotrechter Wand und scharfer Kante sind am häufigsten untersucht worden, weil sie die einfachste, stets genau herstellbare Form besitzen. Sie werden deswegen zur Wassermessung benutzt, daher es bei ihnen ganz besonders auf eine genaue Kenntnis des Koeffizienten μ ankommt. Dabei ist es von Wesenheit, daß unter dem Strahl (der Nappe) atmosphärischer Druck herrsche, was sich durch eine Verbindung des Raumes unter dem Strahl mit der Außenluft erzielen läßt. Es bildet sich dann bei unbehindertem Abfluß des überfallenden Wassers der *freie* oder *gelüftete Strahl* (nappe libre *Bazins*).

Zu den sorgfältigsten Versuchen über den freien Strahl ohne seitliche Einschnürung bei lotrechter Wehrwand mit scharfer wagrechter Kante gehören die von *J. B. Francis*[1]) 1852 durchgeführten, welche aber nur Überfallhöhen h von etwa 0,2 bis 0,3 m umfaßten. Bezüglich der Ankunftsgeschwindigkeit hält *Francis* an der *Weisbach*schen Auffassung fest, und so lautet seine Formel in engl. Fußmaß

$$Q = 3{,}33\, b \left[\left(h + \frac{U^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{U^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

1) *J. B. Francis,* Lowell Hydraulic Experiments. Nach der 4. Aufl. (1883) gibt *F. Frese,* Z. d. V. deutsch. Ing. 34 (1890), S. 1371 die Daten wieder.

oder in metrischem Maß, wenn man zugleich bedenkt, daß bei vollkommener seitlicher Führung das Wasser gleichmäßig längs des ganzen Wehres überfällt,

$$q = 1{,}838\left[\left(h + \frac{U^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{U^2}{2g}\right)^{3/2}\right], \tag{157}$$

worin q die Wassermenge in $m^3 \sec^{-1}$ bezeichnet, die pro m Wehrkante überfällt, also als $m^2 \sec^{-1}$ aufzufassen ist.

Umfassendere Beobachtungen nahm *Basin*[1]) vor, der von $h = 8$ bis über 50 cm vorschritt. Er ging vom Ausdruck (156 b) aus, den er verbesserte, indem er mit Rücksicht auf die ungleichmäßige Verteilung der Geschwindigkeiten über den Querschnitt den Koeffizienten von U^2 erhöhte. Er setzte also mit $\alpha > 1$ den Überfall pro m Wehrlänge

$$q = \frac{2}{3}\mu h \sqrt{2gh}\left(1 + \alpha\frac{U^2}{2gh}\right)^{3/2}.$$

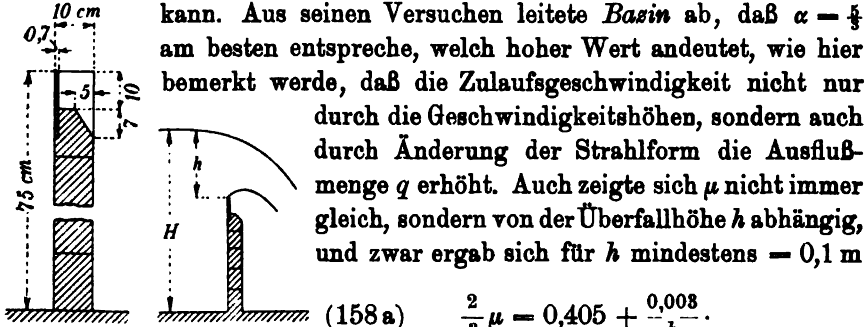
Freie Nappe.

Bei Entwickelung des letzten Gliedes in eine Reihe wird hieraus, wenn man die höheren Potenzen des kleinen Bruches $\frac{\alpha U^2}{2gh}$ vernachlässigt,

$$q = \frac{2}{3}\mu h \sqrt{2gh}\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\frac{U^2}{2gh}\right), \tag{158}$$

worin, wenn sich der Oberwasserspiegel in der Höhe H über der Sohle befindet, $U = q : H$ oder näherungsweise $= 2{,}08\, h^{3/2} : H$ gesetzt werden kann. Aus seinen Versuchen leitete *Basin* ab, daß $\alpha = \frac{5}{3}$ am besten entspreche, welch hoher Wert andeutet, wie hier bemerkt werde, daß die Zulaufsgeschwindigkeit nicht nur durch die Geschwindigkeitshöhen, sondern auch durch Änderung der Strahlform die Ausflußmenge q erhöht. Auch zeigte sich μ nicht immer gleich, sondern von der Überfallhöhe h abhängig, und zwar ergab sich für h mindestens $= 0{,}1$ m

$$\frac{2}{3}\mu = 0{,}405 + \frac{0{,}003}{h}. \tag{158 a}$$



Basins Überfall.

Hiermit führten ihn seine Versuche auf die für h und H in Meter und q in $m^2 \sec^{-1}$ geltende Endformel

$$q = \left[0{,}405 + \frac{0{,}003}{h}\right]\left[1 + 0{,}55\frac{h^2}{H^2}\right] h\sqrt{2gh} \tag{158 b}$$

$$= \left[1{,}794 + \frac{0{,}0133}{h}\right]\left[1 + 0{,}55\frac{h^2}{H^2}\right] h^{3/2},$$

1) *H. Basin,* Expériences nouvelles sur l'écoulement par déversoir, Paris 1898.

die mit einer Genauigkeit von 2 bis 3 Prozent für h zwischen 0,1 und 0,3 m durch

$$(158\,c)\qquad q = \left(0{,}425 + 0{,}212\frac{h^2}{H^2}\right) h\sqrt{2gh} = \left(1{,}89 + 0{,}94\frac{h^2}{H^2}\right) h$$

ersetzbar ist. Die Formel (158 b) gilt für vollkommene Überfälle über scharfe Kanten ohne seitliche Einschnürung, und zwar bei freiem Strahl. Auf sie bezog *Bazin* alle späteren Untersuchungen anderweitiger Anordnungen, und so sei nachstehend auch seine Zahlentafel wiedergegeben, die dieser Formel entspricht.

Werte von $q : h\sqrt{2gh}$ für Wehrhöhen w.

Überfallhöhen h in Meter	$w =$						
	0,2 m	0,3 m	0,4 m	0,5 m	0,6 m	0,8 m	1,0 m
0,1	0,459	0,447	0,442	0,439	0,437	0,435	0,434
0,12	0,462	0,448	0,442	0,438	0,436	0,433	0,432
0,14	0,466	0,450	0,443	0,438	0,435	0,432	0,430
0,16	0,471	0,453	0,444	0,438	0 435	0,431	0,429
0,18	0,475	0,456	0,445	0,439	0,435	0,431	0,428
0,2	0,480	0,459	0,447	0,440	0,436	0,431	0,428
0,22	0,484	0,462	0,449	0,442	0,437	0,431	0,428
0,24	0,488	0,465	0,452	0,444	0,438	0,432	0,428
0,26	0,492	0,468	0,455	0,446	0,440	0,432	0,429
0,28	0,496	0,472	0,457	0,448	0,441	0,433	0,429
0,3	0,500	0,475	0,460	0,450	0,443	0,434	0,430
0,32	0,504	0,478	0,462	0,452	0,444	0,436	0,430
0,34	0,507	0,481	0,464	0,454	0,446	0,437	0,431
0,36	0,510	0,483	0,467	0,456	0,448	0,438	0,432
0,38	0,513	0,486	0,469	0,458	0,449	0,439	0,432
0,4	0,516	0,489	0,472	0,459	0,451	0,440	0,433
0,42		0,491	0,474	0,461	0,452	0,441	0,434
0,44		0,494	0,476	0,463	0,454	0,442	0,435
0,46		0,496	0,478	0,465	0,456	0,443	0,435
0,48		0,498	0,480	0,467	0,457	0,444	0,436
0,5		0,500	0,482	0,468	0,459	0,445	0,437
0,52		0,502	0,484	0,470	0,460	0,446	0,438
0,54		0,504	0,485	0,472	0,461	0,447	0,439
0,56		0,506	0,487	0,473	0,463	0,449	0,439
0,58		0,508	0,489	0,475	0,464	0,450	0,440
0,6		0,510	0,491	0,476	0,466	0,451	0,441

Nach *F. Frese*[1]) ist q für $h < 0{,}32$ m etwas kleiner und für $h > 0{,}32$ m etwas größer als nach *Bazin*, denn er setzt auf Grund der eigenen und der *Bazin*schen Versuche, sowie solcher von *H. Castel*, *J. A. Lesbros*, *J. B. Francis* und *A. Fteley* und *F. P. Stearns*, deren h übrigens durchweg nicht über die *Bazins* hinausgingen,

$$(159)\qquad q = \left[0{,}410 + \frac{0{,}0014}{h}\right]\left[1 + 0{,}55\frac{h^2}{H^2}\right] h\sqrt{2gh}$$

$$= \left[1{,}816 + \frac{0{,}0062}{h}\right]\left[1 + 0{,}55\frac{h^2}{H^2}\right] h^{3/2}.$$

1) Z. d. V. deutsch. Ing. 44 (1890), S. 1315.

Erheblichere Tiefen wurden erst von *G. W. Rafter*[1]) angewendet. Die Ausrechnung seiner Angaben in metrischem Maß gibt:

Wehrhöhe $H-h$	Überfallshöhe h	Koeffizient $\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}=q:h^{3/2}$ nach Messung	nach *Bazin*	nach *Frese*
m	m	$m^{1/2}\,sec^{-1}$	$m^{1/2}\,sec^{-1}$	$m^{1/2}\,sec^{-1}$
1,585	0,682	1,84	1,90	1,92
1,585	0,806	1,81	1,92	1,94
1,585	1,056	1,87	1,97	1,99
1,585	1,303	1,92	2,01	2,02
1,585	1,426	1,94	2,02	2,04

Zwischen $h = 0{,}1$ m und $0{,}5$ m weichen die Formeln von *Bazin* und *Frese* 2,6 bis 0 Prozent voneinander ab, und hiermit ist die Zuverlässigkeit der Formeln innerhalb ihres Geltungsbereiches gekennzeichnet, der sich nicht weit über die Grenzen der zugrunde liegenden Versuche erstreckt. Außerhalb des Geltungsbereiches nimmt die Unsicherheit, die mit dem Gebrauch von Überfallformeln verbunden ist, stark zu. Von den angegebenen Messungen *Rafters*, deren Ungenauigkeit *Rafter*[2]) auf höchstens 3 Prozent schätzt, weicht z. B. *Freses* Ausdruck bis zu 5 Prozent ab. Übrigens verhält sich auch dasselbe Wehr bei Wiederholung eines Versuches scheinbar nicht wie vorher, was sich wesentlich durch Ablesungsfehler erklärt. Beispielsweise fand *Bazin*[3]) bei seinem Meßwehr von 1 m Breite statt einer stetigen Reihe für

$$h = 0{,}233 \quad 0{,}243 \quad 0{,}250 \quad 0{,}256 \quad 0{,}269$$
$$q:\sqrt{2g}\,h^{3/2} = 0{,}429 \quad 0{,}424 \quad 0{,}425 \quad 0{,}425 \quad 0{,}428.$$

Bei aller Sorgfalt bleiben also bei Überfallhöhen von 0,2 bis 0,3 m Abweichungen untereinander von 1 v. H. unvermeidlich. Bei Übertragung der an einem Wehr gewonnenen Erfahrungen auf ein anderes kommen weitere Unterschiede dadurch hinzu, daß die Geschwindigkeitsverteilung in den beiden Zulaufgerinnen nicht die gleiche ist. Infolge der nicht übereinstimmenden Geschwindigkeitsverteilung in schmalen und breiten Gerinnen kann die Wehrlänge auch nicht ganz ohne Einfluß auf die Wassermenge sein. Eine gleichförmige Geschwindigkeitsverteilung vermindert die gesamte lebendige Kraft des Wassers und mäßigt besonders die Oberflächengeschwindigkeit, wodurch die Sprungweite abnehmen

1) *R. E. Horton*, U. S. Geolog. Survey, Water-Suppley and Irrigation Paper 200, Washington 1906, S. 39, nach *Rafter* S. 397.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 44 (1900), S. 394.

3) Ann. d. ponts et chauss. (6) 16 (1888²), S. 408.

und die Strahlsenkung über dem Wehr zunehmen muß. Darauf ist es wohl zurückzuführen, daß *Th. Rehbock*[1]), der Beruhigungssiebe und einen Schwimmrechen in ein Gerinne mit Seitenwänden aus Spiegelglas versenkte, für seine geringen h von 0,02 bis 0,18 m kleinere q als *Frese* und *Bazin*, nämlich

$$(160) \qquad q = \left[0{,}406 + \frac{0{,}002}{8h - 0{,}012}\right]\left[1 + 0{,}55\frac{h^2}{H^2}\right] h\sqrt{2gh}$$
$$= \left[1{,}799 + \frac{0{,}00886}{8h - 0{,}012}\right]\left[1 + 0{,}55\frac{h^2}{H^2}\right] h^{3/2}$$

erhielt. Für große Überfallhöhen h würde diese Formel übrigens unwesentlich größere q als die *Bazins* ergeben. Ähnlich fand *W. Hansen*[2]), der nur ein 6 m langes Zulaufgerinne benutzte und durch einen Rechen beruhigte, bei ungefähr 0,5 m Wehrhöhe für $h = 0{,}082$ bzw. 0,29 m den Koeffizienten $\frac{2}{3}\mu = 0{,}415$ bzw. 0,436 (und ähnlich die Zwischenwerte), während *Bazin* hierfür 0,447 und 0,445 hätte. Später[3]) änderte *Th. Rehbock* seine Formel in die zugleich für die Verwendung handlichere

$$(160\text{a}) \qquad q = \frac{2}{3}\left[0{,}605 + \frac{1}{1100h} + \frac{h}{12w}\right] h\sqrt{2gh}$$
$$= \left[1{,}787 + \frac{0{,}0027}{h} + 0{,}246\frac{h}{w}\right] h^{3/2}$$

um, welche ebenfalls mit *Bazins* Gl. (158b) bei größeren Überfallhöhen leidlich stimmt, bei kleinen Überfallhöhen aber um mehrere Hundertstel kleinere Werte liefert. Das Jahr 1913 brachte die abermalige Änderung[4]) in

$$(160\text{b}) \qquad q = \frac{2}{3}\left[0{,}605 + \frac{1}{1050h - 3} + 0{,}08\frac{h}{w}\right] h\sqrt{2gh}$$
$$= \left[1{,}787 + \frac{2{,}925}{1050h - 3} + 0{,}236\frac{h}{w}\right] h^{3/2}.$$

Daß der wirkliche Ausfluß bei Überfällen nur etwa 0,6 des nach *Poleni* berechneten beträgt, kommt nicht von der Reibung, die auf der kurzen Strecke zwischen der Stelle, wo die Spiegelsenkung noch unmerklich ist, und jener, wo das Wasser überfällt, geringfügig sein muß.

---

1) Festschrift zur Feier usw. herausg. v. d. Großh. Technischen Hochschule Fridericiana (Karlsruhe 1900).

2) Z. d. V. deutsch. Ing. 36 (1892), S. 1095.

3) Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher u. Ärzte 83 = 1911 (Leipzig 1912), S. 140. Zeitschr. d. Verbandes deutscher Archit. u. Ingen.-Vereine 1 (1912), S. 10.

4) Zeitsch. f. Architektur u. Ingenieurwesen (2) 18 (1913), Sp. 130. Hier widerlegt auch *Rehbock* einen ebenda (2) 17 (1912), Sp. 217 unternommenen Angriff *A. Hofmanns*.

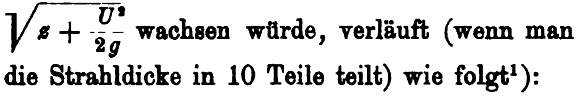
Der Grund liegt vielmehr — ähnlich wie beim Ausfluß aus Öffnungen — im Gegendruck, der im Strahl entsteht. An der oberen wie an der unteren Fläche des freien Strahles herrscht atmosphärischer Druck und daher ist hier an einem Punkte, der die Tiefe z unter dem ungesenkten Spiegel hat, die schräge Geschwindigkeit u gleich der des reibungslosen Gleitens auf einer schiefen Ebene, oder

$$u = \sqrt{2gz}.$$

Im Innern entsteht aber, weil die theoretischen Sprungparabeln der Wasserteilchen sich treffen, also letztere sich gegenseitig behindern, ein Gegendruck p (über dem atmosphärischen). Nach dem *Bernoulli*schen Theorem muß daher bei einem Eigengewicht γ der Flüssigkeit und einer (übrigens meist unwesentlichen) Ankunftsgeschwindigkeit U

$$\frac{p}{\gamma} = z + \frac{U^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}$$

sein. *Bazin* hat die Geschwindigkeit und den Druck in einem Strahl durch Einführung eines rechtwinklig gebogenen und eines geraden Röhrchens gemessen und gefunden, daß der Vorgang tatsächlich dem *Bernoulli*schen Theorem entspricht. Der Gegendruck hat im unteren Teil des Strahlquerschnittes sein Maximum und die Geschwindigkeit, welche ohne Gegendruck wie



$\sqrt{z + \frac{U^2}{2g}}$ wachsen würde, verläuft (wenn man die Strahldicke in 10 Teile teilt) wie folgt[1]):

Strahlpunkt	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Druck $p:\gamma h =$	0,0	0,098	0,159	0,180	0,182	0,170	0,145	0,114	0,084	0,042	0
$v:\sqrt{2gh} =$	0,946	0,855	0,778	0,721	0,666	0,632	0,600	0,571	0,536	0,519	0,496

wonach im untersuchten Strahl, der die Dicke $0{,}648\,h$ an der Meßstelle aufwies, der Ausfluß

$$q = 0{,}660 \cdot 0{,}648\,h\sqrt{2gh} = 1{,}89\ \mathrm{m^2\,sec^{-1}}$$

war.

Bazin[2]) hat auch die Strahlform bei je einem Wehr von der Höhe $w = 0{,}35$ und $= 1{,}13$ m gemessen. Die Spiegelsenkung kann man bei einem Abstand $3h$ stromauf von der Überfallkante als verschwunden ($0{,}003h$) betrachten. Über letzterer beträgt die lotrechte Strahldicke im Mittel $0{,}854h$. Die Strahlunterfläche steigt bis zu 0,1 oder $0{,}11h$ über

1) Expériences nouvelles, S. 119f.

2) *K. Keller*, Z. d. V. deutsch. Ing. 34 (1890), S. 883 nach Ann. d. ponts et chauss. (6) 19 (1890[1]), S. 56f.

die Kante empor und erreicht die Kantenwagrechte wieder in einer Entfernung von etwa $0{,}66\,h$.

83. Vollkommener Überfall ohne seitliche Strahleinschnürung bei scharfer Kante, ohne Lüftung. Wenn nicht für Luftzutritt unter den Strahl gesorgt wird, kann dieser verschiedene Formen annehmen, wie zuerst *P. Boileau*[1]) bemerkt hat. Bezeichnet w die Wehrhöhe über der Untergrabensohle und ist $h <$ etwa $0{,}4\,w$, so bildet sich unter dem Strahl, der dabei weniger weit springt als der freie, also *gedrückt* erscheint (nappe deprimée *Bazins*) ein luftverdünnter Raum. Da hiemit der Druck an der Strahlunterkante sinkt, sinkt auch der dem Ausfluß entgegenwirkende Druck im Strahl und liefert der gedrückte Strahl, der infolge seiner kleineren Sprungweite aussieht, als liefere er weniger Wasser, in der Tat mehr als der gelüftete Strahl. Der gedrückte Strahl ist weniger beständig und *Rehbock*[2]) berichtet z. B., daß bei einem bestimmten Wehr, wenn der Oberwasserspiegel 0,5 bis 0,7 m über der Wehrkrone steht, das Wasser fortgesetzt aus dem abgeschlossenen Unterraum zwischen Strahl und Wehr Luft fortreißt, wobei der Strahl sich senkt und der Spiegel des Unterraumes allmählich steigt, jedoch nie höher als 0,5 m über den Unterwasserspiegel. Plötzlich schieße dann an irgend einer Stelle mit donnerartigem Geräusch Luft unter den Strahl, wobei dieser sich hebt. Der Vorgang wiederhole sich bei 0,6 m Überfallhöhe regelmäßig alle zehn Sekunden und bei geringerer Überfallhöhe früher.

Gedrückte Nappe.

Der von *Rehbock*[3]) erwähnte *gehobene Strahl* entsteht, wenn man den Zufluß eines gelüfteten Strahles rasch vermindert und man zugleich das Entweichen der Luft verhindert. Bei Wasserabnahme hat nämlich der gelüftete Strahl das Bestreben, seinen Unterraum zu verkleinern, so daß, wenn dieser abgeschlossen ist, hier Überdruck entstebt.

Ist die Überfallhöhe $h \geqq 0{,}4\,w$, so kann sich der Unterraum mit wirbelndem Wasser füllen und bildet sich der ***unterfüllte Strahl*** (nappe noyée en dessous). Findet dabei die Wiedererhebung des Wassers entfernt vom Wehr statt (à res-

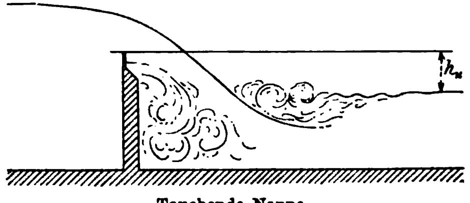
Unterfüllte Nappe mit freiem Fuß.

1) Traité de la mesure des eaux courantes, Paris 1854.
2) Festschrift S. 23.
3) Ebenda.

saut éloigné), ist also der Nappenfuß frei, so tritt nach *H. Bazin*[1]) zum Ausdruck (158 b) noch ein Faktor hinzu. Bezeichnet man nunmehr den Abfluß des freien Strahles von der Überfallhöhe h mit q_1 und den des unterfüllten von gleicher Überfallhöhe mit q, so gilt

$$(161) \qquad q : q_1 = 0{,}878 + 0{,}128 \frac{w}{h};$$

für $h = 0{,}4\,w$ wird $q : q_1 = 1{,}19$, und größer kann dieses Verhältnis nicht werden, weil bei geringerem Zufluß das Wasser sich vom Wehr löst und der gedrückte Strahl entsteht.



Tauchende Nappe.

Wenn der Höhenunterschied $h + h_u$ zwischen Ober- und Unterwasserspiegel $\gtreqless {}^3/_4\,w$ ist und letzterer nicht zu tief liegt, in welchem Falle der gedrückte oder auch der noch zu besprechende haftende Strahl entsteht, rückt der Wassersprung in die Wehrnähe und bedeckt wirbelndes Wasser einen Teil des fallenden Strahles. Man hat es dann mit dem *unterfüllten Tauchstrahl* (nappe noyée en dessous recouverte en partie par le reflux d'aval) zu tun, dessen Wasserlieferung q vom Unterwasser beeinflußt wird. Auch hier tritt zum Ausdruck (158b) ein Faktor hinzu. Geht man wieder vom Abfluß q_1 des freien Strahles von der Höhe h aus, so ist das Verhältnis[2])

$$(161\,\text{a}) \qquad q : q_1 = 1{,}06 + 0{,}16 \left(\frac{h_u}{h} - 0{,}05\right) \frac{w}{h} - 0{,}02 \left(\frac{h_u}{h} - 0{,}05\right)^2 \frac{w}{h}.$$

$\frac{h}{w}$	Werte von $q : q_1$ für $h_u : w =$							
	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
0,15	1,01	1,06						
0,2	1,02	1,06	1,10					
0,25	1,03	1,06	1,09	1,12	1,15			
0,3	1,03	1,06	1,09	1,11	1,14	1,10		
0,35	1,04	1,06	1,08	1,10	1,13	1,14	1,16	1,18
0,4	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,17
0,45	1,04	1,06	1,08	1,10	1,11	1,13	1,14	1,16
0,5	1,04	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	1,13	1,13
0,55	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,11	1,11	1,11
0,6	1,05	1,06	1,07	1,09	1,09	1,09	1,09	1,09
0,65	1,05	1,06	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08
0,7	1,05	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06

1) Expériences nouvelles S. 33, 35, 151.

2) Ebenda S. 40, 152.

Zumeist läßt sich dieser Ausdruck durch den einfacheren

(162) $$q : q_1 = 1{,}05 + 0{,}15 \frac{h_u}{h}$$

ersetzen.

Vorstehende Tabelle enthält die der Formel (161 a) entsprechenden Zahlen, ferner rechts oben leere Stellen, für jene Abmessungen, bei welchen der gedrückte oder haftende Strahl entsteht, also Gl. (161 a) nicht mehr gilt; endlich stehen unter dem Treppenstrich wieder für andere Abmessungen die für sie zutreffenden nach (161) berechneten Werte.

Wenn die Wehrtafel nicht zu dünn ist und die Überfallkante auf ihrer stromaufgekehrten Seite liegt, kann der Strahl am Wehr haften bleiben (sich ihm *anschmiegen*, nappe adhérente) und bis zu 0,3 mehr Wasser liefern, als der freie von gleichem h. *Bazin*[1]) veröffentlicht eine Querschnittskizze eines solchen Strahles, der gleich einem faltenreichen Vorhange niederfiel. Der Strahlkopf kann mit Luft oder auch ganz oder teilweise mit Wasser gefüllt sein.[2])

Angeschmiegte Nappe.

Da es nicht schwer hält, den Überdruck p über den atmosphärischen zu messen, der unmittelbar unter der Wehrkante herrscht, hat *Bazin*[3]) den Zusammenhang von q mit p bei dem unterfüllten Strahl, bei welchem der Druck eine Funktion der Abmessungen ist, zu erheben getrachtet. Die den Druck aufnehmenden Röhrchen brachte er 1 cm unter der Wehrkante an. Es zeigte sich mit p in Wassersäulenhöhe bei dem Tauchstrahl für

(162 a) Unterdruck, $p < h$ $$q : q_1 = 1 - 0{,}235 \frac{p}{h}\left(1 + \frac{1}{7}\frac{p}{h}\right),$$

(162 b) Überdruck, $0 < p < 0{,}6h$ $$q : q_1 = 1 - 0{,}235 \frac{p}{h}\left(1 + \frac{p}{h}\right),$$

(162 c) Überdruck, $0{,}6h < p$ $$q : q_1 = \left(1 + 0{,}04 \frac{h_u}{w}\right)\sqrt[3]{1 - \frac{p}{h}},$$

während sich bei gleichem Verhältnis von p zu h aber derartigen sonstigen Umständen, daß der Strahl fußfrei bleibt, für

(162 d) $p < 0{,}3$ $$q : q_1 = 1{,}01 - 2{,}45 \frac{p}{h}\left(1 + \frac{1}{5}\frac{p}{h}\right)$$

herausstellte.[4])

1) Expériences nouvelles, S. 7, 44, 48.
2) *Rehbock*, Festschrift, S. 29.
3) Expériences nouvelles, S. 144, 152, 184.
4) Expériences nouvelles, S. 144, Festschrift S. 27.

Bemerkt sei noch, daß die angeführten sieben Strahlarten (der gelüftete, gehobene, gesenkte oder unterfüllte Freistrahl, der Haftstrahl mit luftgefülltem, teilweise wassergefülltem oder wassergefülltem Kopf) nach *Th. Rehbock*[1]) sowohl freien als verdeckten Fuß (Tauchstrahl) haben können und daß außerdem als 15. Strahlform der *gewellte* Strahl (s. unten S. 305) und, allerdings nur bei runder Krone, der sich überhaupt nicht loslösende *aufliegende* Strahl vorkommen.

84. Überfall über Dammbalkenwehre sowie bei dreieckigem und abgerundetem Wehrquerschnitte. Es wurde am Schlusse des § 82 gesagt, daß der Strahl an seiner Unterfläche eine Sprungweite von $0{,}66\,h$ besitzt. Wenn demnach die Wehrkronenbreite $a > 0{,}66\,h$ oder $h < \frac{3}{2}a$ ist, legt sich notwendigerweise der Strahl an die Krone an. Zwischen $h = \frac{3}{2}a$ und $h = 2a$ ist der Zustand schwankend, und erst für $h > 2a$, wenn für Lüftung gesorgt ist, springt das Wasser stets als freier Strahl über. Für den längs der Krone anliegenden und erst beim Absturz freien Strahl ist die Wassermenge q bald kleiner, bald größer als jene q_1 des freien Strahles gleicher Überfallhöhe h, indem nach *Bazin*[2])

$$q : q_1 = 0{,}70 + 0{,}185\,\frac{h}{a} \tag{163}$$

ist, womit auch Angaben von *A. Fteley* und *F. P. Stearns*[3]) stimmen. Nach (163) ist für

$h : a =$	0,5	1	1,5	2	über 2
$q : q_1 =$	0,79	0,88	0,98 oder 1	1,07 oder 1	1

wobei $q : q_1 = 1$ den freien Strahl kennzeichnet. Ist der Überschlagbalken nicht, wie hier vorausgesetzt wurde, rechtwinklig behauen, sondern stromauf abgerundet, so erhöht dies q wesentlich; so wuchs durch eine Abrundung von 0,1 m Halbmesser bei einer Kronenbreite b von 2 m die Überfallmenge um 14 Prozent. Bei gewöhnlichen Balken ist die durch den Gebrauch eintretende Kantenabnutzung demnach schon von Belang.

Der nicht gelüftete[4]) Strahl kann sich ebenfalls sofort von der obersten Balkenfläche loslösen oder erst beim Absturz. Im ersteren Falle ist der Vorgang dem ähnlich, der sich beim gleichen h an einem scharfkantigen Wehr abspielt. Im zweiten Falle kann der Strahl ge-

1) Verhandlungen d. Gesellschaft deutscher Naturforscher u. Ärzte 83 = 1911 (Leipzig 1912), S. 138.

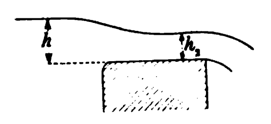
2) Expériences nouvelles, S. 54, 60.

3) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 12 (1883), S. 86, 97 f.

4) Expériences nouvelles, S. 73.

drückt oder unterfüllt sein, nämlich der Unterraum verdünnte Luft oder Wasser enthalten. Ist der Strahl gedrückt, so gibt (163) Werte, die nur wenig zu groß sind, und nähert sich h jenem, bei welchem die Nappe sich von der Krone löst, so wird Gl. (161) anwendbar. Bei unterfülltem Strahl kann man Gl. (163) noch als Annäherungsformel gebrauchen, jedoch nur bis sie dasselbe q liefert wie (161), falls der Strahlfuß frei ist, oder wie (162), falls der Strahl taucht. Von da ab, also für noch größere h, kann man sich mit (161) bzw. (162) behelfen, die aber etwas zu kleine q ergeben; und zwar wächst der Fehler mit h und beträgt, unmittelbar bevor der Strahl sich löst, 8 Prozent.

Für sehr breite Krone berechnete *J. B. Belanger*[1]) in seinen Vorlesungen die Überfallmenge unter Voraussetzung, daß sie das Maximum der möglichen Mengen bilde. Bei Parallelität der Stromfäden auf dem Wehrrücken ist dem *Bernoulli*schen Theorem zufolge bei einem Wasserstande h auf dem Rücken die Geschwindigkeit



$$u = \sqrt{2g(h - h_2)},$$

und daher die Überfallmenge

$$q = h_2 \sqrt{2g(h - h_2)},$$

welcher Ausdruck sein Maximum für $h_2 = \frac{2}{3} h$ hat und dann

$$\doteq 0{,}385 \sqrt{2g}\, h^{3/2}$$

ist. *Bazin* fand in der Tat bei 80 cm Rückenbreite den Überfallkoeffizienten zwischen 0,37 und 0,39.

Scharfkantige Wehre von dreieckigem Querschnitt kommen in der Praxis kaum vor. Es genüge die Mitteilung, daß eine stromaufgekehrte Böschung den Ablauf erhöht und bei steilem Abfall stromab verschiedene Strahlformen entstehen können, während bei flachem Abfall sich stets



der Strahl anschmiegt. Nachstehender kurzer Auszug aus den zahlreichen Angaben[2]) *Bazins* erläutern das Gesagte.

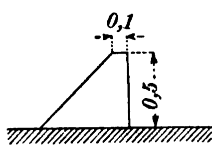
Verhältnis $q : q_1$. Strahlform: g = gedrückt, u = unterfüllt, a = angeschmiegt.

Wehrhöhe	Böschung (Höhe : Fuß)		Überfallhöhe in m							
m	stromauf	stromab	0,1		0,2		0,3		0,4	
0,5	1 : 2	lotrecht	1,145	g	1,195	u	1,16	u	1,13	u
0,5	1 : 1	1 : 1	1 23	a	1,205	a	1,20	a	1,11	a
0,75	lotrecht	1 : 2	0,99	a	1,015	a	1,02	a	1,025	a

1) École royale des ponts et chaussées, Session 1845—1846. Note sur l'Hydraulique, M. Belanger, S. 33. *A. Flamant*, Hydraulique 3. éd., S. 96.

2) Expériences nouvelles, S. 77, 79, 81.

Wehre mit geböschten Seiten und einer flachen Krone, also trapezförmigem Querschnitt, sind von *Bazin*, ferner mehrfach in Amerika untersucht worden. Der Überfallskoeffizient wechselt bei ihnen sehr und geht, wenn der angeschmiegte Strahl sich in den freien verwandelt, sprunghaft in die Höhe. Zwei Tabellen sollen auszugsweise nach *Bazin*[1]) folgen:



Verhältnis $q : q_1$

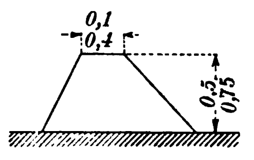
bei einem Wehr von 0,5 m Höhe, 0,1 m Kronenbreite.

Strahlform: g = gedrückt, u = unterfüllt, a = angeschmiegt.

	Höhe : Fuß =											
Böschung stromauf Böschung stromab	1 : 1 lotrecht		1 : 2 lotrecht		1 : 1 3 : 1		1 : 1 3 : 2		lotrecht 3 : 1		lotrecht 3 : 2	
Überfallhöhe h = 0,1 m	0,925	g	0,945	g	0,91	g	0,94	u	0,87	g	0,875	a
0,2 m	1,085	u	1,065	u	1,085	a	1,085	a	1,085	a	1,075	a
0,3 m	1,14	u	1,105	u	1,13	u	1,17	a	1,16	u	1,195	a
0,4 m	1,15	u	1,11	u	1,145	u	1,145	u	1,05	u	1,06	u

	Wehrh. 0,5, Kronenbr. 0,1 Höhe : Fuß				Wehrh. 0,75, Kronenbr. 0,4 Höhe : Fuß			
Böschung stromauf Böschung stromab	lotr. 1 : 1	lotr. 1 : 2	lotr. 1 : 3	lotr. 1 : 5	lotr. 1 : 2	2 : 1 1 : 2	2 : 1 1 : 4	2 : 1 1 : 6
Überfallhöhe h = 0,1 m	0,885	0,865	0,85	0,825	0,75	0,785	0,795	0,79
0,2 m	1,065	0,995	0,96	0,89	0,77	0,82	0,825	0,83
0,3 m	1,18	1,06	0,985	0,905	0,82	0,87	0,855	0,85
0,4 m	1,145*)	1,04	0,985	0,905	0,865	0,91	0,88	0,87

*) Dieser Strahl war der einzige nicht angeschmiegte.



Diese Verhältniszahlen für $q : q_1$ bleiben nicht weit über die Versuchsgrenzen hinaus zuverlässig, weil eine Vergrößerung von h bewirken kann, daß sich der Strahl loslöst und hiermit $q : q_1$ verringert. *G. W. Rafter*[2]), der mit größeren Wassermengen arbeiten konnte, vermutete, daß dies bei dem stromauf unter 1 : 2, stromab lotrecht abfallenden Wehr von 0,1 m Kronenbreite geschehe. Da seine Angaben sich aber schlecht zum Vergleich eignen, seien die später von *R. E. Horton*[3]) veröffentlichten bezüglichen Daten benutzt. Es zeigt sich folgendes. *Bazin*[4]) gibt für eine Wehrhöhe von 0,5 m besagter Form für

1) Ebenda, S. 84, 87.
2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 44 (1900), S. 266.
3) U. S. Geolog. Survey, Paper 200 (1906), S. 88.
4) Expériences nouvelles, S. 84.

$$h = 0{,}1 \quad 0{,}15 \quad 0{,}2 \quad 0{,}25 \quad 0{,}3 \quad 0{,}35 \quad 0{,}4 \text{ m}$$
$$q:q_1 = 0{,}945 \quad 1{,}015 \quad 1{,}065 \quad 1{,}095 \quad 1{,}105 \quad 1{,}105 \quad 1{,}110$$

an. Da nun nach ihm für diese h

$$q_1:\sqrt{2g}h^{3/2} = 0{,}439 \quad 0{,}438 \quad 0{,}440 \quad 0{,}445 \quad 0{,}450 \quad 0{,}455 \quad 0{,}459$$

ist, folgt für das 0,5 m hohe Wehr

$$q:\sqrt{2g}h^{3/2} = 0{,}415 \quad 0{,}445 \quad 0{,}469 \quad 0{,}487 \quad 0{,}497 \quad 0{,}503 \quad 0{,}509.$$

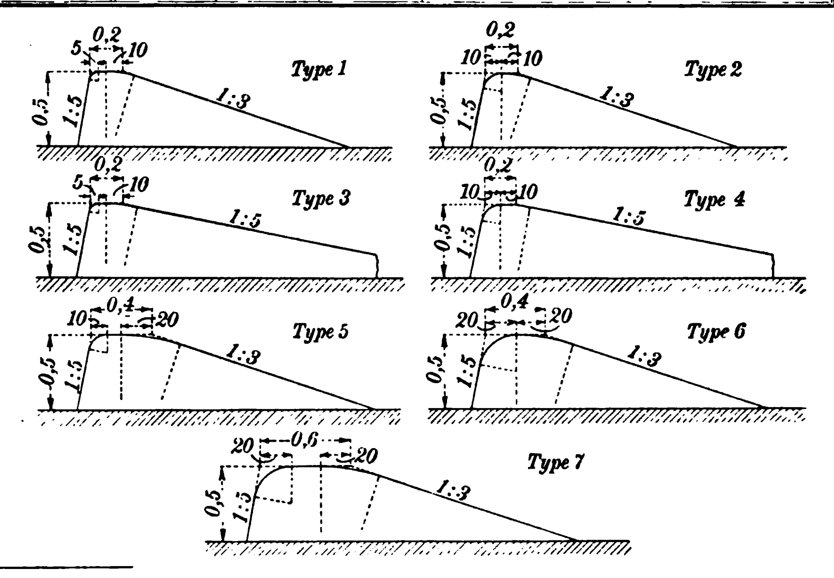
Nach *Rafters* an einem 1,5 m hohen ähnlichen Wehr der Cornell-Universität angestellten Beobachtungen zeigte sich für

$$h = 0{,}36 \quad 0{,}53 \quad 1{,}03 \quad 1{,}26 \quad 1{,}48 \quad 1{,}49 \quad 1{,}52 \text{ m}$$
$$q:\sqrt{2g}h^{3/2} = 0{,}469 \quad 0{,}479 \quad 0{,}460 \quad 0{,}466 \quad 0{,}491 \quad 0{,}457 \quad 0{,}447,$$

also in der Tat bei weiterer Zunahme von h schließlich eine Abnahme des Überfallkoeffizienten.

Bazin[1]) hat auch eine Anzahl 0,5 m hoher Wehre mit abgerundeter Krone und flachem Abfall untersucht und für $q:q_1$ folgende Werte gefunden:

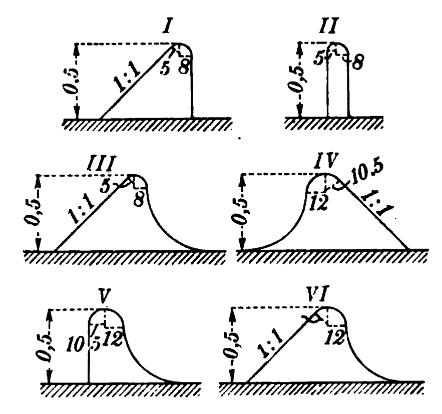
Überfall-höhe h	Type 1	2	5	6	7	3	4
0,1	0,91	0,96	0,89	0,91	0,87	0,89	0,91
0,2	0,99	1,01	0,93	0,95	0,89	0,94	0,96
0,3	1,04	1,06	0,96	0,99	0,91	0,98	0,99
0,4	1,06	1,08	0,99	1,01	0,93	1,00	1,01



1) Ebenda, S. 95, 96. Sonstige Messungen an Wehren mit abgerundeter Krone veröffentlicht *R. E. Horton,* U. S. Geolog. Survey, Paper 200 (1907), S. 94, 122, 130, 131.

Ferner ergaben Wehre mit rundem Rücken nach den Typen I bis VI nachstehende $q : q_1$.

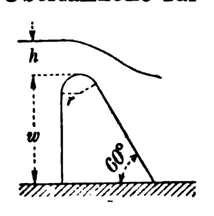
Überfall-höhe h	Type					
	I	II	III	IV	V	VI
0,1	1,13 *a*	1,15 *a*	1,14	1,06	1,04	1,06
0,15	1,21 *a*	1,24 *a*	1,21	1,13	1,13	1,13
0,2	1,27 *a*	1,31 *a*	1,25	1,18	1,18	1,18
0,25	1,28 *u*	1,32 *u*	1,29	1,23	1,23	1,23
0,3	1,27 *u*	1,29 *u*	1,28	1,26	1,26	1,25
0,35	1,24 *u*	1,24 *u*	1,24	1,29	1,25	1,24



(*a* bedeutet angeschmiegten, *u* unterfüllten Strahl, bei den Typen III bis VI ist die Strahlform nicht angegeben.)

Nach den beiden letzten Tabellen befördert eine Kronenabrundung den Abfluß und behindert ihn ein flacher Abfall. Wo beides vorkommt, ist daher $q:q_1$ bald größer, bald kleiner als 1. Eine Abrundung mit steilem Abfall erhöht die Menge gegenüber der scharfkantigen Wand bei nicht zu kleiner Überfallhöhe um $^1/_4$ bis fast $^1/_3$.

Während bei Wehren mit scharfer Kante (s. Gl. (158a)) das Verhältnis $q : h\sqrt{2gh}$ nicht nur vom Verhältnis $h : w$ der Überfallhöhe zur Wehrhöhe abhängt, gilt nach *Th. Rehbock*[1]), wenigstens für Schußwehre mit lotrechter Stauwand, Kreiszylinderkrone und steilem Abfall das Ähnlichkeitsgesetz, so daß Modelle gute Schlüsse auf das Verhalten großer Bauwerke ermöglichen. Dies bringt für die besagten Wehre bei Abfall unter 60° Neigung und einem Abrundungshalbmesser r nachstehende Beziehung zum Ausdruck:



$$(163\text{a}) \qquad q = \frac{2}{3}\left[0{,}845 - 0{,}0206\left(3{,}8 - \frac{h}{r}\right)^2 + \frac{h}{12w}\right] h\sqrt{2gh}$$

$$= \left[2{,}495 - 0{,}06084\left(3{,}8 - \frac{h}{r}\right)^2 + 0{,}2461\,\frac{h}{w}\right] h^{3/2},$$

welche für h aufwärts bis zu $h = 0{,}4w + 0{,}5r$ gilt. Kleine Änderungen in der Neigung der Stauwand und des Abfallbodens ändern den Überfallbeiwert nicht erheblich.

1) Verhandlungen d. Gesellschaft deutscher Naturforscher u. Ärzte 83 = 1911 (Leipzig 1912), S. 139.

Später gab *Th. Rehbock*[1]) für ganz ähnliche Wehre mit der Abfallneigung (Schlußneigung) 2 : 3 (also 56° 20′) die Formel

$$(163\,\text{b})\qquad q = \frac{2}{3}\left[0{,}312 + 0{,}09\,\frac{h}{w} + \sqrt{0{,}30 - 0{,}01\left(5 - \frac{h}{r}\right)^2}\right] h\sqrt{2gh}$$

$$= \left[0{,}921 + 0{,}266\,\frac{h}{w} + 1{,}617\sqrt{1 - \frac{5}{6}\left(1 - \frac{h}{5r}\right)^2}\right] h^{3/2},$$

welche gelte, solange man $\frac{h}{w} \leqq 1$ und zugleich $r \geqq 0{,}2$, sowie

$$\frac{h}{r} \leqq \left(6 - \frac{20r}{w + 3r}\right)$$

hat. Der Genannte untersuchte noch andere Formen und fand z. B. für Halbzylinder, die auf der Flußsohle ruhen,

$$(163\,\text{c})\qquad q = \frac{2}{3}\left[0{,}55 + 0{,}22\,\frac{h}{w}\right] h\sqrt{2gh} = \left[1{,}624 + 0{,}650\,\frac{h}{w}\right] h^{3/2}$$

mit der Geltung für $0{,}1 \leqq \frac{h}{w} \leqq 0{,}8$.

Bei einem Wehr mit Spitzbogenquerschnitt bestimmte *U. Masoni*[2]) im Mittel das $\frac{2}{3}\mu$ der Gl. (156) zu 0,463.

Die Stufen *gestaffelter Gerinne* mit verlandeten Schwellen kann man als Wehre auffassen, deren Kronen in gleicher Höhe mit der Sohle des Zulaufgerinnes stehen. Solange der Unterwasserspiegel tiefer oder nur wenig höher als die Wehrkrone liegt, bleibt nach Beobachtungen von *A. Armani*[3]) für sie die *Weisbach*sche Formel (156 a) anwendbar, wenn man für

$U =$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\frac{2}{3}\mu =$	0,300	0,330	0,352	0,370	0,385	0,398	0,412	0,417	0,426	0,435	0,440
$U =$	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
$\frac{2}{3}\mu =$	0,447	0,452	0,458	0,461	0,464	0,469	0,470	0,475	0,479	0,484	0,486

nimmt. Das ungleichmäßige Wachstum dieser μ spricht dafür, daß *Armani* keinen künstlichen Ausgleich seiner Ergebnisse vornahm. Bei 0,3 m hohen Schwellen finde erst für $h > 0{,}38$ m eine beachtenswerte Beeinflussung des freien Überfalles durch das Unterwasser statt. — Bei nicht verlandeten Schwellen seien statt obiger $\frac{2}{3}\mu$ die folgenden von h abhängigen zu verwenden.

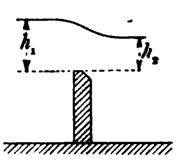
$h =$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5 m
$\frac{2}{3}\mu =$	0,347	0,345	0,343	0,342	0,342	0,341	0,341	0,341	0,340.

1) Handb. d. Ingenieurwissensch. 3, Wasserbau, 2. Bd., 1. Abt., 4. Aufl., Leipzig 1912, S. 53.

2) Bolletino del Collegio degl' Ingegneri ed Architetti in Napoli 12 (1894), Nr. 5, 6.

3) Z. d. öst. I. u. A. V. 46 (1894), S. 589.

85. Unvollkommener Überfall. Durch Hebung des Unterwasserspiegels über dem Wehrrücken macht man das Wehr zu einem Grundwehr und den Überfall *unvollkommen* (deversoir noyé). Zum Zwecke der Berechnung des Ausflusses pro Längeneinheit q denkt man sich vielfach nach dem Beispiel *L. G. du Buats*[1]) den unvollkommenen Überfall aus einem vollkommenen Überfall zwischen Ober- und Unterwasserspiegel und einem Abfluß unter Wasser zwischen letzterem und dem Wehrrücken zusammengesetzt. Für die obere Schicht gilt dann, wenn man die Ankunftsgeschwindigkeit U berücksichtigt, entsprechend (156a)



$$q_{\mathrm{I}} = \frac{2}{3}\mu_{\mathrm{I}}\sqrt{2g}\left[\left(h_1 - h_2 + \frac{U^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{U^2}{2g}\right)^{3/2}\right],$$

für die untere Schicht entsprechend (154a), wenn man auch hier die Ankunftsgeschwindigkeit in Rücksicht zieht,

$$q_{\mathrm{II}} = \mu_{\mathrm{II}}\sqrt{2g}\,h_2\left(h_1 - h_2 + \frac{U^2}{2g}\right),$$

worin h_1 und h_2 die Spiegelhöhen des Ober- und des Unterwassers über der Wehrkante und μ_{I} wie μ_{II} Ausflußkoeffizienten bedeuten, die < 1 sind. Durch Addition von q_{I} und q_{II} erhält man

$$(164) \qquad q = \sqrt{2g}\left\{\frac{2}{3}\mu_{\mathrm{I}}\left[\left(h_1 - h_2 + \frac{U^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{U^2}{2g}\right)^{3/2}\right] + \mu_{\mathrm{II}}h_2\left(h_1 - h_2 + \frac{U^2}{2g}\right)^{1/2}\right\}.$$

Gl. (164) zeigt den Mangel für $h_1 = h_2$ in $\mu_{\mathrm{II}}h_2 U$ statt bei einer Wehrhöhe w in $(h_2 + w)U$ überzugehen. Sie kann daher nicht befriedigen, abgesehen davon, daß noch kein Experimentator ihre μ_{I} und μ_{II} durch Versuchsreihen ermittelte. Es ist nur (und zwar zu hohe) Schätzung, wenn z. B. *G. Tolkmitt*[2]) bei guter Abrundung $\mu_{\mathrm{I}} = 0{,}83$, $\mu_{\mathrm{II}} = 0{,}67$ haben will.

A. Salles[3]), der die Ergebnisse verschiedener Formeln mit der an einem Grundwehr (bei $h_1 = 6$ und $h_2 = 5$ m) erhobenen Überfallmenge verglich, fand die Formel von *Mary*

$$(165) \qquad q = 0{,}8h_2\sqrt{2g\left(h_1 - h_2 + \frac{U^2}{2g}\right)},$$

1) Principes d'hydraulique, nouv. éd. Paris 1816, 1, S. 203.

2) Handb. d. Ingenieurwissenschaften 3, Wasserbau, 1. Abt., 1. Hälfte, 3. Aufl., Leipzig 1892, S. 224; *Tolman* setzte bei einem Floßdurchlaß $\mu_{\mathrm{I}} = \mu_{\mathrm{II}}$ und fand diese $= 0{,}64$, siehe unten Gl. (177b).

3) *A. Salles* nennt Ann. d. ponts et chauss. (6) 8 (1884²), S. 305 die 1860 lithographierten Vorträge *Marys* an der École des ponts et chaussées.

welche einfach eine Anwendung des *Bernoulli*schen Prinzips unter Beifügung eines Koeffizienten bildet, am zutreffendsten. Sie liefert aber für den freien Überfall ($h_2 = 0$) aus einem Teich ($U = 0$) die Menge Null. Auch fand *G. T. Nelles*[1]) eine nicht unähnliche Formel von *Chanoine* und *de Lagrené* unbrauchbar, als er sie an einer Versuchsreihe von *Bazin* und an Beobachtungen an der Seine prüfte. *P. Richelmy*[2]) ermittelte für scharfkantige Grundwehre

$$q = \sqrt{2g}\left\{0{,}601(h_1 - h_2)\sqrt{\frac{4}{9}(h_1 - h_2) + \frac{u_{max}^2}{2g}} + 0{,}629\, h_2 \sqrt{h_1 - h_2 + \frac{u_{max}^2}{2g}}\right\},$$

worin $u_{max} = 1{,}25\, U$ sei.

Gestützt auf Versuche, bei welchen h_1 von 0,1 bis 0,3 m und das Verhältnis $h_2 : h_1$ bis gegen 1 anstieg, welche Versuche teils von *J. B. Francis* aus dem Jahre 1848, teils von ihnen selbst herrührten, setzten *A. Fteley* und *F. P. Stearns*[3])

$$q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)\sqrt{h_1 - h_2}, \tag{166}$$

worin für

$h_2 : h_1$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,65	0,8	0,9	1,0
$\frac{2}{3}\mu$	0,421	0,409	0,400	0,388	0,385	0,389	0,398	0,419
$\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}$	1,864	1,814	1,774	1,719	1,705	1,724	1,761	1,855

zu nehmen ist.

In Ostindien versuchte Captain *Love*[4]) eine Gleichung aus Beobachtungen im Godavaridelta abzuleiten, die auf Metermaß umgerechnet

$$q = \frac{1{,}94 + 2{,}52\, h_2 - 0{,}10\, h_1}{1 + 0{,}82\, h_2}(h_1 - h_2)^{3/2}$$

lautet. Die dortigen Ingenieure wenden aber eine Formel an, die aus (164) hervorgeht, wenn man ein einheitliches $\mu = \mu_{\mathrm{I}} = \mu_{\mathrm{II}}$ benutzt, das unwesentliche $\left(\frac{U^2}{2g}\right)^{3/2}$ fortläßt und die übrigen Geschwindigkeitshöhen mit Koeffizienten multipliziert. Sie lautet für metrisches Maß

$$q = \mu\sqrt{2g}\left[h_2\sqrt{h_1 - h_2 + 0{,}033\, U^2} + \frac{2}{3}(h_1 - h_2)\sqrt{h_1 - h_2 + 0{,}115\, U^2}\right], \tag{167}$$

---

1) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 44 (1900), S. 380.

2) Torino, Memorie (2) 14 (1854), S. 309.

3) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 12 (1883), S. 106. *C. Herschel* berechnete auf Grund derselben Messungen und späterer von *Francis* (ebenda 13 (1884), S. 303) eine Zahlenreihe, die für jedes Verhältnis $h_1 : h_2$ des Grundwehres das h des Überfallwehres von gleichem q angibt; ebenda 14 (1885), S. 194.

4) *J. Mullins*, Irrigation-Manual, London u. New-York 1890, S. 11.

worin U die Anfangsgeschwindigkeit. *R. H. Rhind* hat Aufnahmen an Wehren indischer Ströme veröffentlicht[1]) und *G. T. Nelles*[2]) neben (167) an ihnen die einfachen, aber bei unvollkommenen Überfällen kaum begründbaren Ausdrücke

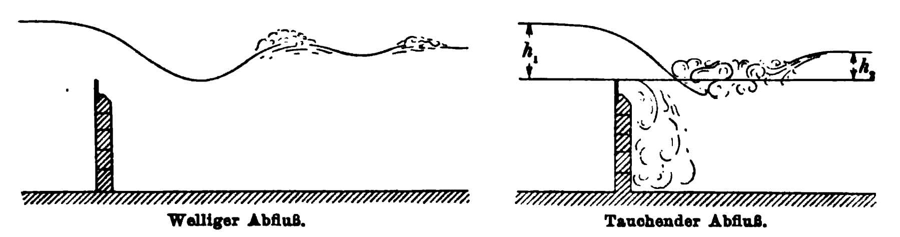
$$q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,h^{3/2}, \tag{156}$$

$$q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\left(h + \frac{U^2}{2g}\right)^{3/2} \tag{156b}$$

geprüft, und merkwürdigerweise für (156) und (156b) weniger sprunghafte Werte von μ als für (167) erhalten. Übrigens wurden die Abflußmengen im Strome nur nach *Humphreys* und *Abbots* Gl. (39), also wohl zu groß, bestimmt und war es nicht immer möglich, das Hauptwehr von den Nebenöffnungen bei der Rechnung zu trennen. Hier die Zahlen:

Name des Wehrs	Spiegelhöhen über Hauptwehr h_1 m	h_2 m	Verhältnis $\frac{h_1}{h_2}$	Mittlere Oberflächengeschwindigkeiten m sec⁻¹	Abflußkoeffizient μ nach Formel (167)	(156)	(156b)	Bauweise
Burrah	3,46	2,42	1,43	—	0,98	0,80	0,77	Dämme mit gemauertem Kern; nur in Byturnee rechteckiger Querschnitt ohne beigefügte Schüttungen.
Byturnee....	3,304	2,45	1,35	2,59	0,95	0,75	0,74	
Mahanuddy .	3,49	2,88	1,21	2,36	0,60	0,41	0,40	
Beropa	2,53	2,16	1,17	2,03	0,60	0,38	0,37	
Brahmini ...	3,21	3,06	1,05	2,13	0,88	0,39	0,40?	
Pattia	5,86	5,59	1,05	2,39	0,88	0,37	0,36	
Kajooree....	6,13	5,97	1,03	3,54	0,89	0,41	0,39	

Bazin[3]) brachte auch in die Betrachtung der unvollkommenen Überfälle Methode durch die Sonderung der Abflußformen. Bei hohem



Welliger Abfluß. Tauchender Abfluß.

Oberwasser kann die Wucht des Sturzschwalles das Unterwasser zurücktreiben, so daß ein Strahl mit freiem Fuß entsteht, dessen Abfluß q vom

1) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 85 (1886), S. 307.

2) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 44 (1900), S. 382.

3) Expériences nouvelles, S. 99f. Festschrift, S. 28.

Unterwasser überhaupt nicht abhängt. Dies tritt seltener als die Bildung eines Tauchstrahles ein. Wird bei einem solchen der Zufluß erhöht oder das Unterwasser gestaut, bis der Spiegelunterschied $h_1 - h_2$ auf $^1/_5$ bis $^1/_6 w$ (hier bedeutet w die Wehrhöhe) sinkt, so steigt der Unterspiegel plötzlich und entsteht der *wellige* Abfluß (nappe ondulée). Läßt man andererseits bei welligem Abfluß den Zufluß ungeändert und senkt den Unterspiegel, so findet die Umwandlung in den Tauchstrahl bei $h_1 - h_2 = 0{,}3\,w$ statt. Zwischen den Grenzlagen kann also der Abfluß sowohl wellig als tauchend erfolgen. Das q des Tauchstrahles läßt sich nach *Bazin* genügend genau aus

$$(168) \qquad q : q_1 = 1{,}05\left(1 + \frac{1}{5}\frac{h_2}{w}\right)\sqrt[3]{\frac{h_1 - h_2}{h_1}}$$

berechnen. Das Verhältnis $q : q_1$ nimmt für verschiedene Verhältnisse der Fallhöhe $h_1 - h_2$ und der Unterspiegelhöhe h_2 zur Wehrhöhe w nachstehende Werte an:

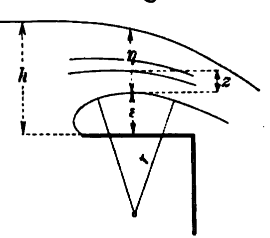
$\frac{h_1 - h_2}{w}$	$h_2 : w$							
	0	0,1	0,2	0,4	0,5	0,7	1	1,5
0,05	1,05	0,74	0,64	0,54	0,52	0,48	0,45	0,43
0,1	1,05	0,85	0,76	0,66	0,64	0,60	0,57	0,54
0,2	1,05	0,94	0,87	0,79	0,76	0,72	0,69	0,67
0,3	1,05	0,97	0,92	0,85	0,83	0,80	0,77	0,75
0,4	1,05	0,99	0,95	0,90	0,88	0,85	0,83	0,81
0,5	1,05	1,01	0,98	0,93	0,92	0,89	0,87	0,86
0,7	1,05	1,02	1,00	0,98	0,96	0,95	0,94	0,92
Freifuß	1,06	1,04	1,02	0,99	0,98	0,96	0,94	0,92

Über $(h_1 - h_2) = 0{,}7\,w$ geht diese Tabelle nicht hinaus, weil bei weiterem Wachstum der Fallhöhe der Strahl mit freiem Fuß entsteht. *Bazin* hat auch mit Dammbalkenwehren einige Versuche vorgenommen, aus denen hervorging, daß bei ihnen der Unterwasserspiegel merklich höher als die Wehrkrone stehen kann, ohne daß dies den Abfluß behindert. — Das Verhalten von Wehren mit dreieckigem, stromauf lotrechtem Querschnitt liegt zwischen dem der Dammbalkenwehre und dem der dünnen Wände mit scharfer Kante.

Stets hebt sich bei unvollkommenen Überfällen der Oberwasserspiegel bei Zunahme der Wassermenge, doch kann es geschehen, daß der Unterwasserspiegel stärker als der Oberwasserspiegel steigt, daß also der Stau, nämlich der Höhenunterschied $(h_1 - h_2)$ der Spiegel, bei wachsender Wasserführung sich vermindert.

86. Theoretische Bestimmung der Überfallmenge. Bei einem Wehr, dessen Krone nach innen vorspringt, kann — nicht unähnlich wie bei dem *Borda*schen Ansatzrohr — die Ausflußmenge mit Hilfe des

Impulssatzes berechnet werden. Es bezeichne ε die Steighöhe an der Strahluntergrenze, z die vom Scheitel der letzteren aus nach oben gemessene Ordinate, η die Strahldicke daselbst, r den Krümmungshalbmesser der Strahluntergrenze daselbst. Man kann nun annehmen[1]), daß sich über dem genannten Scheitel das Wasser nahezu in konzentrischen Kreisbögen von den Halbmessern $r+z$ bewegt, so daß auf jedes Teilchen in lotrechter Richtung die Schwere nach unten, die Fliehkraft nach oben wirkt und bei einem Eigengewicht γ des Wassers und einer Geschwindigkeit u des Teilchens der Druck p sich in lotrechter Richtung nach dem Gesetze



$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma + \frac{\gamma u^2}{g(r+z)} \tag{169}$$

verändert. Andererseits erfordert das *Bernoulli*sche Theorem, daß

$$\frac{p}{\gamma} = h - \varepsilon - z - \frac{u^2}{2g} \tag{169a}$$

sei. Die Differentiation von (169a) ergibt

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma - \gamma \frac{u}{g} \frac{du}{dz}$$

und die Vereinigung mit (169)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-u}{r+z}, \quad \text{also} \quad \frac{du}{u} = -\frac{dz}{r+z},$$

woraus durch Integration

$$\log \text{nat}\, u + \log \text{nat}\,(r+z) = \text{konst.} \quad \text{oder} \quad u(r+z) = \text{konst.}$$

hervorgeht. Herrscht im Scheitel der Untergrenze die Geschwindigkeit u_0 und im lotrecht über dem Scheitel befindlichen Punkt der Obergrenze die Geschwindigkeit u_1, so ist hiernach

$$u_0 r_0 = u(r_0 + z) = u_1(r_0 + \eta),$$

woraus

$$u = \frac{u_0 r_0}{r_0 + z} \tag{169b}$$

hervorgeht. Der Erguß der Längeneinheit beträgt daher

$$q = \int_0^\eta u\, dz = u_0 r_0 \int_0^\eta \frac{dz}{r_0 + z} = u_0 r_0 \log \text{nat} \frac{r_0 + \eta}{r_0}. \tag{169c}$$

1) *J. Boussinesq*, Mémoire de l'Acad. des sciences 50 (1907), S. 1—118, 121—134.

Setzt man hier

$$k = \frac{r_0}{r_0 + \eta} = \frac{u_1}{u_0}$$

oder, wenn man u_0 und u_1 nach (169a) ausdrückt und bedenkt, daß für sie $p = 0$ ist,

$$k = \sqrt{\frac{h - \varepsilon - \eta}{h - \varepsilon}},$$

so hat man

$$(169\text{d}) \qquad \eta = (h - \varepsilon)(1 - k^2), \quad r_0 = \frac{k\eta}{1 - k} = (h - \varepsilon)k(1 + k)$$

und statt (169c) auch, da $u_0 = \sqrt{2g(h - \varepsilon)}$ ist,

$$(169\text{e}) \qquad q = \sqrt{2g(h - \varepsilon)^3}\, k(1 + k) \log \text{nat} \frac{1}{k}.$$

Nun beträgt die Bewegungsgröße des Ergusses

$$\frac{\gamma}{g} \int_0^\eta u^2 \, dz$$

und kommt die Wassermenge aus dem Zustande der Ruhe durch einen statischen Druck in Bewegung, der die Größe

$$\frac{\gamma h^2}{2}$$

hat und dem im eingeschnürten Strahl der Gegendruck

$$-\int_0^\eta p \, dz$$

entgegenwirkt. Nach dem Impulssatz muß daher

$$(169\text{f}) \qquad \int_0^\eta \left(\frac{u^2}{g} + \frac{p}{\gamma}\right) dz = \frac{1}{2} h^2$$

sein. Das Integral zeigt sich, wenn man $\frac{p}{\gamma}$ nach (169a) und später u durch u_0 nach (169b) ausdrückt, gleich

$$\int_0^\eta \left(\frac{u^2}{g} + h - \varepsilon - z - \frac{u^2}{2g}\right) dz = \int_0^\eta \left(\frac{u_0^2 r_0^2}{2g(r_0 + z)^2} + h - \varepsilon - z\right) dz$$

$$= \left[-\frac{u_0^2 r_0^2}{2g(r_0 + z)} + (h - \varepsilon)z - \frac{z^2}{2}\right]_0^\eta = \frac{\eta r_0}{r_0 + \eta} \cdot \frac{u_0^2}{2g} + (h - \varepsilon)\eta - \frac{\eta^2}{2}$$

$$= \frac{\eta r_0}{r_0 + \eta}(h - \varepsilon) + \eta(h - \varepsilon) - \frac{\eta^2}{2}$$

oder, wenn man η und r_0 durch k ersetzt,

$$(1-k^2)k(h-\varepsilon)^2+(1-k^2)(h-\varepsilon)^2-(1-k^2)^2\frac{(h-\varepsilon)^2}{2}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+k-k^3-\frac{k^4}{2}\right)(h-\varepsilon)^2=\frac{1}{2}(1+k)^3(1-k)(h-\varepsilon)^2.$$

Gl. (169f) lautet daher auch

$$\frac{h}{h-\varepsilon}=\sqrt{(1+k)^3(1-k)}\,. \tag{169g}$$

Es ist anzunehmen, daß für den in Betracht stehenden Fall ε in der Nähe seines Maximalwertes $\varepsilon_{\max}$ liegt, also von $\varepsilon_{\max}$ nicht sehr verschieden ist, mag auch k stärker vom k des maximalen ε abweichen. Sein Maximum hat ε für

$$\frac{h\,d\varepsilon}{(h-\varepsilon)^2}=\frac{(1+k)^2(1-2k)}{\sqrt{(1+k)^3(1-k)}}\,dk=0,$$

demnach für $k=\frac{1}{2}$ oder gemäß (169g) für

$$\frac{h}{h-\varepsilon_{\max}}=\sqrt{\frac{27}{16}}\quad\text{oder}\quad\varepsilon_{\max}=0{,}2302\,h. \tag{169h}$$

Im betrachteten Fall schloß die Wehrwand einen Winkel $\frac{\pi}{2}$ mit der Lotrechten ein. *Boussinesq* hat nun die gewagte, aber anscheinend zutreffende Annahme gemacht, daß für einen anderen Winkel i

$$\varepsilon:\varepsilon_{\max}=\left(\frac{\pi}{2}+i\right):\pi$$

gelte oder daß

$$\varepsilon=\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{\pi}\right)\varepsilon_{\max}=0{,}1151\left(1+\frac{2i}{\pi}\right)h \tag{170}$$

sei. Gleichung (169e) bleibt bestehen und wird zufolge (170) zu

$$q=\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^{3/2}\sqrt{2gh^3}\,k(1+k)\log\text{nat}\frac{1}{k}$$
$$=\left[1-0{,}1151\left(1+\frac{2i}{\pi}\right)\right]^{3/2}\sqrt{2gh^3}\,k(1+k)\log\text{nat}\frac{1}{k}$$
$$=\text{ungefähr }0{,}8324\left[1-0{,}3902\frac{i}{\pi}\right]\sqrt{2gh^3}\,k(1+k)\log\text{nat}\frac{1}{k}\cdot$$

Man kann sich nun den Raum unter dem Strahl fest ausgefüllt denken, dann nimmt nach dem *Belanger*schen Prinzip (s. S. 298) die Strahloberfläche eine solche Form an, daß q ein Maximum wird; das heißt k muß bei gegebenem ε den Erguß q zum Maximum machen. Es muß also

$$\frac{d\left[k(1+k)\log\text{nat}\frac{1}{k}\right]}{dk}=(1+2k)\log\text{nat}\frac{1}{k}-(1+k)=0$$

sein, was, wie man sich überzeugen kann, für $k=0{,}46854$ (welcher

Wert vom früheren $k = 0,5$ nicht weit entfernt ist) zutrifft. Hiermit wird zugleich

$$k(1+k)\log\mathrm{nat}\frac{1}{k} = 0,5216$$

und angenähert

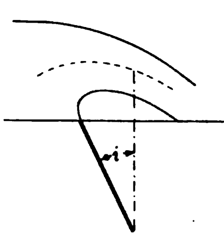
$$q = \left(0,4342 - 0,1694\frac{i}{\pi}\right)\sqrt{2gh^3}. \tag{170a}$$

Eine längere Betrachtung *Boussinesqs*[1]) führt übrigens auf den noch genaueren Ausdruck

$$k = 0,4694 - 0,0224\frac{i}{\pi}. \tag{170b}$$

Wird für lotrechte dünne Wand, also $i = 0$, der Erguß q_1 genannt, so ist bei einer

Neigung i gegen die Lotr.	= 45°	33°	18	—18	—33	—45
$q:q_1$ nach Gl. (170a)	= 0,902	0,927	0,960	1,040	0,078	1,098
$q:q_1$ nach *Basins* Versuchen	= 0,926	0,935	0,959	1,046	1,086	1,115



Die Übereinstimmung von Theorie und Erfahrung ist eine so enge, daß in ihr eine Bestätigung aller Annahmen *Boussinesqs* liegt. Auch für unterfüllte Strahlen hat *Boussinesq*[2]) ähnliche Entwickelungen vorgenommen, auf Grund welcher *N. Enache de la Olt*[3]) Berechnungen anstellte, die jedoch zu Werten führten, welche die oben mitgeteilten *Basins* ziemlich gleichmäßig um etwa 2 Prozent übertreffen.

Ein Verfahren, welches gestattet, wenn die Strahloberfläche gegeben ist, den zugehörigen Wehrrücken zu finden, gibt *Ph. Forchheimer*[4]) an. Für eine gegebene Außenfläche des Strahles ist bei Vernachlässigung der Reibung die Geschwindigkeit, also ein zweiter unendlich naher Faden bestimmt und hiermit die ganze Schar der Strömungslinien, welche eine sogenannte isothermische Kurvenschar bilden. Eine jede Strömungslinie kann zum Wehrrücken gemacht und die Wassermasse unter ihr durch ein Wehr ersetzt werden. Der zeichnerische Vorgang besteht darin, daß man die Tiefen z der oberen Strahlgrenze unter einer Wagrechten abgreift, welche um die Geschwindigheitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ der Ankunftsgeschwindigkeit U höher als der Oberwasserspiegel liegt, und daß man eine oberste Reihe Kurvenquadrate bildet, deren Seitenlängen s man zu $\sqrt{z}$

1) Mémoire de l'Acad. des sciences 50 (1907), S. 35—37.

2) Ebenda S. 47; Paris, C. R. 145 (1907), S. 10.

3) Thèse: Contribution à la théorie de l'écoulement sur les déversoirs, Paris 1908.

4) Enzyklopädie der math. Wissensch. IV 2 Heft 3 = 4, S. 414.

verkehrt proportional macht. Da im betreffenden Quadrat die Geschwindigkeit $\sqrt{2gz}$ herrscht, fließt durch jedes Quadrat der obersten Schicht über die quer zum Bild gemessene Längeneinheit dieselbe Menge

$$s\sqrt{2gz}\,\mathrm{m^3\,sec^{-1}}.$$

Schließt man an diese Schicht eine zweite Quadratschicht und so weiter an, derart, daß Scharen sich rechtwinklig schneidender Kurven entstehen, so beträgt, wenn die Reibung vernachlässigt wird, nach dem Strömungsgesetz vollkommener Flüssigkeiten (s. oben S. 16) auch in jedem späteren Quadrat der Durchfluß $s\sqrt{2gz}$. Bei n Schichten beträgt daher der gesamte Erguß

$$q = ns\sqrt{2gz},$$

wobei s und z für ein beliebiges an der Oberfläche gelegenes Quadrat zu nehmen sind.

H. Blasius[1]) behandelt dieselbe Aufgabe durch konforme Abbildungen, wobei er die Abbildungen

$$X = \log\operatorname{nat}\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta} + 2\vartheta,$$

$$\vartheta = \sqrt{1+\zeta^2},$$

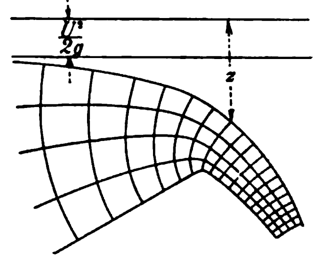
$$Z = \frac{2}{\zeta} + i\zeta^2$$

aufeinander folgen läßt. Hier bedeuten X, ϑ und Z komplexe Größen, die in bekannter Weise geometrisch dargestellt werden, und ist

$$Z = a^{-2/3}(x+iy).$$

Er erhält schließlich die Strömungslinien eines Überfallstrahles, dessen Oberfläche der Gleichung

$$x = \frac{2a}{\sqrt{y}} \tag{171}$$



gehorcht. Die unterste Strömungslinie bildet ein Eck von 120°, an welchem sich der Strahl loslösen würde, wenn man sie als Wehrrücken wählen wollte. Es ist daher nicht sie, sondern eine höhere Strömungslinie als Wehrrücken zu nehmen. Würde keine Ablösung erfolgen, so betrüge die Durchflußmenge bis zur untersten Strömungslinie

$$q = \frac{\pi}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\sqrt{2g}\,h^{3/2} = 0{,}57\sqrt{2g}\,h^{3/2} = 2{,}525\,h^{3/2}. \tag{171a}$$

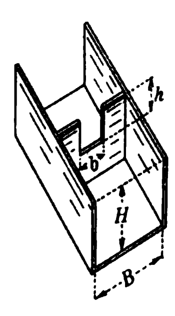
Das ist demnach das unerreichbare Maximum des Ergusses, welches bei der gewählten Strahlform der gedrückte Strahl liefern könnte.

1) Zeitsch. Math. Phys. 58 (1910), S. 96; 59 (1911), S. 43.

87. Überfälle mit Seiteneinzwängung. Wenn der Überfall nicht über ein Wehr, das mit wagrechter Krone durch ein Zulaufgerinne durchläuft, sondern nur über einen rechteckigen Wandausschnitt stattfindet, erleidet der Strahl eine seitliche Einschnürung, wodurch er bei gleicher Überfallhöhe weniger Wasser per Längeneinheit führt.

J. Weisbach[1]) wollte in einem solchen Falle einerseits der Ankunftsgeschwindigkeit, andererseits der Einschnürung durch einen Faktor

$$1 + 1{,}718\left(\frac{bh}{BH}\right)^4$$



in der Formel für den Ausfluß Q Rechnung tragen. Hierin bedeutet b die Ausschnittbreite, B die Gerinnebreite, h die Höhe des Oberwasserspiegels über der Wehrkrone, H dessen Höhe über der Sohle des Zulaufgerinnes. *Weisbach* hatte aber nur bei *einem* Breitenverhältnis beobachtet und sein Ansatz konnte nicht stichhalten. *N. Braschmann*[2]) trachtete das Prinzip der kleinsten Wirkung anzuwenden und entwickelte die Formel

$$(172)\qquad Q = \left(0{,}3838 + 0{,}0386\,\frac{b}{B} + \frac{0{,}00053}{h}\right) bh\sqrt{2gh},$$

die ihm mit den Versuchen von *Castel* und *Lesbros* zu stimmen schien.

F. Frese[3]) fand auf Grund eigener Versuche und solcher von *Castel*[4]), *Poncelet* und *Lesbros*[5]), *Lesbros*[6]), *Francis*[7]), *Fteley* und *Stearns*[8])

$$(173)\qquad Q = \left\{0{,}5755 + \frac{0{,}017}{h + 0{,}18} - \frac{0{,}075}{b + 1{,}2}\right\}$$
$$\cdot\left\{1 + \left[0{,}25\,\frac{b^2}{B^2} + 0{,}25 + \frac{0{,}0375}{\frac{h^2}{H^2} + 0{,}02}\right]\frac{h^2}{H^2}\right\}\frac{2}{3}\,bh\sqrt{2gh},$$

wobei die Gl. (173) ihre Gültigkeit verliert, wenn $h < 0{,}1$ oder für $h = 0{,}2$ bzw. $0{,}6$ m die Breite $b < 0{,}1$ bzw. $0{,}5$ m ist. Auch muß für

$b:B =$ 0,9	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1
$h:H <$ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	1,0

1) Lehrbuch 1, Braunschw. 1845, S. 419.

2) *Rühlmann* zitiert S. 306: *Braschmann,* Sur l'application du principe de moindre action à la détermination du volume ..., Moskau 1862. Auszug: Civilingen. (2) 9 (1863), Sp. 449.

3) Z. d. V. deutsch. Ing. 34 (1890), S. 1339, 1365.

4) *J. F. d'Aubuisson,* Traité d'hydraulique, 2. éd., S. 81, 82.

5) Paris, Mém. prés. par div. sav. 3 (1832), S. 486.

6) Ebenda 13 (1852), S. 79 u. f., 410, 422.

7) Lowell hydraulic experiments, 4. Aufl., S. 122.

8) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 12 (1883), S. 110.

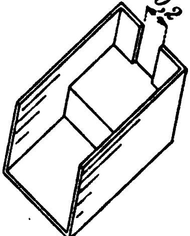
bleiben. Bald nach *Frese* nahm *C. Canovetti*[1]) Messungen vor, deren Ergebnisse innerhalb des gekennzeichneten Geltungsgebietes mit Gl. (173) leidlich stimmen, während für $b = 0,5$, $B = 0,75$, $h = 0,55$ bzw. 0,6 und $H = 0,95$ bzw. 1 m, also $bh = 0,38$ bzw. $0,4\,BH$ die Messung das 1,15fache bzw. 1,25fache der Gleichung (173) ergab. Spätere Versuche, die sich bei $B = 1,38$ m von $b = 0,2$ bis 1 m und von $h = 0,05$ bis 0,2 m bewegten, stellte *K. Kinzer*[2]) an. Die gemessenen Mengen übertrafen durchweg die Q der Gl. (173), aber für $h > 0,1$ nur um 1,5 bis 2 Prozent. *Kinzer* stellte auch die eigene Formel

$$(173\text{a})\quad Q = \left(0,4342 + 0,009\frac{b}{B} - 0,0777\frac{h}{H}\right) b\sqrt{2g}\left(h + \frac{U^2}{2g}\right)^{3/2}$$

auf, die mit seinen Messungen gut stimmt und von ihm mit anderen Messungen nicht verglichen wurde. Für scharfkantige Wehre mit vollkommenem Überfall und seitlicher Einschnürung ist also heute *Freses* Formel als die maßgebende zu betrachten, allerdings nur innerhalb des genannten Geltungsgebietes. In (173) rührt der zweite Klammerausdruck von der Ankunftsgeschwindigkeit her, so daß gegenüber (159) das Verhältnis

$$\frac{2}{3}\left\{0,5755 + \frac{0,017}{h + 0,18} - \frac{0,075}{b + 1,2}\right\} : \left\{0,410 + \frac{0,0014}{h}\right\}$$
$$= \text{im Mittel etwa } 0,93$$

als Wirkung der seitlichen Strahleinschnürung angesehen werden kann. Erwähnt sei hierzu, daß als *J. A. Lesbros*[3]) die Zusammenziehung des Strahles durch Einbauten beschränkte, er fand, daß bei gegebener Überfallbreite die Hebung einer eingebauten Sohle eine Zu- oder Abnahme vom Q bewirkte, je nachdem die lotrechten Leitwände weit von der Öffnung abstanden oder nahe an letztere gerückt worden waren. Daher fand *Lesbros* insbesondere, daß bei beidseitiger Führung oder auch bei Führung an der Sohle mehr Wasser überfällt, als bei gleichzeitiger Einfassung an allen drei Grenzen.

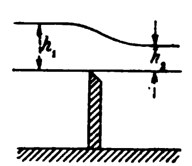


1) Annali della societá degli ing. e degli architetti ital. 6 (1891), fasc. 2, 6.

2) Z d. öst. I. u. A.V. 49 (1897), S. 547. *Kinzers* Ansicht, daß seine Formel auch für seitlich nicht eingeschnürte Strahlen gelte, ist kaum begründet. Er spricht sich ebenda über *Bazins* Formel abfällig aus, welche er aber mißversteht. *Hermanek* hat sein willkürliches Verfahren auch auf Überfälle angewendet, Wien. Ber. 112 (1903), S. 901f.

3) Paris, Mém. prés. par div. sav. 13 (1852), S. 222.

Für *unvollkommene* scharfkantige Überfälle *mit seitlicher Strahleinschnürung* setzte *P. Richelmy*[1]) auf Grund eigener Versuche bei gleicher Bezeichnungsweise wie oben S. 304 für $h_1 : h_2 = 1{,}2$ bis $4{,}5$, ferner $b : (h_1 - h_2) = 2$ bis 7 und geringe Ankunftsgeschwindigkeit



$$(174)\qquad Q = b\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\,\{0{,}3787\,(h_1 - h_2) + 0{,}6172\,h_2\}.$$

J. Lesbros[2]) befaßte sich mit dem Einlauf in eine an den rechteckigen (nur 24 cm breiten) Wandausschnitt eines Behälters anstoßende Rinne. Weil in ihr der Spiegel sich zunächst senkte und erst in einiger Entfernung vom Wehr wieder hob, erachtete *Lesbros* nicht die Höhe des Unterwasserspiegels, wo er wieder eben ist, sondern die Höhe h_{II} des Wellentales über der Rinnensohle als maßgebend für den Erguß Q. Dementsprechend lautet seine Formel

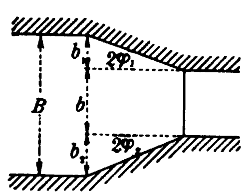
$$(173)\qquad Q = \mu_{II}\, b\, h_I \sqrt{2g(h_I - h_{II})},$$

wobei für

$(h_I - h_{II}) : h_I =$	0,004	0,006	0,008	0,01	0,02	0,03	0,05	0,1
$\mu_{II} =$	0,430	0,556	0,605	0,596	0,570	0,546	0,522	0,516
$(h_I - h_{II}) : h_{II} =$	0,2	0,3	0,4	0,5				
$\mu_{II} =$	0,507	0,497	0,487	0,474				

sei.

Die bis heute vorgenommenen Experimentaluntersuchungen behandeln die beiden Grenzfälle einer beiderseitigen Führung des Wassers und eines Wandausschnittes. Sehr häufig will man aber wissen, wie sich ein Wehr verhält, das stromauf mit Flügeln versehen ist. Dem lebhaften Bedürfnis nach Formeln für solche Wehre kam *G. v. Wex*[3]) nach, dessen Ausführungen freilich zum Teil unhaltbar sind[4]). Die Art, wie er schräge Flügel berücksichtigt, kann man aber in Ermangelung eines anderen Verfahrens beibehalten. Er nimmt nämlich an, daß, wenn der Flügel den Winkel $2\varphi_1$ mit der Stromrichtung einschließt, die Geschwindigkeitshöhe $\frac{U^2}{2g}$ des ankommenden Wassers mit $\cos^2\varphi_1$ multipliziert die Über-



1) Torino, Memorie (2) 14 (1854), S. 290, 299.

2) Paris, Mém. prés. par div. sav. 13 (1852), S. 251, 437, 490. Siehe oben die Bemerkung von *Salles* zu Gl. (165).

3) *Wex,* Hydromechanik, Leipzig 1888.

4) Siehe *F. Frese,* Z. d. V. deutsch. Ing. 32 (1888), S. 808; *Ph. Forchheimer* in Enzyklopädie d. math. Wissenschaften, 4. Bd. Mechanik, 3. Teilbd. (1905), S. 418.

fallhöhe vermehrt. Man könnte nun derart vorgehen, daß man bei einer Breite b_1 des auf den Flügel entfallenden Flußstreifens, als Erhöhung der Überfallhöhe des ganzen die Breite B besitzenden Wassers $\frac{U^2}{2g}\cdot\frac{b_1}{B}\cos^2\varphi$ ansieht, während man für den mittleren Streifen von der Breite B an *Bazin* anknüpfend $\alpha\frac{U^2}{2g}\frac{b}{B}$ hinzufügt (siehe Gl. (158)). Man hat dann, wenn beidseitig Flügel vorhanden sind,

$$Q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,b\left[h+\frac{U^2}{2g}\left(\alpha\frac{b}{B}+\frac{b_1}{B}\cos^2\varphi_1+\frac{b_2}{B}\cos^2\varphi_2\right)\right]^{3/2}$$

oder, weil angenähert bei einer Oberwassertiefe H

$$U = \frac{2}{3}\,\frac{\mu\sqrt{2g}\,b\,h^{3/2}}{BH}$$

ist,

$$(176)\quad Q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,b\,h^{3/2}\left[1+0{,}33\frac{b^2h^2}{B^2H^2}\left(\frac{5}{3}\frac{b}{B}+\frac{b_1}{B}\cos^2\varphi_1+\frac{b_2}{B}\cos^2\varphi_2\right)\right].$$

Eine andere Methode bestände in der Ausrechnung von Q nach den beiden *Frese*schen Formeln (159) und (173), Einschaltung nach dem Gefühl zwischen beide Ergebnisse und entsprechende Änderung von μ bei nicht scharfen Kanten auf Grund der *Bazin*schen Angaben der verschiedenen $q:q_1$.

Den Einfluß der Schrägstellung eines scharfkantigen Wehres untersuchte ursprünglich *P. P. Boileau*[1]) und neuerdings *O. G. Aichel*[2]), welcher die *Rehbock*schen Vorrichtungen benutzte. Wird beim normalen Wehr der Erguß über die Längeneinheit entsprechend der Bauweise der Ausdrücke (158b) und (159)

$$q = \frac{2}{3}\mu_0\left[1+0{,}55\left(\frac{h}{H}\right)^2\right]h\sqrt{2gh}$$

gesetzt, so ist beim schrägen Wehr, das einen Winkel ε mit der Gerinnerichtung einschließt, bei gleicher Überfallhöhe h und Oberwassertiefe H der Erguß pro Längeneinheit Wehr kleiner, nämlich nach *Aichel* nur

$$(176\text{a})\qquad q = \frac{2}{3}\psi\mu_0\left[1+0{,}55\frac{1}{\sin^2\varepsilon}\left(\frac{h}{H}\right)^2\right]h\sqrt{2gh},$$

worin das $\sin^2\varepsilon$ im Nenner daher kommt, daß das Gerinne enger als die Wehrlänge ist, womit die Ankunftsgeschwindigkeit wächst.

Für den praktischen Gebrauch schreibt *Aichel* statt dessen

$$(176\text{a})\qquad q = \frac{2}{3}\psi\mu_0\left[1+0{,}55\left(\frac{h}{H}\right)^2\right]h\sqrt{2gh},$$

1) Traité de la mesure des eaux courantes, Paris 1854.

2) Experimentelle Untersuchungen üb. d. Abfluß des Wassers ...., Dissertation, München u. Leipzig 1907, S. 34, 41, 76, 78; Mitteilungen üb. Forschungsarbeiten, Heft 80, Berlin 1910.

worin

$$\psi = 1 - \frac{h}{\varrho},$$

und sei für

	$\varepsilon =$ 15°	30°	45°	60°	75°	90°
bei 0,25 m Rinnenbreite	$\varrho =$ 0,305	0,532	0,893	1,923	6,579	∞
„ 0,5 m „	$\varrho =$ 0,362	0,700	1,250	2,275	6,579	∞

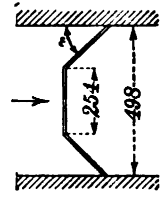
Für ein gebrochenes Wehr vom Grundriß untenstehender Figur fand *Aichel*[1]) den durchschnittlichen Erguß pro m Wehrlänge

$$q = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2\tau\mu_0} + \sqrt{\frac{1}{4\tau^2\mu_0^2} - \frac{1}{\tau}}\right\} h\sqrt{2gh}, \tag{176b}$$

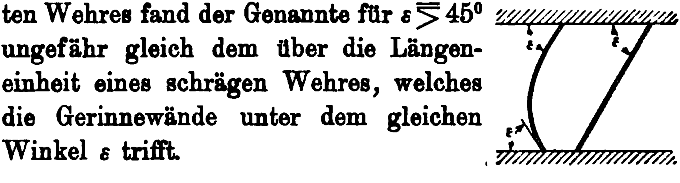
worin

$$\tau = \frac{2}{3}\,\frac{b_s^2 h^2}{b_1^2 H^2}; \quad \mu_0 = \left(0{,}515 + \frac{0{,}004}{h + 0{,}0193}\right)$$

sei und b_1 die Rinnenbreite, b_s die Länge der Überfallkante bezeichnet.



Den Erguß über die Längeneinheit eines gekrümmten Wehres fand der Genannte für $\varepsilon \gtreqless 45^0$ ungefähr gleich dem über die Längeneinheit eines schrägen Wehres, welches die Gerinnewände unter dem gleichen Winkel ε trifft.



88. Grundablässe. Als Grundwehr von der Höhe Null mit Seiteneinschnürung kann man auch seitliche Einengungen bei durchlaufender Sohle (Grundablässe, Schiffsdurchlässe) betrachten. *J. A. Lesbros*[2]) und *P. Richelmy*[3]) gaben für verschiedene von ihnen getroffene Anordnungen Koeffizientenreihen. Ersterer untersuchte Öffnungen von nur 0,2 m Weite, an die sich frei ausgießende wagrechte Rinnen (Wasserspeier) von gleicher Weite und 3 m Länge anschlossen. Für die Formel

$$Q = \frac{2}{3}\mu_a\sqrt{2g}\,b\,h^{3/2}, \tag{177}$$

worin h die Höhe des Oberwasserspiegels in einiger Entfernung von der Öffnung über der Sohle bedeutet, fand *Lesbros* für die beiskizzierten Bauweisen nachstehende Werte von $\frac{2}{3}\mu_a$

h =	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2 m
I	0,268	0,281	0,294	0,302	0,308	0,312	0,316	0,319	0,323
II	0,267	0,280	0,295	0,304	0,310	0,314	0,317	0,319	0,322
III	0,272	0,296	0,304	0,313	0,320	0,325	0,329	0,333	0,335

1) Dissertation, S. 88 u. briefliche Mitteilung.

2) Paris, Mém. prés. par div. sav. 13 (1852), S. 14, 266, 488.

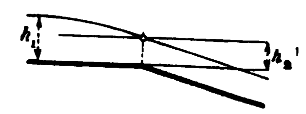
3) Torino, Memorie (2) 14 (1854), S. 305 u. f.

Richelmy behauptet, daß für vollkommene Abrundung an der Übergangsstelle

$$(177\text{a}) \qquad Q = b\sqrt{2g}\left\{0{,}299\,(h_1 - h_2)\sqrt{\frac{4}{9}(h_1 - h_2) + \frac{U^2}{2g}} + 0{,}855\,h_2\sqrt{h_1 - h_2 + \frac{U^2}{2g}}\right\}$$

sei.

B. Tolman[1]) nahm an einem Floßdurchlaß der Moldau Messungen vor. Auf die Öffnung von $b = 12$ m Breite folgen daselbst 45 m wagrechte Strecke, 48 m unter der Neigung 1 : 200, 36 m unter der Neigung 1 : 100 usw. Es zeigte sich, daß der Unterwasserspiegel etwa die Höhe h_2 über der Sohle der wagrechten Strecke annahm, welche der Ausfluß Q bei gleichförmiger Bewegung auf der nächstfolgenden unter 1 : 200 geneigten Strecke annehmen würde. Für den Ausfluß nahm *Tolman* die Formel (164) mit der Ankunftsgeschwindigkeit Null und mit $\mu_{\text{I}} = \mu_{\text{II}}$ also



$$(177\text{b}) \qquad Q = \frac{\mu_{\text{I}}}{3}\,b\,(2h_1 + h_2)\sqrt{2g\,(h_1 - h_2)}$$

und ermittelte mit $Q = 25\,\text{m}^3\,\text{sec}^{-1}$, $h_1 = 1{,}2$, $h_2 = 0{,}7$, $b = 12{,}0$ m den Koeffizienten μ_{I} oder $\mu_{\text{II}} = 0{,}64$.

Von den von *Lesbros* und von *Tolman* behandelten Fällen unterscheidet sich der Vorgang bei Strömung durch eine *Brückenöffnung* dadurch, daß bei ihm die Ankunftsgeschwindigkeit meist erheblich und der Breitenunterschied zwischen Oberwasser und Öffnung gering ist. Will man hier nicht die Gleichungen (117) bis (119) benutzen, so kann man ähnlich wie *Mary* bei Betrachtung des Grundwehres (Gl. (165)) vorgehen. Bedeutet U_1 die mittlere Geschwindigkeit oberhalb der Brücke, U_2 jene in der Brückenöffnung, F den Querschnitt des ungestauten Stromes, B die Spiegelbreite oberhalb der Brücke, b die Öffnungsweite, a die mittlere Tiefe in der Öffnung, h die Stauhöhe, so beträgt die Tiefe oberhalb der Brücke $a + h$ und ist

$$U_1 = \frac{Q}{F + Bh}.$$

In der Brückenöffnung findet eine Einschnürung statt, deren Betrag (vgl. die Einschnürung in Ansatzrohren, Gl. (145) u. f.) man $= 0{,}8$ bis $0{,}95$, bei Zwischenpfeilern mit zugeschärften Vorköpfen $= 0{,}9$ bis $0{,}95$ und bei im Vergleich zur Pfeilerdicke großer Lichtweite sogar nahezu $= 1$ zu setzen pflegt[2]). Man hat demnach

1) Allgem. Bauz. 69 (1904), S. 106.

2) *G. Tolkmitt*, Grundlagen der Wasserbaukunst, Berlin 1898, S. 126.

$$U_2 = \frac{Q}{\psi b (a + h)}$$

und nach dem *Bernoulli*schen Theorem

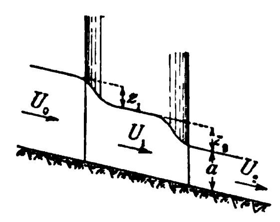
$$h = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{Q}{\psi b (a + h)}\right)^2 - \left(\frac{Q}{F + Bh}\right)^2\right], \tag{178}$$

welche Gleichung man am einfachsten löst, indem man zunächst auf der rechten Seite $h = 0$ und dann den ersten angenäherten Wert von h einsetzt. Daß das geschilderte Verfahren eigentlich nur den Spiegelunterschied zwischen Oberwasser und Öffnungswasser und nicht zwischen Oberwasser und Unterwasser berücksichtigt, also die Erhebung des Wassers bei Austritt aus der Brücke vernachlässigt, wird zum Teil durch die Wahl des Koeffizienten ψ ausgeglichen.

Beispiel. *D'Aubuisson*[1]) wandte seine Formel auf Beobachtungen an, die *Funk* an der Weserbrücke bei Minden 1799 und 1804 angestellt hatte, entnahm die Einschnürungsziffer der Schätzung *Funks* und fand

$Q =$	58	432	779	817	735	996	1123	1318	2370 m³
$b =$	73,7	94,6	88,5	91,3	91,3	97,6	94,8	96,0	132,4 m
$a =$	1,425	2,514	3,890	3,700	3,352	4,441	4,901	5,371	5,617 m
$\psi =$	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,81	0,81	0,81	0,81
h beobacht. $=$	0,05	0,209	0,261	0,296	0,314	0,345	0,377	0,384	0,540 m
h gerechnet $=$	0,016	0,220	0,267	0,302	0,323	0,342	0,383	0,426	0,559 m

Wenn die Brückenöffnung viel schmäler als der Zulauf und Ablauf ist, bildet das Wasser sowohl am Eintritt als auch am Austritt einen unvollkommenen Überfall von der Lichtweite b der Öffnung als Breite. Die beiden Überfallhöhen z_1 und z_2 kann man nach einer der oben gegebenen Formeln, z. B. (164), berechnen. Dies tut *A. Hofmann*[2]), nur schätzt derselbe $z_1 = z_2$, setzt für beide Stauhöhen als Geschwindigkeit U diejenige U_2 des Unterlaufes ein, statt der Geschwindigkeit U_0 des Oberlaufes bzw. U_1 des Durchlasses, und nimmt dafür trotz seitlicher Einzwängung beim Eintritt $\mu_1 = \mu_2 = 1$ an, was sich kaum begründen läßt. Er berechnet also $z_1 = z_2$ aus der Gleichung dritten Grades



$$Q = \sqrt{2g}\, b \left\{\frac{2}{3}\left[\left(z_2 + \frac{U_2^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{U_2^2}{2g}\right)^{3/2}\right] + a\left(z_2 + \frac{U_2^2}{2g}\right)^{1/2}\right\},$$

die ihm übrigens mit der Erfahrung stimmende Werte gab.

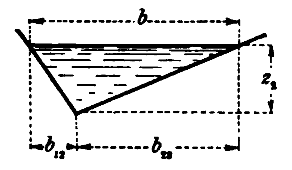
89. Überfall bei gebrochener Rückenlinie. Für nicht rechteckige Ausschnitte liegen nur spärliche Untersuchungen vor. Bei dreieckigem Ausschnitt ist, wenn dieser als Ausflußöffnung aufgefaßt wird (siehe Gl. (142a) und das zugehörige Beispiel mit $z_1 = z_2 = 0$)

$$Q = \frac{4}{15}\mu \sqrt{2g}\,(b_{12} z_2^{3/2} + b_{23} z_2^{3/2}) = \frac{4}{15}\mu \sqrt{2g}\, b\, z_2^{3/2}, \tag{179}$$

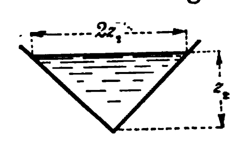
1) Traité d'hydraulique, 2. éd., 1840, S. 206.

2) Weiße Kohle 4 (1911), S. 188, 385, 400.

worin b die Breite im Spiegel, z_2 die Tiefe des Eckpunktes unter letzterem bedeutet. *J. Thomson*[1]) sah den Hauptwert einer solchen Form



in der größeren Unabhängigkeit vom Zulaufgerinne, empfahl sie für Meßzwecke und bestimmte experimentell $\mu = 0{,}62$ oder



$$Q = 0{,}73\, b\, z_2^{3/2}.$$

J. Barr[2]) nahm die einschlägigen Versuche wieder auf und fand für eine polierte, gut zugeschärfte Platte mit rechtwinkligem, dreieckigem Ausschnitt μ angenähert $= 0{,}6$, nämlich in

(179a) $$Q = \mu_2 z_2^{5/2}$$

(bei einer Gerinnetiefe von mindestens 3 bzw. $4 z_2$ bei $z_2 = 7{,}5$ bzw. 10 cm und einer Gerinnebreite von mindestens $8 z_2$) für

$z_2 =$	0,05	0,75	0,10	0,15	0,20	0,25 m
$\mu_2 =$	1,42	1,41	1,40	1,39	1,38	1,38

Bei rauher Beschaffenheit der Platte auf der Oberwasserseite stieg der Erguß Q um etwa 2 v. H.

C. Cipoletti[3]) stellte sich die Aufgabe, ein Wehr so zu bauen, daß bei allen Wasserständen derselbe Koeffizient gilt, den er dann mit wenigen Messungen ein für allemal feststellen wollte. Er glaubte dies zu erreichen, indem er die Wangen unter $^1/_4$ (d. h. 1 wagrecht auf 4 lotrecht) böschte, und er ermittelte für das betreffende Wehr von rundem Rücken

(179b) $$Q = \frac{2}{3}\, 0{,}629 \sqrt{2g}\, b\, h^{3/2} = 1{,}86\, b\, h^{3/2},$$

wobei b die Rückenlänge, h die Überfallhöhe bedeutet. Die Ankunftsgeschwindigkeit, die im betreffenden Falle zu gering war, berücksichtigte er nicht weiter. Eine Nachprüfung von *Cippolettis* Formel von anderer Seite hat bisher nicht stattgefunden.

90. Überfall über ein Streichwehr. Man kann vermeiden, daß in einem Gerinne, Werksgraben oder Siel der Wasserspiegel eine zu hohe Lage annimmt, indem man eine Seitenwand mit einem Ausschnitt versieht, über welchen das Wasser überfällt. Dieser Teil der Seitenwand

1) British Association Report 1858; Civil Engineer and Architects Journal 24 (1861) Dez., 26 (1863) April.

2) Engineering 89 (1910), S. 435, 478.

3) *C. Cipoletti*, Canal Villoresi, Mailand 1887, *A. D. Flinn* u. *C. W. Dyer*, Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 32 (1894), S. 9.

bildet dann ein *Streichwehr*. Für den Durchfluß im Gerinne gilt hier gemäß *de Chézy*

$$Q = FU = cF\sqrt{RJ}$$

(worin F der Querschnitt, U die Geschwindigkeit, R der Profilradius, J das Spiegelgefälle in der Längsrichtung) und zugleich bei Einführung stromauf zu messender Abszissen x, weil längs des Streichwehrelementes dx die Menge dQ überfällt, bei einer Höhe z des Spiegels über der Wehrkrone (Überfallschwelle) nach (156)

$$dQ = \frac{2}{3}\mu z\sqrt{2gz}\,dx.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers dürfte, weil senkrecht zur Überfallschwelle, nicht weiter in Betracht zu ziehen sein. Meistens hat man es mit einem Rinnsal zu tun, bei dem die Wasserbewegung von den Vorgängen im Unterlauf beherrscht wird, d. h. meistens ist das unterste z als maßgebend zu betrachten. Von hier aus erstreckt sich ein Spiegel von schwach gekrümmtem, konkavem Längenschnitt bis zum oberen Ende des Ausschnittes, von wo aus eine konvexe Senkungskurve die Verbindung mit dem weiter stromauf durch die jeweiligen Anordnungen festgelegten Wasserspiegel herstellt. Bei kurzen Ausschnitten, wie man sie bei den Notauslässen städtischer Siele anwendet, kann man ein und dasselbe z für das ganze Streichwehr annehmen[1]). Bei einer Streichwehrlänge l hat man dann den gegebenen Zufluß Q_1

$$Q_1 = cF\sqrt{RJ} + \frac{2}{3}\mu z\sqrt{2gz}\,. \tag{180}$$

Jedem Spiegel entspricht ein bestimmtes F, R und z und die Lösung besteht darin, daß man die Spiegellage so ändert, bis mit dem Gefälle J des stromab führenden Kanales die Gleichung (180) erfüllt ist. Ist — wie häufig bei Werksgräben — die Streichwehrlänge l so groß, daß sich z merklich ändert, so muß man das Wehr in Einzelstrecken zerlegen.

Für ein breites Gerinne und *wagrechte* Wehrkrone sowie Gerinnesohle kann man übrigens, wie *Ph. Forchheimer*[2]) bemerkt, Q leicht als

1) *J. Hermanek*, Z. d. öst. I. u. A.V. 45 (1893), S. 623. Derselbe gibt auch ein Verfahren für Überfälle, die gegenüber der Einmündung eines Seitenkanales liegen, ebenda S. 637, 658. *P. Kresnik* nimmt, Wasser- u. Wegebau 4 (1905), S. 57, um zu einer Lösung zu gelangen, an, man dürfe sowohl die Wasserführung unterhalb der Streichwehrkrone (oder, wenn das Wehr ein Grundwehr ist, unterhalb seines Unterwasserspiegels), als auch die Geschwindigkeit oberhalb der Wehrkrone (bzw. des Unterwasserspiegels) als von z unabhängig betrachten. Willkürlich geht *Chauvin* vor; deutsch in *R. Weyrauch*, Hydraulisches Rechnen, 2. Aufl., S. 157.

2) Enzyklopädie d. mathem. Wissenschaften, 4. Bd. Mechanik, 3. Teilbd., S. 419 Fußnote.

Funktion von z darstellen, weil man dann bei einer Gerinnebreite b und Wehrhöhe h

$$Q = c b (h + z)^{3/2} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{1/2}$$

oder

$$dx = \frac{c^2 b^2 (h + z)^3}{Q^2} dz$$

und andererseits

$$dx = \frac{3}{2\mu\sqrt{2g}} \frac{dQ}{z^{3/2}}$$

hat. Es folgt durch Gleichsetzung beider Ausdrücke

$$2\mu c^2 \sqrt{2g}\, b^2 (h^3 z^{3/2} + 3h^2 z^{5/2} + 3h z^{7/2} + z^{9/2})\, dz = 3 Q^2 dQ$$

oder

$$(181) \quad 4\mu c^2 \sqrt{2g}\, b^2 \left(\frac{1}{5} h^3 z^{5/2} + \frac{3}{7} h^2 z^{7/2} + \frac{1}{3} h z^{9/2} + \frac{1}{11} z^{11/2}\right) = Q^3 + \text{konst.}$$

Diese Gleichung kann, wie nunmehr dargelegt werde, mit Vorteil benutzt werden, wenn ein langes, nahezu wagrechtes Streichwehr vorhanden ist, wie dies bei Einfängen von Kraftwerken häufig zutrifft. Hier wird der Abfluß im Gerinne (Obergraben des Werkes) von *unten* beherrscht (vgl. S. 144). Bezeichnet die Kennziffer Null das untere Überfallende ($x = 0$), so hängt also der Vorgang vom Abfluß Q_0 im Obergraben und von seiner Wassertiefe $h + z_0$ ab. Man hat dann

$$(181\text{a}) \quad 4\mu c^2 \sqrt{2g}\, b^2 \Big[z^{5/2} \left(\frac{1}{5} h^3 + \frac{3}{7} h^2 z + \frac{1}{3} h z^2 + \frac{1}{11} z^3\right) - z_0^{5/2} \left(\frac{1}{5} h^3 + \frac{3}{7} h^2 z_0 + \frac{1}{3} h z_0^2 + \frac{1}{11} z_0^3\right)\Big] = Q^3 - Q_0^3,$$

oder, wenn man

$$(181\text{b}) \quad 4\mu \sqrt{2g} \left(\frac{z}{h}\right)^{5/2} \left[\frac{1}{5} + \frac{3}{7}\frac{z}{h} + \frac{1}{3}\frac{z^2}{h^2} + \frac{1}{11}\frac{z^3}{h^3}\right] = \Phi\left(\frac{z}{h}\right)$$

setzt,

$$(181\text{c}) \quad c^2 b^2 h^{11/2} \left[\Phi\left(\frac{z}{h}\right) - \Phi\left(\frac{z_0}{h}\right)\right] = Q^3 - Q_0^3.$$

Mit dem Mittelwert $4\mu\sqrt{2g} = 11$ ist hier für

$\frac{z}{h}$ =	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\Phi\left(\frac{z}{h}\right)$ =	0,00137	0,00856	0,0261	0,0590	0,113	0,196	0,315	0,479	0,700	0,990

Würde der Erguß über die Längeneinheit Streichwehr, für welchen die Bezeichnung q eingeführt werde, von q_0 bis q gleichmäßig längs des Streichwehres wachsen, so hätte man für den Übersturz zwischen 0 und x

$$(181\text{d}) \quad \frac{q_0 + q}{2} x = \frac{\mu\sqrt{2g}}{3} (z_0^{3/2} + z^{3/2})\, x.$$

Trägt man aber die x als Abszissen, die q als Ordinaten auf, so erhält man nicht eine Gerade, sondern eine Kurve mit der Tangentenneigung

$$\frac{dq}{dx} = \frac{d\left(\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,z^{3/2}\right)}{dx} = \mu\sqrt{2g}\,z^{1/2}\frac{dz}{dx} = \mu\sqrt{2g}\,z^{1/2}\frac{Q^2}{c^2b^2(h+z)^3}.$$

Die Kurventangenten in den Punkten mit den Abszissen 0 und x schließen also miteinander einen Winkel

$$\nu = \frac{\mu\sqrt{2g}}{c^2b^2}\left(\frac{z^{1/2}Q^2}{(h+z)^3} - \frac{z_0^{1/2}Q_0^2}{(h+z_0)^3}\right)$$

ein. Berücksichtigt man dies, so kann man hinreichend genau die Fläche zwischen der q-Kurve und der Abszissenachse finden, indem man noch eine Bogenfläche von der Sehne x und dem Pfeil $\frac{1}{8}x\nu$ in Abzug bringt. Man kann also

$$(181\,\mathrm{e})\quad \int_0^x q\,dx = Q - Q_0 = \frac{\mu\sqrt{2g}}{3}\left\{z_0^{3/2} + z^{3/2} - \frac{x}{4c^2b^2}\left(\frac{z^{1/2}Q^2}{(h+z)^3} - \frac{z_0^{1/2}Q_0^2}{(h+z_0)^3}\right)\right\}x$$

setzen und aus dieser quadratischen Gleichung, nachdem man z aus Gl. (181c) ermittelt hat, die zur Verminderung des Durchflusses Q auf Q_0 nötige Streichwehrlänge x berechnen. — Steigt der Wehrrücken an, so kann man ihn als abgetreppt behandeln. Auf die Sohle, deren Zustand häufig ohnedies unbekannt ist, kommt es viel weniger an.

Beispiel. Im Obergraben von $b = 10$ m mittlerer Breite und $h + z_0 = 2{,}1$ m Wassertiefe sollen $Q_0 = 16\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}}$ weiterfließen, wenn $Q = 30\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}}$ in ihn eintreten; c sei $= 40\ \mathrm{m^{1/2}\,sec^{-1}}$ und der Streichwehrrücken liege 2 m über der Sohle, wonach $z_0 = 0{,}1$ m ist. Wie lang muß das Streichwehr werden? Aus $z_0 : h = 0{,}05$ folgt $\Phi(z_0) = 0{,}00137$, weiter, weil $h^{11/2} = 45{,}26$ ist, nach (181c)

$$1600 \cdot 100 \cdot 45{,}26\,[\Phi(z) - 0{,}00137] = 27000 - 4096 = 22904$$

und hieraus

$$\Phi(z) = 0{,}003163 + 0{,}00137 = 0{,}00453.$$

Hierfür zeigt sich $\frac{z}{h} = 0{,}079$ oder $z = 0{,}158$ m. Danach nimmt (181e) die Form

$$14 = 0{,}92\left\{0{,}0316 + 0{,}0628 - \frac{x}{640000}\left(\frac{0{,}398 \cdot 900}{10{,}05} - \frac{0{,}316 \cdot 256}{9{,}26}\right)\right\}x$$

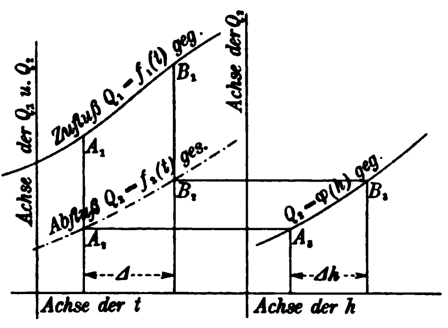
an, oder $15{,}22 = 0{,}0944\,x - 0{,}00004204\,x^2$ oder $x^2 - 2245\,x = -362100$ und gibt die gesuchte Länge $x = 1122{,}5 - \sqrt{897900} = 174{,}9$ m. Nach (181d), d. h. ohne Rücksicht auf die Krümmung der q-Kurve hätte sich x nur $= 161{,}2$ m ergeben.

XI. Füllung und Entleerung von Wasserbecken und Gefäßen.

Ein Wasserbecken kann Wassermengen empfangen oder solche abgeben oder auch gleichzeitig einerseits gespeist werden, andererseits einen Ablauf speisen. Diese Vorgänge umfassen zahlreiche Probleme, die zum Teil wesentlich die Wirkung eines in einen Wasserlauf eingeschalteten Beckens auf ersteren betreffen, zum Teil in engerem Zusammenhang mit dem Ausflusse durch Öffnungen und Überfälle stehen. Die Aufgaben der ersten Art sollen zunächst betrachtet werden.

91. Seerückhalt. Gleichung (111 c) bringt zum Ausdruck, daß ein Hochwasserschwall bei Eintritt in ein breites Überschwemmungsgebiet rasch niedergeht. Das ist besonders bei Eintritt in einen See der Fall, denn ein solcher nimmt die Hochwässer rascher auf, als er sie wieder fortlaufen läßt. Die praktische Aufgabe besteht dann darin, rechnerisch die ankommende Wassermenge in die gleichzeitig ablaufende und die zurückgehaltene, die „Retention" zu zerlegen.

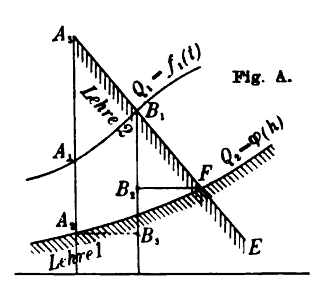
Ist der Zufluß $f_1(t)$ als Funktion der Zeit t, der Abfluß $\varphi(h)$ als Funktion der Spiegelhöhe h (über einem willkürlichen Pegelnullpunkt) gegeben und ist der Abfluß als Funktion $f_2(t)$ der Zeit zu suchen, so werden nach *A. R. Harlacher*[1]) sowohl die t als auch die h als Abszissen und der Zufluß $f_1(t)$, der Abfluß $f_2(t)$ und der Abfluß $\varphi(h)$ als Ordinaten aufgetragen. Die Differenz des Zu- und Abflusses im Zeitintervall Δ wird dann durch ein von den beiden Kurven $f_1(t)$ und $f_2(t)$ und zwei Ordinaten gebildetes Trapez $A_2A_1B_1B_2$ (s. Figur) angegeben. Zieht man von den Punkten A_2 und B_2 der $f_2(t)$-Kurve Parallele zur Abszissenachse bis zur $\varphi(h)$-Kurve, so bedeutet das Produkt $F \cdot \Delta h$ die vom See in der Zeit Δ aufgespeicherte Menge, wenn Δh die Differenz der h der beiden Schnittpunkte, also den in dieser Zeit erfolgenden Seeaufstieg bezeichnet. Man kann daher, wenn A_1, B_1 und A_2 gegeben sind, B_2 durch Probieren (oder die regula falsi) finden, weil $A_1B_1A_2B_2 = F \cdot \Delta h$ sein muß, und so fortschreitend die Aufgabe lösen. Dabei kann man das jeweilige F von der Kurve $\varphi(h)$ lotrecht nach oben auftragen und so rein graphisch vorgehen. Das Verfahren hat heute nur geschichtlichen Wert.

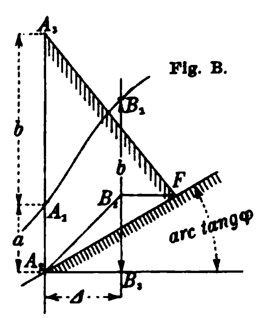


Harlachers Verfahren (ohne Lehren).

1) Mitgeteilt von *Ign. Pollak* in Z. d. öst. I.- u. A.-V. 47 (1895), S. 595.

Für eine bei jeder Spiegelhöhe *gleiche* Seefläche F, also für einen See mit Steilufern, hat *A. R. Harlacher*[1]) außerdem zur Aufsuchung des Punktes B_2 ein vereinfachtes Verfahren angegeben, bei welchem man zwei Schablonen benutzt, von denen die erste, nur in der h-Richtung zu verschiebende, die Kurve $Q_2 = \varphi(h)$, die andere eine gerade Linie gibt, welche den Winkel $\operatorname{arc\,tang} \frac{2F}{\Delta}$ mit der Abszissenachse einschließt, also ein Dreieck mit Katheten im Verhältnis $2F$ zu Δ benutzt. Man gehe wie folgt vor. Man mache, wenn B_3 jenen Punkt der Ordinatenlinie $B_1 B_2$ bedeutet, der dieselbe Ordinate wie A_2 besitzt, $A_1 A_3 = B_1 B_3$, ziehe mit der Lehre 2 durch Anlegen derselben an $A_2 A_3$ von A_3 die Gerade $A_3 E$ und projeziere den Schnittpunkt F von $A_3 E$ mit der durch





A_2 mit Hilfe der Lehre 1 gezogenen Linie $\varphi(h)$ auf die Ordinatengerade $B_1 B_3$. Der Projektionspunkt ist dann der gesuchte B_2. In der Tat zeigt Figur B, daß, für die durch sie erläuterten Bezeichnungen, wenn man durch A_2 ein Achsenkreuz legt, die Gerade $A_3 F$ die Gleichung

$$\frac{x}{a+b-y} = \frac{\Delta}{2F},$$

die Gerade des Kurvenelementes $A_2 F$ die Gleichung

$$y = \varphi x$$

besitzt. Für den Scheitelpunkt F gilt also

$$y_F = \frac{\varphi \Delta (a+b)}{2F + \varphi \Delta}, \quad x_F = \frac{\Delta (a+b)}{2F + \varphi \Delta}. \tag{182}$$

Die Trapezseiten $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ haben die Längen a und

$$b - y_F = \frac{2bF - a\varphi\Delta}{2F + \varphi\Delta},$$

das Trapez hat daher den Inhalt

$$\Delta \frac{a + b - y_F}{2} = \frac{F\Delta(a+b)}{2F + \varphi\Delta}$$

und, da nach (182) der Seerückhalt $Fx_F = F \cdot \Delta h$ dieselbe Größe ergibt, ist B_2 richtig bestimmt.

1) Ebenda.

Für die Lösung der eben behandelten und verwandter Aufgaben ist es zweckmäßig — in Anlehnung an das im Eisenbahnbau übliche sogenannte Massennivellement — *Massen-* oder richtiger *Mengenkurven* einzuführen. Diese stellen für die Zeit t als Abszissen

$$\int_0^t Q_1\,dt \quad \text{und} \quad \int_0^t Q_2\,dt$$

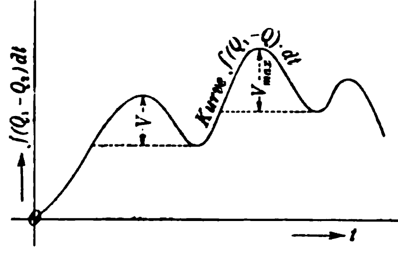
als Ordinaten dar, welche Integrale die Dimension des Raumes, also die Dimension von m^3 besitzen, während Q_1 und Q_2 die Dimension Raum durch Zeit, also z. B. $m^3\,\text{Tag}^{-1}$ haben. Unter Q_1 ist hierbei wieder der Zufluß, unter Q_2 der Abfluß verstanden. Trägt man für die Zeit t als Abszissen auch die Q als Ordinaten auf, so stellt die Ordinate jeder Q-Kurve demnach den Differentialquotienten der zugehörigen Mengenlinie (Integralkurve) dar, und je größer Q ist, desto steiler steigt der in der Zeichnung senkrecht über Q gelegene Teil der Mengenlinie an.

In einfacher Weise läßt sich mit Hilfe der Mengenkurven auf graphischem Wege die Frage beantworten, welchen Stauweiherinhalt man bei gegebenen Zufluß- und Verbrauchsschwankungen benötigt, falls man den Zufluß *vollkommen* ausnutzen will. Es genügt zu diesem Zwecke die Linien $\int_0^t Q_1\,dt$ und $\int_0^t Q_2\,dt$ aufzutragen und letztere, die Verbrauchsmengenlinie, parallel zu verschieben, bis sie erstere an zwei Stellen berührt. Haben diese Stellen die Abszissen t_I und t_{II}, so läuft im Zeitraum $t_{II} - t_I$ so viel Wasser in den Weiher, als man verbraucht. Die größte senkrechte Entfernung der beiden Kurven gibt dann den für die Periode $t_{II} - t_I$ nötigen Stauweiherinhalt an; bis zur betreffenden Ordinate übertraf der Zulauf den Verbrauch und der aufgespeicherte Überschuß wird dann bis zum Ende der Periode verbraucht. Es ist also nebst der Berührung in zwei Punkten, ohne welche eben keine vollständige Erfüllung der Aufgabe möglich ist, noch erforderlich, daß die Abflußmengenlinie *unter* der Zuflußmengenlinie liege.[1])

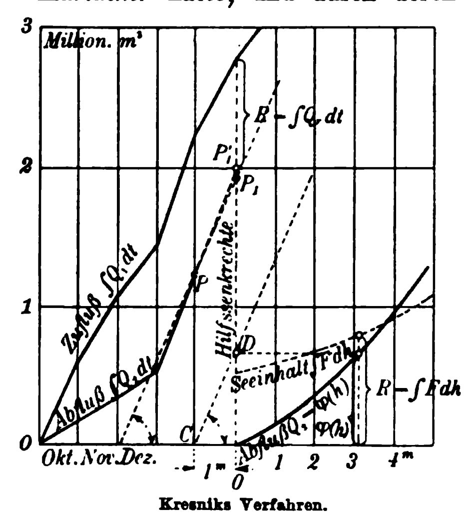
Rechnet man statt dessen die bald positiven, bald negativen *Unterschiede* zwischen Zufluß und Abgabe aus und trägt die Summe der Unterschiede auf, so erhält man eine bald steigende, bald fallende

1) Solche Summenkurven verwendet z. B. *R. Müller* zur Ermittelung der Wirkung eines Überfalles bei einem Stauweiher, Allg. Bauz. 78 (1913), S. 59.

Mengenlinie. Eine wagrechte Gerade bewirkt dann einen Mengenausgleich, und die größte Erhebung V_{max} über einer Ausgleichsgeraden gibt den nötigen Stauweiherinhalt an.[1])



Handelt es sich um einen Seerückhalt, so kennt man den Zufluß Q_1 als Funktion der Zeit, kann also die Zuflußmengenkurve $\int\limits_0^t Q\,dt$ zeichnen. Die Seeinhalte $\int\limits_0^t F\,dh$ von einem bestimmten Niveau an aufwärts kennt man jedoch nur als Funktion der Spiegelhöhe, sie liefern die Seeinhaltskurve; endlich weiß man den Abfluß Q_2 auch nur als Funktion $\varphi(h)$ der Spiegelhöhe h. Trägt man die h wagrecht, die $\varphi(h)$ senkrecht auf, so erhält man dieselbe Linie, die schon *Harlacher* hatte, und durch deren Projektion auf eine und dieselbe „Hilfssenkrechte" trägt man nach *Kresniks* Verfahren[2]) auf dieser die Q_2 auf. Da die Q_2 die Differentialquotienten der Funktion $\int\limits_0^t Q_2\,dt$ bilden, gibt die Verbindung eines solchen Endpunktes mit einem Punkte C, der in der Entfernung 1 von der Hilfssenkrechten liegt, die Tangentenrichtung der Abflußmengenkurve $\int\limits_0^t Q_2\,dt$ an. Hiernach kann man, wenn man diese Kurve bis zu einem Punkte P kennt, das nächste Stück PP_{I} wie folgt finden. Man nehme P_{I} versuchsweise an, messe von P_{I} senkrecht hinauf, bis zur Zuflußmengenkurve. Dann stellt diese Länge R den Unterschied von Zufluß- und Abflußmenge, also die im See aufgespeicherte Menge $\int\limits_0^t Q_r\,dt - \int\limits_0^t F\,dh$ dar. Man suche nun den Punkt der Seeinhaltslinie auf,

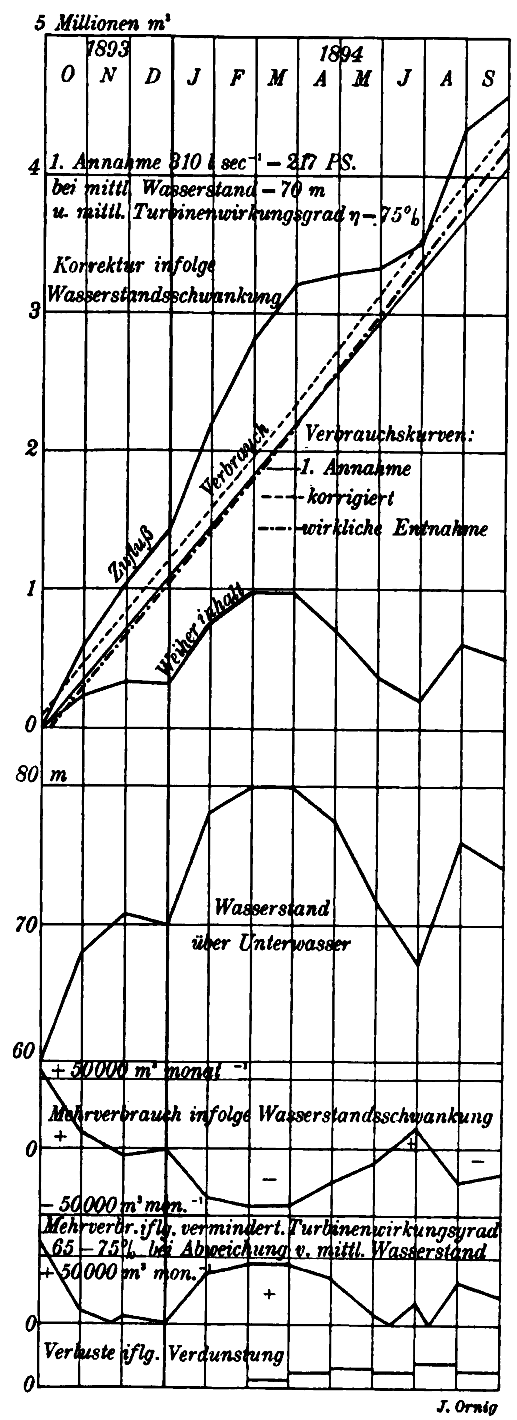


Kresniks Verfahren.

1) *W. Rippl*, Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 71 (1883), S. 270.

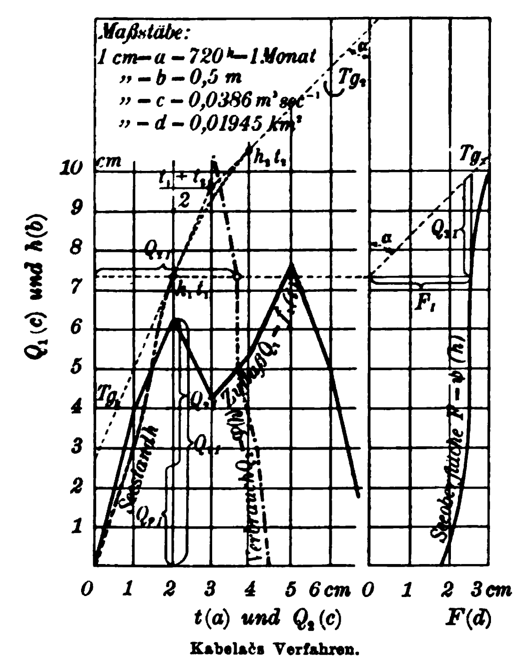
2) Österr. Monatsschr. f. d. öffentl. Baudienst 3 (1897), S. 20; *Kresnik* hat sein Verfahren auch auf Stauweiherfragen ausgedehnt, ebenda 8 (1902), S. 405, 14 (1908), S. 535. — In obiger Figur wurde die Hilfssenkrechte durch P_1 gelegt, also verschiebbar eingeführt.

dessen Ordinate = R ist, und ziehe vom Schnittpunkt letztgenannter Ordinate mit der $\varphi(h)$-Linie eine Wagrechte bis zur Hilfssenkrechten. Der Strahl vom Punkte C zu dem von der Wagrechten getroffenen Punkte D der Hilfssenkrechten soll nun die Neigung des Kurvenstückes PP_{I} haben. Geht die durch P zu dem Strahl CD parallel gezogene Gerade wirklich durch den Punkt P_{I}, so war dessen Annahme richtig. Anderfalls liegt der richtige Punkt zwischen dem angenähert angenommenen P_{I} und dem ebenfalls unrichtigen Strahl, und zwar näher an letzterem.



Bisher wurde die Frage nach der nötigen Größe eines Stauweihers von dem Gesichtspunkte aus betrachtet, daß es sich bei dem Bedarf nur um die *Menge* des Wassers handelt, wie das z. B. bei Wasserversorgungen der Fall ist; bei Kraftanlagen kommt es aber auch auf die Höhe des Wasserspiegels an, weil die Arbeit, die Triebwasser leistet, nicht nur von seiner Menge, sondern auch von seiner Nutzhöhe und dem Wirkungsgrade der hydraulischen Motoren (also wohl der Räder oder der Turbinen) abhängt. Für jeden Wasserstand im Weiher ist also,

wenn die zu verrichtende Arbeit vorgeschrieben ist, auch die Wassermenge bestimmbar, welche man durch die Motoren fließen lassen muß; es ist also bei vorgeschriebener Arbeitsleistung auch der Abfluß Q_2 als Funktion des Wasserstandes h bekannt. Außerdem ist meistens festgesetzt, welcher Wasserstand h_{max} nicht überschritten werden darf, so daß, nachdem er erreicht ist, der Abfluß Q_2 dem Zufluß Q_1 ständig gleich bleiben muß, bis der Spiegel wieder sinkt. Ein Verfahren, welches lehrt, welche Schwankungen der Spiegel macht, dessen Flächenausdehnung man bei jedem Wasserstande kennt, wenn der Zufluß Q_1, der Arbeitsbedarf, die Höhenlage der Motoren und deren Wirkungsgrad gegeben sind, ist nun das folgende, das sich durch besondere Verständlichkeit auszeichnet, auch bezüglich der Maßstäbe keine Schwierigkeiten bietet. Man nimmt zunächst *konstante* Nutzhöhe an, berechnet auf dieser Grundlage den Wasserverbrauch, den Unterschied von Zu- und Abfluß und die Hebung und Senkung des Spiegels. Damit erhält man eine Wasserstandskurve (Abszissen: Zeit t, Ordinaten: Wasserstand h). Da man nun schon besser angenähert die Nutzhöhen und Wirkungsgrade zu jeder Zeit t kennt, kann man auch den Verbrauch Q_1 angeben, und Q_2 als Funktion (Ordinate) von t (Abszisse) auftragen. Jetzt läßt sich auch eine richtigere Wasserstandskurve ermitteln und zeichnen, die wieder zu einer neuen Verbrauchskurve verwendbar wäre. So löst man durch Wiederholung des Verfahrens die gestellte Aufgabe mit beliebiger Genauigkeit.



Kabelačs Verfahren.

Das wiederholte Zeichnen vermeidet *K. Kabelač*[1]), welcher dabei auch von den Summierungen absieht und dafür (er denkt weniger an Weiher als an natürliche Seen) die Seestandskurve benutzt. Gegeben seien zunächst die Zuflußkurve $Q_1 = f_1(t)$ (Q_1 Ordinate, t Abszisse) vollständig und die Seestandskurve $h = \psi(t)$ (h Ordinate, t Abszisse) bis zum Punkte $t_I h_I$.

1) Z. d. öst. I.- u. A.-V. 61 (1909), S. 353.

Vom Seestand hängen der (z. B. von einer Kraftanlage benötigte, künstlich zu regelnde) Abfluß Q_2 und die Seeoberfläche F ab. Diese mögen durch 2 Linien gegeben sein, welche für jedes h (Ordinate) die zugehörige Abszisse (Q_2 und F) angeben. Q_2 und F sind also im Gegensatz zu Q_1 wagrecht abzugreifen. Zieht man vom Punkte $(h_I t_I)$ eine Wagrechte bis zum Schnitt mit der Verbrauchskurve, so ist der Abstand des Schnittpunktes von der senkrechten Koordinatenachse $= Q_{2I}$; man nimmt ihn in den Zirkel, trägt ihn vom betreffenden Q_{1I} abwärts auf und hat den Rückhalt (Vermehrung des Seeinhaltes in der Zeiteinheit)

$$Q_{rI} = Q_{1I} - Q_{2I}$$

als Ordinate für die Zeit t_I als Abszisse. Ähnlich liefert der Schnittpunkt der genannten Wagrechten mit der Seeoberflächenkurve die zum Seestand $h_I t_I$ gehörende Seeoberfläche F_I. Dann gilt für die Tangente der Seestandskurve (in der Figur ist $Q_{3I} = Q_{rI}$ gemacht)

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_I = \frac{Q_{rI}}{F_I}, \tag{183}$$

so daß man $\left(\frac{dh}{dt}\right)_I$ konstruieren und die Seestandskurve bis $(h_2 t_2)$ verlängern kann. Dabei ziehe man die neue Tangente, indem man die Seestandskurve als aus Parabeln bestehend betrachtet, durch den Punkt, in welchem die vorhergehende Tangente die Mittelsenkrechte zwischen dem alten und dem zu findenden Seestandspunkt schneidet, also die Senkrechte mit der Abszisse $\frac{t_I + t_2}{2}$. Mit der Seestandskurve ist auch der Abfluß als Funktion der Zeit bestimmt, insbesondere auch sein Maximum, welches gleichzeitig mit dem höchsten Seestande erreicht wird. Zu den Maßstäben sei bemerkt, daß, wenn 1 cm a Stunden oder b m oder c m³ sec⁻¹ oder d km² bedeutet,

$$\frac{3600\,a}{b} = \frac{1000000\,d}{c}$$

sein muß.

Durch Einfachheit und Genauigkeit zeichnet sich das folgende *Verfahren von O. Z. Ekdahl*[1]) aus. Es ist für einen bestimmten Zeitabschnitt Δ

$$\text{der Gesamtzufluß } Q_1 \cdot \Delta = \frac{Q_{2,t} + Q_{2,(t+\Delta)}}{2} \cdot \Delta + M_{t+\Delta} - M_t,$$

wobei

1) *O. Ekdahl*, Om beräkningsmetoderna vid uppgörande af forslag till Sjöars sänkning och reglering, Lund 1888; derselbe, Über die Bewegung des Wassers... und über die Wasserverhältnisse in Seen, Leipzig 1912.

$Q_{2,t}$ und $Q_{2,(t+\Delta)}$ die sekundlichen Abflußmengen,
M_t und $M_{t+\Delta}$ die Seeinhalte am Anfange und Ende des Zeitabschnittes Δ bedeuten.

Hieraus folgt

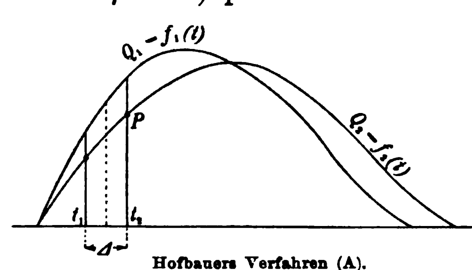
$$\left(\frac{M_t}{\Delta} - \frac{Q_{2t}}{2}\right) + Q_1 = \left(\frac{M_{t+\Delta}}{\Delta} + \frac{Q_{2(t+\Delta)}}{2}\right)$$

oder

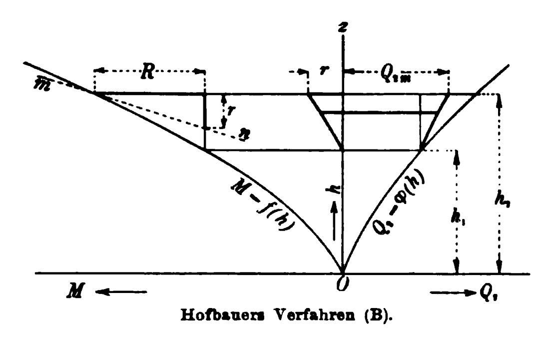
$$\left(\frac{M}{\Delta} - \frac{Q_2}{2}\right)_t + Q_1 = \left(\frac{M}{\Delta} + \frac{Q_2}{2}\right)_{t+\Delta}.$$

Die Größen $\left(\frac{M}{\Delta} - \frac{Q_2}{2}\right)$ und $\left(\frac{M}{\Delta} + \frac{Q_2}{2}\right)$ werden für eine Reihe von Seeständen in einer Tabelle berechnet und von den Punkten h der Ordinatenachse im gleichen Sinne wagrecht aufgetragen. Hiernach erhält man zwei Kurven. Die für einen bestimmten Seestand im Zeitpunkte t auf der Kurve $\left(\frac{M}{\Delta} - \frac{Q_2}{2}\right)$ abgelesene Größe, vermehrt um den Zufluß im darauffolgenden Zeitabschnitte Δ, ergibt auf der Kurve $\left(\frac{M}{\Delta} + \frac{Q_2}{2}\right)$ den gesuchten Seestand nach diesem Zeitabschnitte.

Ebenfalls einfach und genau, dabei rein graphisch ist ein von *R. Hofbauer*[1]) praktisch mehrfach erprobtes Verfahren. Gegeben sei der Zufluß $Q_1 = f_1(t)$, die Seeinhaltskurve $M = f(h)$ und, ebenfalls als Funktion des Seestandes, der Abfluß $Q_2 = \varphi(h)$; gesucht wird der Abfluß als Funktion der Zeit $Q_2 = f_2(t)$. Die Seefläche darf sich hierbei mit dem Seestande h ändern. Die Kurve $Q_2 = f_2(t)$ (siehe Fig. A) sei bis zum Zeitpunkte t_1 gefunden, ein weiterer Punkt P derselben für den Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \Delta$ sei zu suchen. Im Zeitraum Δ strömt dem Seebecken die durch die Mittelordinate zwischen t_1 und t_2 dargestellte sekundliche Wassermenge zu. Hierdurch steige der Spiegel von h_1 annahmsweise auf h_2 (Fig. B). Die Retention R während der Zeit Δ wird durch den Unterschied der Abszissen der Seeinhaltskurve M



Hofbauers Verfahren (A).



Hofbauers Verfahren (B).

1) Bisher unveröffentlicht.

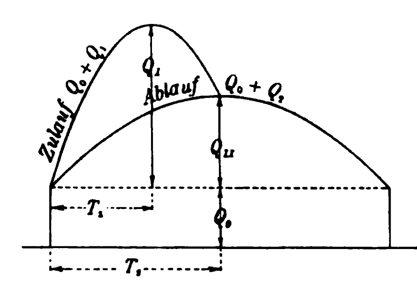
bei h_1 und h_2 dargestellt; dieselbe durch Δ dividiert, ergibt die mittlere sekundlich zurückgehaltene Wassermenge r während dieses Anstieges. Aus dem wagrecht im Maßstabe der Seeinhalte dargestellten R kann man leicht durch Ziehen einer Verwandlungsgeraden mn (von bestimmter Neigung) r im Maßstabe der Abflüsse Q_2 senkrecht aufgetragen erhalten. Nun trägt man von der Achse Oz aus in der Höhe h_2 nach *links* den Rückhalt r und nach *rechts* den mittleren Abfluß während des Anstieges von h_1 auf h_2, nämlich $Q_{2,m} = \frac{1}{2}[\varphi(h_1) + \varphi(h_2)]$, auf. Die Summe $Q_{2,m} + r$ muß dann offenbar gleich der in der Zeit Δ zugeströmten Wassermenge sein. Durch Bestimmung von r und $Q_{2,m}$ für einige Seestände erhält man links ein Kurvenstück des mittleren (sekundlichen) Rückhaltes r, rechts ein solches des mittleren Abflusses $Q_{2,m}$. Jener Seestand, dessen Spiegel auf der Zeichnung B zwischen diesen Kurvenstrecken dieselbe Länge hat, wie die Mittelordinate der Kurve $Q_1 = f_1(t)$ zwischen t_1 und t_2 auf der Zeichnung A, ist der gesuchte. Der gefundene Seestand in Fig. B schneidet die Kurve $Q_2 = \varphi(h)$ in einem in der Figur nicht angegebenen Punkte, dessen Abstand von Oz den im Zeitpunkte t_2 herrschenden Abfluß Q_{2}, angibt. Diesen trägt man in Zeichnung A bei t_2 als Ordinate auf und hat damit die Abflußkurve bis zum Punkte P verlängert. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man sowohl den Abfluß wie auch den Seestand als Funktion der Zeit. Der Höchststand ist dadurch gekennzeichnet, daß der Abfluß Q_2 gleich der Zuströmung Q_1 und $r = 0$ wird. Den absteigenden Ast der Kurve $Q_2 = f_2(t)$ liefert ein dem geschilderten ähnlicher Vorgang. Das Verfahren läßt sich auch für die Untersuchung der Wirkung von Überschwemmungsgebieten auf die Hochwasserführung der Flüsse anwenden.

92. Spiegeländerung für Zu- und Abflußparabeln. *P. Klunsinger*[1]) hat einige hydraulische Aufgaben in der Weise näherungsweise gelöst, daß er annahm, daß die Funktionen, die er zu betrachten hatte, durch Parabeln darstellbar seien. Ähnlich werde hier[2]) die Frage behandelt, welche Mäßigung Hochwasser durch ein nicht zu langes aber breites Überschwemmungsgebiet erfährt; es sollen nämlich die Kurven, welche die Zeit zu Abszissen und den Zulauf sowie den Ablauf zu Ordinaten haben, als Parabeln und zwar zunächst als solche mit senkrechter Achse betrachtet werden. Ein Unterschied zwischen Zulauf und Ablauf hat erst statt, wenn der Fluß auszuufern beginnt. Ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Parabeln liegt daher an der Stelle $t = 0$, wenn der Beginn der Überschwemmung als Anfang der Zeitmessung festgesetzt

1) Z. d. öst. I.- u. A.-V. 38 (1886), S. 10 und 48 (1896), S. 33, 49 u. f.

2) *Ph. Forchheimer*, bisher unveröffentlicht.

wird, in welchem Augenblicke der Fluß bordvoll läuft und in der Zeiteinheit die Menge Q_0 führe. Solange der Zulauf, der mit $Q_0 + Q_1$ bezeichnet werde, den Ablauf $Q_0 + Q_2$ übertrifft, steigt das Wasser im Überschwemmungsgebiete, während das Wasser fällt, wenn $Q_0 + Q_1 < Q_0 + Q_2$ wird. Da nun der Ablauf $Q_0 + Q_2$ selbst mit der Überschwemmungshöhe wächst, haben beide ihr Maximum für $Q_0 + Q_1 = Q_0 + Q_2$; im Schnittpunkte der beiden Parabeln hat also die Abflußparabel ihren Scheitel.[1] Wenn nun T_1 bzw. T_2 die Zeitdauer bedeutet, während welcher Q_1 bzw. Q_2 bis zu seinem Maximum Q_I bzw. Q_{II} wächst, haben die beiden Parabeln die Gleichungen



$$(184)\qquad \begin{cases} Q = Q_1 = Q_I \dfrac{2tT_1 - t^2}{T_1^2}, \\ Q = Q_2 = Q_{II} \dfrac{2tT_2 - t^2}{T_2^2}, \end{cases}$$

wonach die Aufspeicherung im Überschwemmungsgebiete bei dem höchsten Wasserstande die Raummenge

$$M = \int_0^{T_2} (Q_1 - Q_2)\,dt = \left[\frac{Q_I}{T_1^2}\left(T_1 t^2 - \frac{1}{3} t^3\right) - \frac{Q_{II}}{T_2^2}\left(T_2 t^2 - \frac{1}{3} t^3\right)\right]_0^{T_2}$$
$$= \frac{T_2^2}{T_1^2} Q_I \left(T_1 - \frac{1}{3} T_2\right) - \frac{2}{3} T_2 Q_{II}$$

erreicht. Nun muß der Punkt mit den Koordinaten $t = T_2$, $Q = Q_{II}$ die erste Gleichung (184) erfüllen oder

$$(184\text{a})\qquad Q_{II} = Q_I \frac{2T_1T_2 - T_2^2}{T_1^2}$$

sein. Dieser Wert in der Gleichung für M eingesetzt, gibt

$$(184\text{b})\qquad M = \frac{Q_I}{3} \frac{T_2^2}{T_1^2}[T_2 - T_1].$$

Aus (184a) folgt zugleich

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} - 2\frac{T_2}{T_1} + \frac{Q_{II}}{Q_I} = 0, \qquad \frac{T_2}{T_1} = 1 + \sqrt{1 - \frac{Q_{II}}{Q_I}},$$

und hiernach

$$M = \frac{Q_I T_1}{3}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{Q_{II}}{Q_I}}\right\}\left\{1 - \frac{Q_{II}}{Q_I} + \sqrt{1 - \frac{Q_{II}}{Q_I}}\right\},$$

1) Ähnlich *Klunzinger* 48 (1896), S. 37.

welcher Ausdruck, wenn man die Wurzelgröße

$$(184\,\mathrm{c})\qquad \sqrt{1-\frac{Q_{II}}{Q_I}}=\nu \qquad \left(\text{oder}\quad Q_I=\frac{Q_{II}}{1-\nu^2}\right)$$

setzt, auch

$$(184\,\mathrm{d})\qquad M=\nu(1+\nu)^2\frac{Q_I T_1}{3}=\nu(1+\nu)\frac{Q_I T_2}{3}=\frac{\nu}{1-\nu}\,\frac{Q_{II} T_2}{3}$$

geschrieben werden kann.

Bisher wurde angenommen, daß Anstieg und Abfall des Wassers symmetrisch erfolgen, während Hochwässer rasch anzusteigen und langsam zu fallen pflegen. Die ganze Ableitung bleibt aber auch bestehen, wenn beide Parabeln schräge — allerdings zueinander parallele — Achsen haben. Unter $2T_1$ ist dann die ganze Zeit zu verstehen, während welcher der ankommende Schwall über die Ufer tritt. Bemerkt werde noch, daß in obiger Rechnung der absteigende Ast der Ablaufkurve nicht vorkam. Er muß die Eigenschaft haben, den gesamten Ablauf gleich dem gesamten Zulauf zu machen.

Beispiel. Am Ausfluß eines Überschwemmungsgebietes, welches bei Hochwasser 1 920 000 $\mathrm{m^3}$ Wasser enthält, steigt der Fluß in 8 Stunden von Vollbord mit 50 $\mathrm{m^3\,sec^{-1}}$ auf 450 $\mathrm{m^3\,sec^{-1}}$ an. Wie groß würde der Abfluß bei Eindämmung des Überschwemmungsgebietes werden? Es ist $Q_0+Q_{II}=450$, Q_{II} also $=400\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}}$, $T_2=28\,800$ sec, $M=1\,920\,000\ \mathrm{m^3}$. Daher gilt nach (184 d) $1\,920\,000=\frac{1}{3}\cdot 400\cdot 28\,800\,\frac{\nu}{1-\nu}$ oder $\nu=\frac{1}{3}$ und $Q_{II}=\frac{8}{9}\,Q_I$, endlich $Q_0+Q_I=500\ \mathrm{m^3\,sec^{-1}}$, welche Wassermenge bei Abdämmung des Überschwemmungsgebietes unvermindert weiterflösse.

93. Seespiegelschwankung in analytischer Behandlung. *G. Fantoli*[1]) hat eine analytische Behandlung der Seespiegelschwankungen gegeben und an zahlreichen Beispielen aus der Wirklichkeit erläutert. Wenn ein See ursprünglich Spiegelschwankungen

$$(185)\qquad z=c_0\sin\pi\frac{t}{T}$$

zeigte, wobei z und c_0 Wasserstände (Pegelablesungen bei entsprechend gewähltem Pegelnullpunkte) bedeuten, und t die Zeit, T die Hochwasserdauer ist, und wenn für den Abfluß aus dem See ursprünglich

$$(185\,\mathrm{a})\qquad Q_0=a_0+b_0 z=a_0+b_0 c_0\sin\pi\frac{t}{T}$$

---

1) *G. Fantoli*, Sul regime idraulico dei laghi, Milano 1897, S. 185.

galt, so muß der Zufluß so groß gewesen sein, daß der Spiegel in der Zeit dt trotz Abfluß um

$$dz = \frac{\pi c_0}{T} \cos \pi \frac{t}{T} dt$$

anstieg und seinen Inhalt bei einer Seefläche F um

$$F\,dz = \frac{\pi c_0 F}{T} \cos \pi \frac{t}{T} dt$$

vermehrte. Der Zufluß war daher in der Zeit dt

$$\left(a_0 + b_0 c_0 \sin \pi \frac{t}{T} + \frac{\pi c_0 F}{T} \cos \pi \frac{t}{T}\right) dt.$$

Werden nun Bauten ausgeführt, welche den Abfluß derart regeln, daß er bei einem Wasserstande z nunmehr

$$Q = a_1 + b_1 z \tag{185b}$$

beträgt, so muß das die Spiegelschwankungen ändern. Bei Wiederkehr der alten Witterungszustände, also der alten Zuflußwelle gilt dann

$$a_0 + b_0 c_0 \sin \pi \frac{t}{T} + \frac{\pi c_0 F}{T} \cos \pi \frac{t}{T} = a_1 + b_1 z + \frac{dz}{dt} F.$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung lautet, wie man sich überzeugen kann,

$$z = \frac{a_0 - a_1}{b_1} + \frac{c_0}{b_1^2 T^2 + \pi^2 F^2}\Big[(b_0 b_1 T^2 + \pi^2 F^2) \sin \pi \frac{t}{T} + \pi F T (b_1 - b_0) \cos \pi \frac{t}{T}\Big]. \tag{185c}$$

Für $t = 0$ gibt diese Lösung

$$z = \frac{a_0 - a_1}{b_1} + \frac{\pi c_0 F T (b_1 - b_0)}{b_1^2 T^2 + \pi^2 F^2}. \tag{185d}$$

Nun ist nicht gesagt, daß gerade der Anfangswasserstand, wenn wieder der Spiegel zu steigen beginnt, die Höhe z_0 besitzt. *Fantoli* weist aber nach, daß bei langen Perioden von z. B. mehreren Monaten, einige Zeit z. B. mehrere Wochen nach Beginn der Anschwellung der Anfangswasserstand belanglos wird. Man kann also in diesen Fällen Gl. (185c) als die des Wasserstandes nach der Abflußregelung ansehen, und da man gemäß Gl. (185b) auch den Abfluß selbst

$$Q = a_0 + \frac{b_1 c_0}{b_1^2 T^2 + \pi^2 F^2}\Big[(b_0 b_1 T^2 + \pi^2 F^2) \sin \pi \frac{t}{T} + \pi F T (b_1 - b_0) \cos \pi \frac{t}{T}\Big] \tag{185e}$$

kennt, hiermit zahlreiche Fragen beantworten.

Beispielsweise kann man leicht angeben, wie groß nach Regelung der größte und der kleinste Abfluß Q_{max} und Q_{min} sein werden. Für sie muß $\frac{dQ}{dt} = 0$ oder

$$(b_0 b_1 T^2 + \pi^2 F^2) \cos \pi \frac{t}{T} - \pi F t (b_1 - b_0) \sin \pi \frac{t}{T} = 0$$

oder

$$\operatorname{tang} \pi \frac{t}{T} = \frac{b_0 b_1 T^2 + \pi^2 F^2}{\pi F t (b_1 - b_0)}$$

sein, woraus

$$(186) \qquad Q_{max} \text{ bzw. } Q_{min} = a_0 \pm \frac{b_1 c_0}{b_1^2 T^2 + \pi^2 F^2} \cdot \sqrt{(b_0 b_1 T^2 + \pi^2 F^2)^2 + \pi^2 F^2 T^2 (b_1 - b_0)^2}$$

folgt. Für den Unterschied, den die Ablaufbauten im Abfluß hervorrufen, zeigt sich

$$Q - Q_0 = \left[\frac{b_1 c_0}{b_1^2 T^2 + \pi^2 F^2}(b_0 b_1 T^2 + \pi^2 F^2) - b_0 c_0\right] \sin \pi \frac{t}{T} + \frac{b_1 c_0}{b_1^2 T^2 + \pi^2 F^2} \pi F T (b_1 - b_0) \cos \pi \frac{t}{T}$$
$$= \frac{\pi (b_1 - b_0) c_0 F}{b_1^2 T^2 + \pi^2 F^2}\left[\pi F \sin \pi \frac{t}{T} + b_1 T \cos \pi \frac{t}{T}\right]$$

mit dem Größtwert

$$(186a) \qquad (Q - Q_0)_{max} = \frac{\pi (b_1 - b_0) c_0 F}{\sqrt{b_1^2 T^2 + \pi^2 F^2}}.$$

94. Versagen von Sielnetzen. Im allgemeinen zieht man bei Sielnetzen nur die Leistungsfähigkeit der Siele in Betracht, nämlich die Mengen, die sie sekundlich fortzuführen vermögen. In großen Städten in *ebener* Lage kann aber auch die Aufnahmefähigkeit der Netze von Belang werden, nämlich die Wassermenge, die bei der Füllung der ursprünglich leeren Kanäle aufgenommen wird. Dies ist in Mailand der Fall, wo *G. Fantoli*[1]) für ein geplantes Netz berechnet hat, bei welcher Dauer von Regen gegebener Stärke die Straßenüberschwemmungen beginnen. Aus der entwässernden Fläche erfolge bei dem betreffenden Regen (einschließlich des Brauchwassers) in der Zeiteinheit ein Zudrang εQ_s (wobei $\varepsilon > 1$) in den Kanal, welcher bei Vollauf bis zum Scheitel nicht so viel, nämlich nur Q_s fortzuführen vermöge. Befindet sich zur Zeit t die Wassermenge M bereits unterirdisch aufgespeichert, so gilt offenbar, wenn Q den Durchfluß bezeichnet,

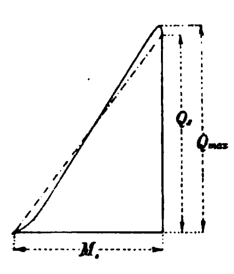
1) Le Acque di Piena nella Rete delle Fognature di Milano, relazione della commissione Cipoletti, Fantoli, Soldati per *G. Fantoli,* Milano 1904. Nicht im Buchhandel.

$$\varepsilon Q \cdot dt = Q \cdot dt + dM$$

oder

(187) $$dM = (\varepsilon Q_s - Q)\,dt.$$

Nun nimmt die Leistung (der Durchfluß Q) des Kanales mit seinem Wasserstande zu und dieser mit dem Volum M. Die Leistungsfähigkeit



des leeren Sieles mit dem Inhalte $M = 0$ ist Null, die des halbvollen Kanales bei Kreisquerschnitt halb so groß wie jene Q_s des ganz vollen. Dazwischen steigt allerdings der Durchfluß auf $Q_{max} > Q$ an, indem Kanäle (siehe oben S. 62) am meisten Wasser führen, ehe sie ganz voll sind. Näherungsweise kann aber doch das Verhältnis von Q zu M konstant angenommen oder

$$dQ = \frac{Q_s}{M_s}\,dM = \text{(siehe (187))}\ \frac{Q_s}{M_s}(\varepsilon Q_s - Q)\,dt$$

gesetzt werden, womit sich

$$dt = \frac{M_s}{Q_s}\,\frac{dQ}{\varepsilon Q_s - Q}$$

oder die Zeit zur Füllung des leeren Kanales zu solcher Höhe, daß Q in ihm abfließt,

$$t = \frac{M_s}{Q_s}\log\text{nat}\,\frac{\varepsilon Q_s}{\varepsilon Q_s - Q}$$

ergibt, während eine genauere Rechnung mit Zerlegung des Kanales in einzelne Zonen

(187a) $$t = \mu\,\frac{M_s}{Q_s}\log\text{nat}\,\frac{\varepsilon Q_s}{\varepsilon Q_s - Q} = 2{,}303\,\mu\,\frac{M_s}{Q_s}\log\text{dec}\,\frac{\varepsilon Q_s}{\varepsilon Q_s - Q}$$

geben würde. *Fantoli* hat nun gefunden, daß sowohl für verschiedene Kanaltypen, insbesondere für Röhren und eirunde Siele, als auch für dieselbe Type bei wechselndem Verhältnis ε der Beiwert μ für gleiche Durchflußverhältnisse $Q : Q_s$ fast gleiche Werte annimmt. Am meisten schwankte noch μ für ganz geringe Füllung mit der Sohlenkrümmung, was aber praktisch kaum von Bedeutung ist. Für μ gibt der Genannte nachstehende Zahlenreihe, die bis zu dem Augenblicke reicht, in dem zum erstenmal Q_s — ehe das Siel volläuft — durchfließt.

$Q : Q_s =$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20
$\mu =$	2,6	1,95	1,68	1,56	1,45	1,36	1,27
$Q : Q_s =$	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\mu =$	1,11	1,02	0,97	0,94	0,91	0,89	0,87

Hierzu kommt noch für $Q_{max} : Q_s$ der Wert $\mu = 0{,}9$. Nach Erreichung von Q_{max} gilt das Gesagte für μ nicht mehr, indem μ sich nunmehr

zwar noch unabhängig von der Kanaltype, aber abhängig von ε zeigt. Für die Zeit T zur vollständigen Füllung des leeren Kanales gelte, wie die genaue Rechnung gelehrt habe, vielmehr

$$(187\text{b})\qquad T = \left(1 + \frac{0{,}025}{\varepsilon - \frac{Q_{max}}{Q_s}}\right)\frac{M_s}{Q_s}\log\text{nat}\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

oder gewöhnlich

$$(187\text{c})\qquad T = 2{,}3026\left(1 + \frac{0{,}025}{\varepsilon - 1{,}05}\right)\frac{V_s}{Q_s}\log\text{dec}\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1},$$

so daß sich für

$\varepsilon =$	1,1	1,2	1,3	1,5	2,0	∞
$1 + \frac{0{,}025}{\varepsilon - 0{,}05} =$	1,5	1,17	1,10	1,06	1,03	1

findet.

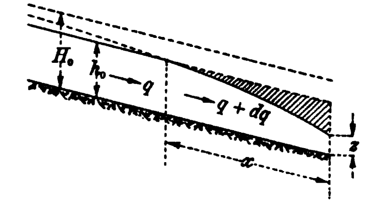
Beispiel. Bei einem bestimmten Regen laufen außer schon früher vorhandenen 0,023 m sec^{-1} Brauchwasser noch 1,006 m^3 sec^{-1} Regenwasser in einen Kanal. Wann läuft der Kanal halb und wann ganz voll, wenn er bei Vollauf 0,890 m^3 sec^{-1} führt und samt seinen Nebenkanälen dann 675 m^3 enthält?

Es ist $M_s = 675$, $\varepsilon Q_s = 1{,}029$, $Q_s = 0{,}890$, daher $2{,}303\frac{M_s}{Q_s} = 1745$. Die Füllung des leeren Kanales mit Brauchwasser würde nach (187a) wegen $Q : Q_s = 0{,}023 : 0{,}890 = 0{,}026$ und dementsprechend $\mu = 2{,}40$ die Zeit $t_0 = 2{,}40 \cdot 1745 \cdot (\log\text{dec}\,1{,}029 - \log\text{dec}\,1{,}006) = 2{,}40 \cdot 1745 \cdot 0{,}0098 = 41$ Sek. erfordern. Seine Füllung bis zu solcher Höhe, daß der Durchfluß $0{,}5\,Q_s$ beträgt, würde wegen $Q : Q_s = 0{,}5$ oder $\mu = 0{,}995$ einen Zeitaufwand $t_{0,5} = 0{,}995 \cdot 1745 \cdot (\log\text{dec}\,1{,}029 - \log\text{dec}\,0{,}584) = 0{,}995 \cdot 1745 \cdot 0{,}246 = 427$ Sek. benötigen. Das Vollaufen bis zum Scheitel würde nach (187c) wegen $\varepsilon = 1{,}029 : 0{,}890 = 1{,}156$ oder $\varepsilon : (\varepsilon - 1) = 7{,}41$ und $0{,}025 : (\varepsilon - 1{,}05) = 0{,}236$ die Zeit $T = 1745 \cdot 1{,}236 \cdot 0{,}8698 = 1876$ Sek. benötigen. Der wahre Zeitaufwand bis zur halben Leistungsfähigkeit wäre daher $t_{0,5} - t_0 = 386$ Sek., der bis zum Vollauf $T - t_0 = 1835$ Sek. Durch genaue Rechnung fanden die Mailänder Gutachter statt dessen 414 und 1818 Sek., von welchen Werten die hier berechneten viel weniger abweichen, als es bei dem vorliegenden Problem gestattet wäre.

95. Rückhalt im Werksgraben und Fluß[1]. Wenn durch ein Kraftwerk eine Entnahme $q + \Delta q$ aus der Breiteneinheit eines Wasserlaufes stattfindet, während dessen Breiteneinheit nur q aus dem Oberlauf empfängt, so macht *F. Schaffernak*[1] die angenäherte Annahme, daß vom Kraftwerk aufwärts der Spiegel eine dem Durchflusse $q + \Delta q$ entsprechende Senkungslinie beschreibt, welche sich fortgesetzt stromauf verschiebt. Die Wassermenge zwischen den zwei kongruenten Linien, welche bei zylindrischem Bett der Spiegel zu den Zeitpunkten t und $t + dt$ bildet, dient dabei zur Deckung des Mehrverbrauches $\Delta q \cdot dt$ über den Zufluß $q\,dt$. Mißt man die Entfernung x *stromab* vom jeweiligen Spiegel-

1) Bisher unveröffentlicht.

bruchpunkte, d. h. vom Punkte, in welchem die jeweilige Senkungskurve die unveränderliche Zuflußgerade schneidet, so gilt für die Senkungskurve mit veränderter Bezeichnung die Differentialgleichung (66e)



$$-i\,dx = \frac{z^{3,5}}{H_0^{3,5} - z^{3,5}}\,dz, \tag{188}$$

wobei nunmehr z die Wassertiefen in den Punkten x und H_0 jene Tiefe angibt, welche die Senkungskurven bei der Entnahme $q + \Delta q$ im Unendlichen hätten, wenn sie bis dorthin reichen würden. Das x des Kraftwerkes nimmt nach dem Gesagten fortwährend *zu* (weil der Bruchpunkt stromauf rückt) und das z des Kraftwerkes nimmt beständig *ab*. Denkt man sich den Bruchpunkt festgehalten, so rückt das Kraftwerk in der Zeit dt um dx stromab, wobei die Tiefe sich nach (188) ändert. Dadurch wächst die entleerte Fläche um $(h_0 - z)\,dx$. Es muß also, wenn h_0 die Tiefe bei gleichförmiger Strömung von q bedeutet,

$$-(h_0 - z)\,dx = \Delta q \cdot dt \tag{188a}$$

oder in Verbindung mit Gl. (188)

$$\Delta q \cdot dt = \frac{1}{i} \cdot \frac{z^{3,5}(h_0 - z)}{H_0^{3,5} - z^{3,5}}\,dz \tag{188b}$$

oder

$$\int_0^t i \cdot \Delta q \cdot dt = \int_{h_0}^{z} \frac{z^{3,5}(h_0 - z)}{H_0^{3,5} - z^{3,5}}\,dz \tag{188c}$$

oder endlich

$$\begin{aligned} i \cdot \Delta q \cdot t = h_0 z &\left\{\frac{1}{4,5}\left(\frac{z}{H_0}\right)^{3,5} + \frac{1}{8}\left(\frac{z}{H_0}\right)^{7} + \cdots\right\} \\ - h_0^2 &\left\{\frac{1}{4,5}\left(\frac{h_0}{H_0}\right)^{3,5} + \frac{1}{8}\left(\frac{h_0}{H_0}\right)^{7} + \cdots\right\} \\ - z^2 &\left\{\frac{1}{5,5}\left(\frac{z}{H_0}\right)^{3,5} + \frac{1}{9}\left(\frac{z}{H_0}\right)^{7} + \cdots\right\} \\ + h_0^2 &\left\{\frac{1}{5,5}\left(\frac{h_0}{H_0}\right)^{3,5} + \frac{1}{9}\left(\frac{h_0}{H_0}\right)^{7} + \cdots\right\}, \end{aligned} \tag{188d}$$

worin die beiden ersten Klammergrößen nach der auf S. 128 eingeführten Bezeichnungsweise auch $\Psi\left(\frac{z}{H_0}\right)$ und $\Psi\left(\frac{h_0}{H_0}\right)$ geschrieben werden können. Hiermit ist bei einzuhaltender Tiefstlage z des Oberwasserspiegels die Zeit t berechenbar, während welcher man $q + \Delta q$ statt q entnehmen kann. Es könnte nun sein, daß der Spiegelbruchpunkt schon vor der Zeit t eine Stelle erreicht, oberhalb welcher der Spiegel sich nicht senken läßt. Stürzt z. B. das Wasser über ein Wehr in den in Rede stehenden

Lauf, so ist die Senkung nur bis zu diesem Wehr durchführbar. Die Senkungskurve der Differentialgleichung (188) hat nach (66k) die Gleichung

$$\frac{ix}{H_0} = \Psi\left(\frac{h_0}{H_0}\right) - \Psi\left(\frac{z}{H_0}\right). \tag{188e}$$

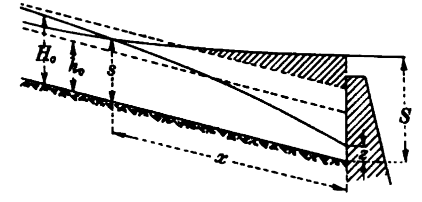
Ist das für die Tiefstlage (am Kraftwerk) z sich ergebende x kleiner als die Entfernung l des Wehres vom Kraftwerk, so hat der Bezug von $q + \Delta q$ während der errechneten Zeit t keinen Anstand, anderenfalls tritt an die Stelle von (188c) für die Berechnung von t

$$\int_0^t i \cdot \Delta q \cdot dt = \int_z^{z_w} \frac{z^{3,5}(h_0 - z)}{H_0^{3,5} - z^{3,5}} dz, \tag{188f}$$

worin z_w die Wassertiefe am Wehr bedeutet, für welche

$$\frac{il}{H_0} = \Psi\left(\frac{h_0}{H_0}\right) - \Psi\left(\frac{z_w}{H_0}\right) \tag{188g}$$

gilt. Da tatsächlich ein Teil des Wassers nicht die volle Länge x zu durchlaufen hat, sondern aus der sich entleerenden Strecke des Obergrabens selbst stammt, wird der Spiegel *tiefer* als angenommen verlaufen und gewährt *Schaffernaks* Verfahren volle Sicherheit, daß $q + \Delta q$ während der Zeit t zur Verfügung steht.



Ist bei Beginn der Mehrentnahme Δq ein Stau mit den Wassertiefen s und der größten Tiefe S am Kraftwerk vorhanden, so macht *Schaffernak* die Annahme, daß der Spiegel in der Zeit

$$t_1 = \frac{1}{i \cdot \Delta q} \int_S^H \frac{s^{3,5}(h_0 - s)}{s^{3,5} - h_0^{3,5}} ds$$

ungefähr bis zu dem der gleichförmigen Strömung herabsinke, so daß dann die Begrenzung aus einer Geraden in der Höhe H_0 über der Sohle und weiter stromauf aus dem übriggebliebenen Teil der Staukurve bestehe. Dann bilde sich bei fortgesetzter Entnahme $q + \Delta q$ die der jeweiligen Spiegelhöhe am Kraftwerke entsprechende Senkungslinie. Es bleibe daher, wenn sinngemäß h_0 durch das mit x veränderliche s ersetzt wird, die Beziehung (188a) in der Form

$$(s - z)\, dx = \Delta q \cdot dt \tag{188h}$$

aufrecht, worin wieder z am Kraftwerk in der Entfernung x vom jeweiligen Bruchpunkt zu messen ist. Da nun für den Schnittpunkt der

beiden Spiegellinien mit den Koordinaten x und s nach Gl. (66h und k) sowohl

$$\frac{ix}{h_0} = \Phi\left(\frac{S}{h_0}\right) - \Phi\left(\frac{s}{h_0}\right) \tag{188i}$$

wie auch

$$\frac{ix}{H_0} = \Psi\left(\frac{z}{H_0}\right) - \Psi\left(\frac{s}{H_0}\right) \tag{188j}$$

gelten muß, könne man, indem man die Differentiale dx und dt durch endliche Differenzen Δx und Δt ersetzt, schrittweise die Zeit des Absenkens und des Weiterrückens des Spiegelbruchpunktes ermitteln. Einem angenommenen x entspricht nämlich aus Gl. (188i) und Gl. (188j) ein bestimmtes s, das immer kleiner als H_0 ist, und ein bestimmtes z. Läßt man dann x um die Strecke Δx wachsen, so erhält man aus Gl. (188h) $\Delta t = (s - z)\,\Delta x : \Delta q$, weiß also so fortfahrend den gesuchten Zusammenhang zwischen t, z und x.

Die geschilderten Verfahren sind nur so lange anwendbar, als der Kanal oder Fluß annähernd rechteckige Querschnitte aufweist; anderenfalls empfiehlt sich eine zeichnerische Lösung, derart, daß man die räumlichen Integrationen graphisch (planimetrisch) ausführt.

Man könnte im Zweifel sein, ob in der ausgerechneten Zeit das Wasser trotz Trägheit bis zur angenommenen Senkungskurve sinken kann. Eine Nachrechnung der Schnelligkeiten $\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta q}{h_0 - z}$ und $\frac{dz}{dt} = i \cdot \Delta q \frac{H_0^{3,5} - z^{3,5}}{z^{3,5}(h_0 - z)}$, mit welchen der Spiegelbruchpunkt sich vom Kraftwerk entfernt bzw. der Spiegel am Kraftwerke sinkt, zeigt aber, daß diese Schnelligkeiten die im Absatz „Dammbruchkurve und Spülschwall" berechneten *möglichen* Werte, wenn man vom ersten Augenblick absieht, nicht erreichen. Das läßt sich auch einsehen, da bei dem Spülschwall die Fallhöhe vom ursprünglichen Spiegel zur Senkungskurve eine Beschleunigung hervorruft, die nunmehr im § 95 nicht zu berücksichtigen war.

96. Gefäßentleerung. Die Ausflußformel (135a) ermöglicht die Berechnung der zum Entleeren eines Gefäßes nötigen Zeit. Bezeichnet man den wagrechten Gefäßquerschnitt mit F, die Ausflußöffnung mit F_2, die Höhen mit z, so beträgt die Ausflußmenge in der Zeit dt

$$-F\,dz = \mu F_2 \sqrt{2gz}\,dt.$$

Danach ist

$$\frac{F\,dz}{\sqrt{2gz}} = -\mu F_2\,dt$$

und kann man bei gegebener Gefäßform die Zeit

$$t_{\mathrm{I\,II}} = \frac{1}{\mu F_2}\int_{z_{\mathrm{II}}}^{z_{\mathrm{I}}} \frac{F\,dz}{\sqrt{2gz}} \tag{189}$$

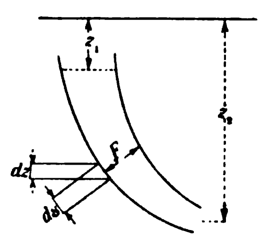
berechnen, die das Sinken des Spiegels von z_{I} auf z_{II} erfordert.

Bei einem prismatischen Gefäß vom Querschnitt F geht hiermit

$$(189\text{a}) \qquad t_{\text{I II}} = \frac{F}{\mu \sqrt{2g}\, F_2} \int_{z_{\text{II}}}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2F}{3\mu\sqrt{2g}\,F_2}\left(z_{\text{I}}^{3/2} - z_{\text{II}}^{3/2}\right)$$

hervor, wonach auch die vollständige Entleerung, obwohl zuletzt die Druckhöhe auf Null herabsinkt, nur einen endlichen Zeitaufwand benötigt. Allerdings ist, wenn sich der Spiegel dem Boden zu sehr nähert und ein Trichter über der Öffnung entsteht, die Anwendung der entwickelten Formel nicht mehr zulässig.

Die Formel (189) gilt insofern nur näherungsweise, als in ihr die Reibung an den Gefäßwänden und der Einfluß der Trägheit vernachlässigt erscheint. Behufs deren Berücksichtigung werde eine Scheibe des Gefäßinhaltes betrachtet[1]). Die Scheibendicke sei ds, der Druck p, die Scheibenfläche F, deren Profilradius R, die Geschwindigkeit w. Dann beträgt die in der Bewegungsrichtung wirkende Teilkraft der Schwere



$$\gamma F\, dz,$$

wobei die z lotrechte Ordinaten bedeuten; sie wird vom Druckunterschied beider Scheibenflächen unterstützt, während die Reibung

$$\frac{\gamma w^2}{c^2 R} F\, ds$$

entgegenwirkt. Da eine Beschleunigung

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial s}$$

entsteht, folgt aus dem *d'Alembert*schen Prinzip

$$(190) \qquad -\frac{\partial p}{\partial s} ds + \gamma\, dz - \frac{\gamma}{c^2 R} w^2 ds - \frac{\gamma\, ds}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0.$$

Hier kann die Geschwindigkeit w durch jene w_1 ausgedrückt werden, die im oberen nunmehr als zylindrisch vorausgesetzten Teile des Gefäßes herrscht, wo der Querschnitt F_1 messen möge. Da im selben Augenblicke der Durchlauf allenthalben gleich groß sein muß, hat man

$$Fw = F_1 w_1$$

und hiermit statt (190) auch

$$-\frac{1}{\gamma} dp + dz - \frac{1}{c^2 R}\cdot\frac{F_1^2}{F^2} w_1^2 ds - \frac{F_1}{gF}\frac{\partial w_1}{\partial t} ds - \frac{1}{2g}\frac{\partial(w^2)}{\partial s} = 0$$

1) *H. Lorenz*, Lehrbuch der technischen Physik, 3. Bd., München—Berlin 1910, S. 168. — In (190) erscheint ∂p und nicht $\partial(pF)$, weil die Wandreaktion die Wirkung von ∂F aufhebt.

oder für das ganze Gefäß, also nach Integration zwischen den Grenzen 1 und 2, wenn an der Ausflußfläche F_2 neben dem Druck p_2 noch ein Widerstand $\frac{\gamma \zeta F_2 w_2^2}{2g}$ zu überwinden ist,

$$(190\text{a}) \quad \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_2 - z_1 - \frac{w_1^2 F_1^2}{c^2} \int_1^2 \frac{ds}{RF^2} - \frac{F_1}{g} \frac{\partial w_1}{\partial t} \int_1^2 \frac{ds}{F} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} - \frac{\zeta}{2g} F_2^2 w_2^2 = 0.$$

Gl. (190a) bildet das genaue Ausflußgesetz in allgemeinster Form. Ist der Druck auf beide Endflächen der atmosphärische, womit $p_1 - p_2$ entfällt, ferner die Reibung an den Wänden verschwindend und das Gefäß ein lotrechter Zylinder, so vereinfacht sich (190a) zu

$$z_2 - z_1 - \frac{1}{g} \frac{\partial w_1}{\partial t} (z_2 - z_1) - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} - \frac{\zeta}{2g} F_2^2 w_2^2 = 0,$$

oder, weil bei lotrechtem Gefäßanfang für die Spiegelteilchen

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial t} = \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \cdot w_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial (w_1^2)}{\partial z_1}$$

ist, zu

$$(190\text{b}) \quad z_2 - z_1 - \frac{z_2 - z_1}{2g} \frac{\partial (w_1^2)}{\partial z_1} - \frac{w_1^2}{2g} \left[\frac{F_1^2}{F_2^2} (1 + \zeta) - 1 \right] = 0,$$

worin z_2 die unveränderliche Tiefenlage der Ausflußöffnung, z_1 die veränderliche des Spiegels vorstellt. Wird hier

$$(190\text{c}) \quad \frac{F_1^2}{F_2^2} (1 + \zeta) - 1 = Z$$

gesetzt, so verkürzt sich die Form der Gl. (190b) zu

$$(190\text{d}) \quad z_2 - z_1 - \frac{z_2 - z_1}{2g} \frac{\partial (w_1^2)}{\partial z_1} - \frac{Z w_1^2}{2g} = 0.$$

Die allgemeine Lösung von (190d) lautet mit C als Integrationskonstanten

$$(190\text{e}) \quad w_1^2 = C (z_2 - z_1)^Z + 2g \frac{z_2 - z_1}{Z - 1}.$$

Dies leuchtet ein, wenn man (190e) differenziert und

$$-\frac{z_2 - z_1}{2g} \frac{\partial (w_1^2)}{\partial z_1} = \frac{ZC}{2g} (z_2 - z_1)^Z + \frac{z_2 - z_1}{Z - 1}$$

aufsucht. In der Anfangslage, für $z_1 = 0$, ist die Geschwindigkeit w_1 der Spiegelteilchen Null, so daß aus (190e)

$$0 = C z_2^Z + \frac{2g z_2}{Z - 1} \quad \text{oder} \quad C = -\frac{2g}{(Z - 1) z_2^{Z-1}}$$

folgt und sich die eigentliche Lösung

$$(190\text{f}) \quad w_1^2 = -\frac{2g z_2}{Z - 1} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2} \right)^Z + 2g \frac{z_2 - z_1}{Z - 1}$$

oder auch

$$\text{(190g)} \qquad \frac{Z-1}{2g} w_1^2 = -z_2 \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2}\right)^Z + z_2 - z_1$$

ergibt. Danach wächst die Geschwindigkeit bis

$$\frac{Z-1}{2g} \frac{\partial (w_1^2)}{\partial z_1} = Z \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2}\right)^{Z-1} - 1 = 0$$

oder

$$\text{(191)} \qquad \frac{z_1}{z_2} = 1 - \left(\frac{1}{Z}\right)^{\frac{1}{Z-1}}$$

wird. Wenn nun, wie dies meistens zutrifft, die Öffnungsfläche F_2 viel kleiner als der Gefäßquerschnitt F_1 und somit Z eine sehr große Zahl ist, bildet nach Gl. (191) $\frac{z_1}{z_2}$ einen sehr kleinen Bruch. Nur während einer verschwindend kurzen Strecke und Zeit wächst in diesem Falle die Geschwindigkeit, um dann wieder abzunehmen, der Erfahrung entsprechend, welche lehrt, daß die Wachstumsperiode nicht merklich ist. In (190f) verschwindet, wenn F_2 viel kleiner als F_1 ist, sobald z_1 merklich wird, das Glied mit dem Exponenten Z und gilt daher

$$\text{(191a)} \quad w_1 = \sqrt{2g \frac{z_2 - z_1}{Z-1}} = \sqrt{2g \frac{z_2 - z_1}{\frac{F_1^2}{F_2^2}(1+\zeta) - 2}} = \text{nahezu} \frac{F_2}{F_1} \sqrt{2g \frac{z_2 - z_1}{1+\zeta}},$$

also für alle praktische Fälle die *Torricelli*sche Formel mit Berücksichtigung des Druckverlustes

$$\text{(190b)} \qquad w_2 = \sqrt{2g\left(z_2 - z_1 - \zeta \frac{w_2^2}{2g}\right)}.$$

Ist beispielsweise $F_1 : F_2 = 100$, $z_2 - z_1$ anfangs $= 1$ m, $\zeta = 0{,}1$, so folgt aus (190c) $Z = 10999$ und für die der Maximalgeschwindigkeit zukommende Spiegelsenkung nach (191)

$$z_1 = 1 \left[1 - \left(\frac{1}{10999}\right)^{\frac{1}{10998}}\right] = 1 - 0{,}99915 = 0{,}00085 \text{ m}.$$

Die Maximalgeschwindigkeit selbst bestimmt sich nach (191a) zu

$$w_1 = \sqrt{2g \frac{0{,}99915}{10998}} = 0{,}0422 \text{ m sec}^{-1},$$

womit ersichtlich ist, daß die Senkung von 0,00085 m und hiermit die Maximalgeschwindigkeit in kaum meßbarer Zeit erreicht wird[1]).

---

1) Das Beispiel ist entnommen *H. Lorenz*, Lehrbuch, 3. Bd., 1910, S. 175, nur ist dort $\left(1 - \frac{Z-1}{Z}\right)^{\frac{1}{Z}}$ = ungefähr $1 - \frac{Z-1}{Z^2}$ gesetzt, was nur bei einem kleinen Wert von $\frac{Z-1}{Z}$ zutrifft.

XII. Schwingungen.

97. Reibungslose Schwingungen. *I. Newton*[1]) behandelte die Schwingungen in einer U-förmig gebogenen Röhre. Steht in einem Schenkel der Spiegel um ein Stück z höher als im andern, besitzt die gefüllte Strecke die Länge l und das Rohr den Querschnitt F, so wirkt ein Überdruck $\gamma z F$ auf die Masse $\frac{\gamma}{g} Fl$. Bedeutet t die Zeit, also $-\frac{1}{2}\frac{dz}{dt}$ die Geschwindigkeit in jedem der beiden Schenkel und $-\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ die Beschleunigung, so gilt demnach nach dem Impulssatz

$$-\frac{\gamma}{g} Fl \frac{d^2z}{dt^2} = 2\gamma z F \quad \text{oder} \quad -\frac{l}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = 2z.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung lautet, wenn man verlangt, daß für $t = 0$ die Geschwindigkeit auch $= 0$ sei, und daß der größte Spiegelunterschied (die Schwingungsweite) $\pm Z$ betrage

$$z = Z \cos \sqrt{\frac{2g}{l}}\, t. \tag{192}$$

Das Wasser macht also Sinusschwingungen, und die sogenannte einfache Schwingungsdauer zwischen einer Höchstlage und einer Tiefstlage desselben Spiegels beträgt

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}, \tag{192a}$$

ist also von der Ausschlagweite unabhängig und der eines Pendels von der Länge $\frac{l}{2}$ gleich.

Johann Bernoulli[2]) zeigte, daß, wenn die Schenkel die Neigungen α_1 und α_2 haben, das Pendel gleicher Schwingungsdauer die Länge

$$\frac{l}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2} \tag{193}$$

besitzt.

Liegen bei Enden mit senkrechter Achse die beiden freien Oberflächen F_1 und F_2 in der Entfernung z_1 und z_2 von der Gleichgewichtslage (Spiegelgleiche), wobei die Ausschläge z_1 und z_2 dasselbe Vorzeichen erhalten mögen, so muß wegen der Gleichheit des Durchflusses im ganzen Gefäß

$$F_1 \frac{dz_1}{dt} = F_2 \frac{dz_2}{dt}$$

1) Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, London 1687, lib. 2, sectio 8.

2) Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae tom. 2 ad annum 1727 (1729), S. 200.

sein. Zugleich gilt für den Spiegelunterschied

$$z = z_1 + z_2$$

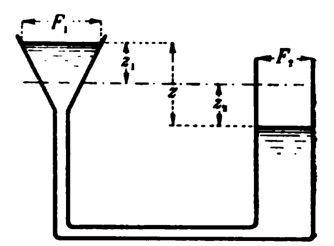
und

(194)
$$dz = dz_1 + dz_2 = \frac{F_1 + F_2}{F_2} dz_1,$$

wonach sich der Durchfluß

(194a)
$$F_1 \frac{dz_1}{dt} = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} \frac{dz}{dt}$$

findet. Der Übertritt der Durchflußmenge aus dem Gebiete mit höherem in jenes mit einem um z niedrigerem Spiegel liefert Arbeit, die zur Vermehrung der lebendigen Kraft des Wassers dient. Die Geschwindigkeit an einer Stelle vom Querschnitte F_s, welcher in der längs der Gefäßmittellinie gemessenen Entfernung s vom Gleichgewichtsspiegel der ersten Gefäßseite liegen möge, beträgt



$$\frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} \frac{dz}{dt} : F_s,$$

und daher die lebendige Kraft der Scheibe von der Dicke ds

$$\gamma \frac{F_s ds}{2g} \left[\frac{F_1 F_2}{(F_1 + F_2) F_s} \frac{dz}{dt}\right]^2 = \frac{\gamma}{2g} \frac{F_1^2 F_2^2}{(F_1 + F_2)^2 F_s} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 ds.$$

Sie vermehrt sich, wie die Differentiation nach t lehrt, in der Zeit dt um

$$\frac{\gamma}{g} \frac{F_1^2 F_2^2}{(F_1 + F_2)^2 F_s} \frac{d^2 z}{dt^2} dz\, ds.$$

Für das ganze Gefäß ist also die Arbeit einerseits und die Vermehrung der lebendigen Kraft andererseits

$$-\gamma \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} z\, dz = \frac{\gamma}{g} \frac{F_1^2 F_2^2}{(F_1 + F_2)^2} \frac{d^2 z}{dt^2} dz \int_1^2 \frac{ds}{F_s}$$

und so gilt

$$-z = \frac{1}{g} \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} \frac{d^2 z}{dt^2} \int_1^2 \frac{ds}{F_s}.$$

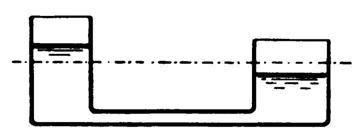
Hieraus folgt, wenn man das über den wassererfüllten Raum zu erstreckende Integral

(195)
$$\int \frac{ds}{F_s} = \frac{l}{F}$$

setzt, also das System durch ein Rohr von der Länge l und dem Querschnitt F ersetzt,

(195a)
$$-z = \frac{1}{g} \frac{l F_1 F_2}{F(F_1 + F_2)} \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Nunmehr werde angenommen, daß die Endräume Zylinder bilden, oder aber bei beliebiger Gefäßform, daß die Schwingungen in derart engen Grenzen bleiben, daß man dennoch F_1 und F_2 als konstant betrachten darf (wobei man unter F_1 und F_2 die Mittelwerte im Bereiche der Schwingung versteht). Ferner sei auch das durch Gl. (195) eingeführte $l : F$ *konstant*, nämlich[1]) bei zylindrischen Endräumen $F_1 = F_2$, oder *nahezu konstant*, nämlich bei ungleichen zylindrischen Endräumen, jeder Zylinderquerschnitt viel größer als jener des Verbindungsrohres oder auch bei beliebiger Gefäßform die Schwingung recht klein.



Unter diesen Annahmen lautet die Lösung von (195 a) genau bzw. angenähert, wenn zur Zeit $t = 0$ der Spiegelunterschied z sein Maximum haben und $= Z$ sein soll,

$$z = Z \cos \sqrt{g \frac{F(F_1 + F_2)}{l F_1 F_2}}\, t. \tag{195 b}$$

Es folgt sofort für den Ausschlag des Spiegels der ersten Gefäßseite

$$z_1 = \frac{F_2}{F_1 + F_2} z = \frac{F_2 Z}{F_1 + F_2} \cos \sqrt{g \frac{F(F_1 + F_2)}{l F_1 F_2}}\, t. \tag{195 c}$$

Auch im betrachteten Falle befolgt, wie schon *Daniel Bernoulli*[2]) nachwies, das Wasser die Pendelgesetze, und zwar erfordert die einfache Schwingung (Höchst- bis Tiefstlage desselben Spiegels) die Zeit

$$T = \pi \sqrt{\frac{l F_1 F_2}{g F(F_1 + F_2)}}. \tag{196}$$

98. Schwingungen mit der Geschwindigkeit proportionaler Dämpfung. Wenn die Bewegung des Wassers Reibungswiderstände und dadurch einen Druckhöhenverlust hervorruft, der der *ersten Potenz*[3]) der Geschwindigkeit proportional, also durch

$$\tau \frac{dz}{dt}$$

ausdrückbar ist, tritt zur linken Seite von (195 a) ein Glied hinzu und verwandelt letztere in

$$-z - \tau \frac{dz}{dt} = \frac{l}{g} \frac{F_1 F_2}{F(F_1 + F_2)} \frac{d^2 z}{dt^2}, \tag{197}$$

1) So z. B. in *H. de Lagrené*, Cours de navigation intérieure, Paris 1869, 3, S. 135.

2) *Danielis Bernoulli*, Hydrodynamica, Argentorati 1738, S. 118, 120.

3) Nach *P. Stäckel* in Enzykl. d. mathem. Wissensch. 4. Mechanik, 1. Teilband, S. 522 gaben die Oszillationen der Magnetnadel den ersten Anlaß zur Untersuchung gedämpfter Schwingungen. Ebenda die weitere geschichtliche Entwicklung.

worin $lF_1F_2 : F(F_1 + F_2)$ unter denselben Bedingungen wie in (195 a) als ganz oder nahezu konstant betrachtet werden darf. Diese Bedingungen seien erfüllt, womit sich mit den konstanten Größen

$$(197\,a)\qquad m_1 = \frac{g\tau}{2l}\,\frac{F(F_1+F_2)}{F_1F_2},\quad n^2 = \frac{g}{l}\,\frac{F(F_1+F_2)}{F_1F_2}$$

die Differentialgleichung (197) in

$$(197\,b)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} + 2m_1\frac{dz}{dt} + n^2z = 0$$

verwandelt. Werden alle Größen in m und sec ausgedrückt, so ist der Druckverlust z in m, t und τ in sec, m_1 in sec^{-1} und n ebenfalls in sec^{-1} zu messen. Die allgemeine Lösung lautet

$$(197\,c)\quad z = Z_1e^{-m_1t}\cos\sqrt{n^2-m_1^2}\,t + Z_2e^{-m_1t}\sin\sqrt{n^2-m_1^2}\,t.$$

Von ihrer Richtigkeit kann man sich überzeugen, indem man

$$(197\,d)\quad \frac{dz}{dt} = -Z_1e^{-m_1t}(m_1\cos\sqrt{n^2-m_1^2}\,t + \sqrt{n^2-m_1^2}\sin\sqrt{n^2-m_1^2}\,t) + \\ - Z_2e^{-m_1t}(m_1\sin\sqrt{n^2-m_1^2}\,t - \sqrt{n^2-m_1^2}\cos\sqrt{n^2-m_1^2}\,t),$$

ferner (bei abgekürzter Schreibweise der trigonometrischen Funktionen)

$$(197\,e)\quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z_1e^{-m_1t}[(2m_1^2-n^2)\cos + 2m_1\sqrt{n^2-m_1^2}\sin] + \\ + Z_2e^{-m_1t}[(2m_1^2-n^2)\sin - 2m_1\sqrt{n^2-m_1^2}\cos]$$

ableitet und diese Ausdrücke in (197 b) einsetzt.

Nach (197 c) macht der Spiegel, wenn $\sqrt{n^2-m_1^2}$ eine reelle Größe ist, Schwingungen von ständig abnehmender Weite, aber stets gleicher einfacher Schwingungsdauer

$$(197\,f)\quad T = \pi : \sqrt{n^2-m_1^2} = \pi : \sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{F(F_1+F_2)}{F_1F_2}\left[1 - \frac{\tau^2}{4}\,\frac{g}{l}\,\frac{F(F_1+F_2)}{F_1F_2}\right]}.$$

Ist $n^2 < m_1^2$ oder $\tau^2gF(F_1+F_2) > 4lF_1F_2$, so empfiehlt es sich, die trigonometrischen Funktionen durch Exponentialfunktionen zu ersetzen, das heißt

$$(198)\quad z = \frac{1}{2}Z_1e^{-m_1t}[e^{\sqrt{m_1^2-n^2}\,t} + e^{-\sqrt{m_1^2-n^2}\,t}] \\ + \frac{1}{2}Z_2e^{-m_1t}[e^{\sqrt{m_1^2-n^2}\,t} + e^{-\sqrt{m_1^2-n^2}\,t}] \\ = e^{-m_1t}[Z_1\operatorname{Cof}\sqrt{m_1^2-n^2}\,t + Z_2\operatorname{Sin}\sqrt{m_1^2-n^2}\,t]$$

zu schreiben. Der erste Differentialquotient verwandelt sich dabei in

$$(198\,a)\quad \frac{dz}{dt} = -Z_1e^{-m_1t}[m_1\operatorname{Cof}\sqrt{m_1^2-n^2}\,t + \sqrt{m_1^2-n^2}\operatorname{Sin}\sqrt{m_1^2-n^2}\,t] - \\ - Z_2e^{-m_1t}[m_1\operatorname{Sin}\sqrt{m_1^2-n^2}\,t - \sqrt{m_1^2-n^2}\operatorname{Cof}\sqrt{m_1^2-n^2}\,t].$$

Da der absolute Wert der Tang stets < 1 ist, kann nur dann $z = 0$ werden, wenn dem absoluten Wert nach $Z_1 < Z_2$ ist. Auch ändert sich z nicht periodisch und die Spiegel schwingen nicht, sondern nähern sich allmählich der Ruhelage.[1]) Ist eine Dämpfung vorhanden, die der *Geschwindigkeit proportional* ist,[2]) so können die Spiegel demnach entweder in gleichen Zeiträumen *Schwingungen vollführen oder auch* unter Umständen mit oder ohne einmalige Kreuzung der Gleiche *sich allmählich* letzterer *nähern*, bis sie sie nach unendlich langer Zeit erreichen (Aperiodizität).

99. Schwingungen mit dem Geschwindigkeitsquadrate proportionaler Dämpfung. Tatsächlich sind die Widerstände nicht der ersten, sondern wesentlich der *zweiten* Potenz[3]) der Geschwindigkeit proportional. Der Druckverlust ist also, wenn bis auf das neue Zeichen g_1 die früheren Bezeichnungen beibehalten werden, durch

$$\frac{1}{g_1}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

auszudrücken, worin g_1 die Dimension m sec^{-2} (wie die Beschleunigung g der Schwere) hat. Zur Erleichterung der Vorzeichenwahl werde jeder *Gang* für sich betrachtet, nämlich die Bewegung von einem Umkehrpunkte zum nächstfolgenden. Er besteht aus der *Zureise*, von der äußersten Lage zur Gleiche, und der *Ausreise*, d. i. die Bewegung von der Gleiche zur nächsten äußersten Lage. Das z des Gangbeginnes werde als positiv angesehen, so daß nach jedem Gang eine Vorzeichenumkehr stattfindet. Zum Unterschiede vom Gang werde unter Schwingung die Bewegung von einer Gleichenlage zur nächsten, also eine Ausreise mit der folgenden Zureise verstanden. Bei der gewählten Bezeichnung tritt an Stelle von (195a) und (197)

$$(199)\qquad -z + \frac{1}{g_1}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{g}\,\frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}\,\frac{d^2 z}{dt^2}\int_1^2 \frac{ds}{F_s} = \frac{l F_1 F_2}{g F (F_1 + F_2)}\,\frac{d^2 z}{dt^2},$$

1) *S. D. Poisson,* Mécanique 2. éd. (1833) 1, S. 351, *C. G. Gauß*, Werke 5, S. 394.

2) Die Bewegung bei zur Geschwindigkeit proportionaler Dämpfung hat auch *O. Lueger,* Wasserversorgung der Städte, Darmstadt 1890, S. 114 behandelt. Er faßt $F_1 z$ als „treibende Kraft" auf und vergißt, daß dieser Kraft Gegendrücke der Sohle entgegenwirken. Seine Ergebnisse sind daher unrichtig.

3) Schon von *J. Newton,* Principia pars 2, sectio 6 und von *S. D. Poisson,* Mécanique 1, 1811, S. 405 behandelt. Mit quadratischer Dämpfung berechnet *G. Coriolis* die Schwingung in einem *Caligny*schen Stoßheber, Journ. de math. 3 (1838), S. 445f.

worin (wie oben für die Integration von (195 a) vorausgesetzt wurde) F_1, F_2, F und l ganz oder nahezu unveränderlich seien. Dann läßt sich (199) in der Form

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + n^2 z = 0 \tag{199a}$$

schreiben, worin m und n Konstante bedeuten und

$$m = 2\frac{g}{g_1}\frac{F(F_1 + F_2)}{lF_1F_2}, \quad n^2 = \frac{gF(F_1 + F_2)}{lF_1F_2} \tag{199b}$$

ist, also n denselben Wert wie oben in (197 a) hat. Mißt man in Meter und Sekunden, so hat m die Dimension m^{-1}. Die Lösung von (199 a) lautet

$$e^{-mz}\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \frac{2n^2}{m}z - \frac{2n^2}{m^2}\right] + C = 0. \tag{199c}$$

In der Tat liefert die Differentiation von (199 c)

$$e^{-mz}\left[-m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2n^2 z + \frac{2n^2}{m} + 2\frac{d^2 z}{dt^2} - 2\frac{n^2}{m}\right]\frac{dz}{dt} = 0$$

oder nach Abkürzung die zu integrieren gewesene Gl. (199 a). Aus (199 c) folgt weiter

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2n^2}{m}z + \frac{2n^2}{m^2} - Ce^{mz}}. \tag{199d}$$

Für ein maximales $z = Z$ muß $\frac{dz}{dt} = 0$ sein, womit zugleich gesagt ist, daß, wenn die Ausschlagweite erreicht ist, das gesamte Wasser einen Augenblick stillsteht. Kennt man Z, so kann man für den einsetzenden Gang

$$C = \frac{2n^2}{m^2}(mZ + 1)e^{-mZ} \tag{200}$$

und hiermit

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2n^2}{m^2}[mz + 1 - (mZ + 1)e^{m(z-Z)}]} \tag{200a}$$

angeben. Aus (200) läßt sich ein Schluß auf die auf Z folgenden Ausschlagweiten ziehen. Aus (200) folgt

$$mZ + 1 = \frac{m^2}{2n^2}Ce^{mZ}$$

oder

$$mZ - \log\operatorname{nat}(mZ + 1) = \log\operatorname{nat}\frac{2n^2}{m^2 C},$$

und hiermit für zwei aufeinander folgende größte Spiegelunterschiede bei Addition der Konstanten 1 die Gleichung[1])

$$(mZ_{\mathrm{I}} + 1) - \log\operatorname{nat}(mZ_{\mathrm{I}} + 1) = (mZ_{\mathrm{II}} + 1) - \log\operatorname{nat}(mZ_{\mathrm{II}} + 1). \tag{201}$$

---

1) Schon von *F. Prášil* abgeleitet, Schweiz. Bauz. 52 (1908), S. 334.

Die Beziehung (201) liefert für jedes Z_I das nächstfolgende Z_{II}, und zwar mit negativem Vorzeichen und kleinerem absolutem Wert als Z_I. Für den nächsten Gang ist zufolge der eingangs getroffenen Bestimmung dann wieder Z_{II} als positiv zu betrachten. Es findet sich für die Verhältniswerte

$mZ_I =$	∞	10	8	6	5	4
$mZ_{II} =$	1	0,9998	0,9989	0,9936	0,9849	0,9651

$mZ_I =$	3	2,5	2	1,5	1
$mZ_{II} =$	0,9207	0,8809	0,8214	0,7316	0,5936

Für alle großen mZ_I weicht demnach mZ_{II} wenig von 1 ab. Durch wiederholte Anwendung der Formel (201) erhält man von irgend einem mZ ausgehend eine fortlaufende Reihe dieser Proportionalzahlen. Nach *W. Liebisch*[1]) haben die ersten 20 auf den Anfangsausschlag ∞ folgenden mZ die nachstehenden absoluten Werte

	1	0,5936	0,4240	0,3301	0,27035	0,2290
0,1986	0,1753	0,1570	0,1420	0,1298	0,1194	0,1106
0,1030	0,0964	0,0906	0,0854	0,0808	0,0767	0,0730

Diese Zahlenreihe ist nur anwendbar, wenn das mZ, mit dem die Schwingung einsetzt, mit einem der in ihr enthaltenen Werte zusammenfällt. Für den allgemeinen Fall, daß die Bewegung mit einer beliebigen Auslenkung anfängt, gilt[2]) noch die Näherungsformel

$$\frac{1}{mZ_{II}} - \frac{1}{mZ_I} = \frac{2}{3}, \tag{202}$$

die sich auf *absolute* Werte von Z_I und Z_{II} bezieht. Die Formel (202) ist brauchbar, wenn $mZ_I < 1$ ist, was, wenn es nicht schon für den ersten Gang, doch stets bei dem zweiten und umsomehr bei jedem folgenden zutrifft. Für $mZ_I = 0{,}1$ bzw. $0{,}01$ stimmen die Ergebnisse von (202) mit den genauen von (201) in den ersten 4 bzw. 7 Stellen überein. Schreibt man (202) für x aufeinander folgende Gänge mit den

---

1) Z. d. öst. I. u. A.V. 63 (1911), S. 280, s. auch ebenda S. 536 u. *R. Grammel*, Zeitsch. f. d. gesamte Turbinenwesen 10 (1913), S. 129.

2) Die Reihenentwickelung von (201) liefert, wenn Z_I und Z_{II} absolute Werte bedeuten,

$$\frac{1}{2}(Z_I^2 - Z_{II}^2) = \frac{m}{3}(Z_I^3 + Z_{II}^3) = \text{ungefähr } \frac{m}{3}(Z_I^2 Z_{II} + Z_I Z_{II}^2).$$

Hieraus folgt Gl. (202). Empirisch hat Marquis *A. de Caligny* (Recherches sur les oscillations de l'eau, 1, Versailles, S. 20) eine ähnliche Gleichung gefunden.

Ausschlagweiten (Spiegeldifferenzen) Z_0, $Z_I \ldots Z_x$ an, so folgt[1]) durch Addition

$$\frac{1}{mZ_x} - \frac{1}{mZ_0} = \frac{2}{3}x. \tag{202 a}$$

Betrachtet man drei aufeinander folgende größte Spiegelunterschiede Z_I, Z_{II} und Z_{III}, so gilt, soweit (202) zutrifft,

$$\frac{1}{Z_I} + \frac{1}{Z_{III}} = \frac{2}{Z_{II}}. \tag{202 b}$$

Sind alle Widerstände, ist also die Dämpfung dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, so gerät das Wasser nach dem Gesagten in *nicht aufhörende* Schwingungen, die, wie sich zeigen wird, schließlich in reine Sinusschwingungen übergehen. Die Dämpfung wird eben bei unendlich kleiner Geschwindigkeit im zweiten Grade unendlich klein. Sind daneben Widerstände vorhanden, die der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional sind, so werden diese schließlich für den Gang der Erscheinung maßgebend.

Aus Gl. (200 a) läßt sich leicht ein Schluß auf die Änderung des Spiegelunterschiedes z mit der Zeit ziehen, wenn die Bewegung soweit fortgeschritten ist, daß $e^{m(z-Z)}$ sehr klein und geht (200 a) in die Beziehung

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2n^2}{m^2}(mz+1)}$$

über, die für die Zeit $t_{I\,II}$, welche die Verringerung eines kleinen Spiegelunterschiedes z_I auf z_{II} erfordert,

$$t_{I\,II} = \frac{\sqrt{2}}{n}\left[\sqrt{mz_I+1} - \sqrt{mz_{II}+1}\right] \tag{202 c}$$

ergibt, oder wenn man m und n gemäß (199 b) ausdrückt,

$$t_{I\,II} = 2\left[\sqrt{\frac{z_I}{g_1} + \frac{l}{2g}\frac{F_1F_2}{F(F_1+F_2)}} - \sqrt{\frac{z_{II}}{g_1} + \frac{l}{2g}\frac{F_1F_2}{F(F_1+F_2)}}\right]. \tag{202 d}$$

Ist eine Vernachlässigung in (200 a) unstatthaft, so müßte man, um t durch mz auszudrücken, eine Integration ausführen, die recht mühsam ausfiele, weil das Integral sich nicht in geschlossener Form anschreiben läßt. Für den Sonderfall, daß das Integral zwischen $z = 0$ (der Gleiche) und einem jener oben angegebenen mZ zu nehmen sei, die auf eine unendlich große Ausschlagweite folgen, hat *Liebisch*[2]) die Berechnung unternommen. Er gibt nachstehende Tabelle, deren Integralwerte x noch durch n zu dividieren sind, damit man die Zeitdauer einer Zu- oder Ausreise erhält.

1) Z. d. öst. I.- u. A.-V. 63 (1911), S. 280.
2) Ebenda S. 280.

	Veränderung von mZ		Integralwert $\varkappa$		
	Zureise	Ausreise	Zureise	Ausreise	Summe
1. Gang	∞ bis 0	0 bis 1	∞	$\sqrt{2}$	∞
2. „	1 „ 0	0 „ 0,594	1,747	1,475	3,222
3. „	0,594 „ 0	0 „ 0,424	1,673	1,502	3,175
4. „	0,424 „ 0	0 „ 0,330	1,643	1,517	3,160
5. „	0,330 „ 0	0 „ 0,270	1,627	1,527	3,153

Man erkennt, daß sich die Summe der $\varkappa$ immer der Zahl π, also die Zeitdauer der Gänge immer mehr der Größe

$$\frac{\pi}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{F_1 F_2}{F(F_1+F_2)}} \tag{203}$$

nähert. Gleiches gilt für die Dauer der sogen. einfachen Schwingungen (Ausreise mit anschließender Zureise). Die berechneten $\varkappa$ beziehen sich auf bestimmte Werte von mZ, dabei zeigt es sich nach *Liebisch*, daß für $mZ < 1$ die Näherungsformel

$$\varkappa = \frac{\pi}{2} \mp \frac{mZ}{6} + \left(\frac{mZ}{10}\right)^2 \tag{203a}$$

zutrifft, in welcher das obere Zeichen für die Ausreise nach dem maximalen Spiegelunterschied Z, das untere für die Zureise von Z bis zur Gleiche gilt. Endlich gibt der Genannte noch nachstehende Tabelle, die guten Einblick in den Gang der Erscheinung gewährt.

mZ	$n$fache Zeitdauer von der Höchstlage eines Spiegel bis		
	Ende der Beschleunigung	Spiegelausgleich	Tiefstlage
∞	0,0	∞	∞
1000	0,186	48,36	44,77
200	0,386	18,71	20,12
80	0,460	11,42	12,84
40	0,576	7,80	9,21
20	0,700	5,28	6,70
10	0,854	3,612	5,026
5	1,020	2,579	3,998
2	1,221	1,941	3,383
1	1,345	1,747	3,222
0	$\pi/2$	$\pi/2$	π

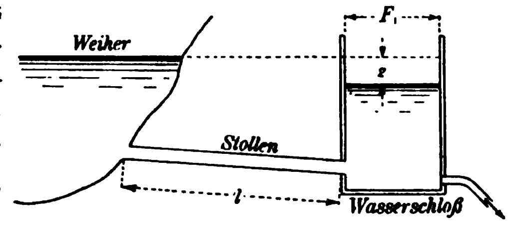
Hiernach erreicht das Wasser seine größte Geschwindigkeit stets, ehe es in die Gleiche einspielt, und zwar vergleichsweise um so früher, je größer bei gegebener Behälter- und Rohrform, also gegebenem m, die Ausschlagweite ist, mit der es seine Bewegung beginnt. Eine Zeitdauer selbst erhält man aus der entsprechenden Tabellenzahl, indem man letztere durch n dividiert, also mit $\sqrt{l F_1 F_2 : g F(F_1+F_2)}$ multipliziert.

Zum Schlusse sei noch erinnert, daß man aus jedem Spiegelunterschied z (oder Z) den zugehörigen Spiegelausschlag z_1 (bzw. Z_1) einer Gefäßseite über der Gleiche leicht berechnen kann, indem gemäß (194) und (194a)

$$(204)\qquad \begin{cases} z_1 = \dfrac{F_2}{F_1 + F_2}\, z, & Z_1 = \dfrac{F_2}{F_1 + F_2}\, Z, \\ z_2 = \dfrac{F_1}{F_1 + F_2}\, z, & Z_2 = \dfrac{F_1}{F_1 + F_2}\, Z \end{cases}$$

ist.

100. Schwingungen in einem Wasserschloß. Ein System bestehe aus einem Stauweiher, dessen Spiegel man als unendlich groß betrachten darf, einem Stollen vom Querschnitt F und einem Wasserschloß von der Grundfläche F_1, die beträchtlich größer als der Stollenquerschnitt sei. Die Geschwindigkeiten im Wasserschloß sind dann viel geringer als im Stollen und da überdies die Wassertiefe des Wasserschlosses viel kleiner als die Stollenlänge ist, braucht man die Arbeit, welche die Beschleunigung der Masse im Wasserschloß verursacht, nicht zu berücksichtigen. Bei Wiederholung der früheren Betrachtung[1]) hat man, wenn man die Geschwindigkeit im



Stollen mit U und den Wasserspiegelunterschied von Weiher und Wasserschloß mit z bezeichnet, als Menge, die im Zeitteilchen dt aus dem Raum mit höherem Spiegel in den mit niedrigerem tritt, $\gamma F U$. Bei dem Übertritt verrichtet das Wasser also eine Arbeit

$$\gamma F U z\, dt.$$

Dieselbe wird zum Teil durch die Reibung im Stollen verbraucht und zwar sei der Druckverlust bei einer Stollenlänge l und einem Profilradius R

$$h = \frac{l}{c^2 R} U^2.$$

1) Dieses Problem hat, insbesondere unter Annahme eines zur Geschwindigkeit proportionalen Druckverlustes, *F. Prášil* eingehend behandelt, in der Schweiz. Bauz. 52 (1908), S. 271, 301, 317, 333. Vorher berührt ist es in *A. Budau*, Druckschwankungen in Turbinenzuleitungen (als Manuskript gedruckt), Wien 1905, sowie von *H. Lorenz* in „Schwingungen von Flüssigkeiten und ihr Einfluß auf den Gang von Kreiselrädern", Zeitsch. f. das gesamte Turbinenwesen 5 (1908), S. 437, 458, 473. — Siehe auch *H. Lorenz*, Lehrbuch d. technischen Physik, 3. Bd., München-Berlin 1910, S. 194f. — Verwandt ist die Frage der Ausspiegelung von Schleusenkammern, siehe die genannten Aufsätze *Liebischs*, Z. d. öst. I. u. A.V. 63 (1911), S. 280, 536, woselbst weitere Literaturangabe.

Daher beträgt in der Zeit dt die Reibungsarbeit

$$\gamma F U \frac{l}{c^2 R} U^2 dt.$$

Ferner findet währenddem eine Beschleunigung der im Stollen enthaltenen Masse $(\gamma F l U : g)$ statt und dadurch eine Änderung der lebendigen Kraft derselben um

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma F l}{2g} U^2\right) = \gamma F U \cdot \frac{l}{g} \frac{dU}{dt} dt.$$

Die Arbeitsgleichung lautet in diesem Falle also

$$z - \frac{l}{c^2 R} U^2 - \frac{l}{g} \frac{dU}{dt} = 0. \tag{205}$$

Da die Geschwindigkeit im Wasserschlosse $-\frac{dz}{dt}$ beträgt und die Wassermenge, die im Wasserschloß aufsteigt (oder sinkt), aus dem Stollen kommt (oder in ihn fließt), gilt

$$U = -\frac{F_1}{F} \frac{dz}{dt}$$

und weiter

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{F_1}{F} \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Diese Werte in (205) eingesetzt geben als Differentialgleichung der Bewegung

$$z - \frac{l F_1^2}{c^2 R F^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{l F_1}{g F} \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

oder

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{g F_1}{c^2 R F}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{g F}{l F_1} z = 0 \tag{205a}$$

oder

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + n^2 z = 0, \tag{205b}$$

wobei

$$m = \frac{2 g F_1}{c^2 R F}, \quad n^2 = \frac{g F}{l F_1} \tag{205c}$$

ist. Die allgemeine Lösung lautet wie zuvor die Gl. (199d) mit einer Konstanten C

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2 n^2}{m^2}(m z + 1) - C e^{m z}}. \tag{205d}$$

Es werde nunmehr angenommen, daß zunächst der Durchfluß Q stattfinde, der zur Speisung einer Turbine vom Wasserschloß aus diene. Dann werde zur Zeit $t = 0$ der Abfluß aus dem Wasserschloß plötzlich gehemmt, wodurch das Wasser vermöge seiner Trägheit in letzterem aufsteigen wird. Zur Zeit Null herrscht dann im Wasserschloß die Geschwindigkeit

$$U = \frac{Q}{F_1}$$

und im Stollen die Geschwindigkeit

$$U_0 = \frac{Q}{F},$$

so daß hier der Druckhöhenverlust

$$h = \frac{l}{c^2 R} U_0^2 = \frac{l Q^2}{c^2 R F^2}$$

beträgt. Da in diesem Augenblick der Spiegelunterschied noch dem Druckhöhenverlust gleich ist, ist noch keine Beschleunigung vorhanden, und gilt für den Zeitpunkt $t = 0$ gemäß (205b)

$$-\frac{m}{2}\frac{Q^2}{F_1^2} + n^2 h = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{Q}{F_1} = \sqrt{\frac{2n^2}{m^2} mh}$$

und gemäß (205d)

$$\frac{Q}{F_1} = \sqrt{\frac{2n^2}{m^2}(mh+1) - Ce^{mh}}.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$C = \frac{2n^2}{m^2} e^{-mh},$$

so daß die allgemeine Lösung (205d) für den ersten Gang die Form

$$\text{(205e)} \qquad \frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2n^2}{m^2}\left[(mz+1) - e^{m(z-h)}\right]}$$

annimmt. Man kann sich nun vorstellen, daß die Bewegung nicht mit dem Ausschlag h und der Geschwindigkeit U zur Zeit $t = 0$, sondern etwas früher mit der Ausschlagweite Z_{I} und der Geschwindigkeit Null begonnen habe. Dann ist für $z = Z_{\mathrm{I}}$ und desgleichen für die Ausschlagweite Z_{II}, mit welcher der erste Gang endigen möge, $\frac{dz}{dt} = 0$, so daß nach (205e)

$$mZ_{\mathrm{I}} + 1 - e^{m(Z_{\mathrm{I}} - h)} = mZ_{\mathrm{II}} + 1 - e^{m(Z_{\mathrm{II}} - h)} = 0$$

oder

$$\text{(205f)} \quad (mZ_{\mathrm{I}} + 1) - \log\text{nat}\,(mZ_{\mathrm{I}} + 1) = mZ_{\mathrm{II}} + 1 - \log\text{nat}\,(mZ_{\mathrm{II}} + 1) = mh + 1$$

sein muß[1]). Nach (205f) ist es leicht, die höchste Erhebung $-Z_{\mathrm{II}}$ des Wasserschloßspiegels über den gewöhnlichen Betriebsspiegel zu berechnen.

Beispiel. Es werde ein Beispiel behandelt, das *K. Pressel*[2]) vorgebracht hat. Es sei nämlich die Geschwindigkeit U_0 im Beharrungszustande $= 3\ \text{m sec}^{-1}$, der Stollenquerschnitt $F = 12{,}57\ \text{m}^2$, die Wasserschloßfläche $F_1 = 50F$, die Stollen-

1) *F. Prášil,* Schweiz. Bauz. 52 (1908), S. 334; vgl. Gl. (201), sowie Gl. (207b).
2) Ebenda 53 (1909), S. 57.

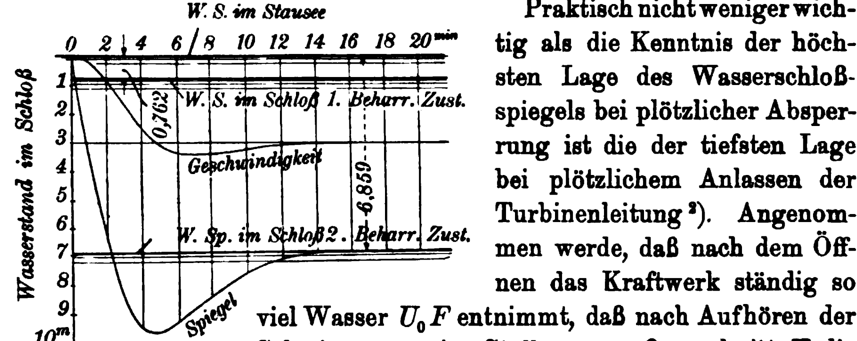
länge $l = 4000$ m, der Druckhöhenverlust im Stollen $l U^2 : c^2 R = 0{,}000\,1905\, l U^2$. Es findet sich die Tiefe h des Wasserschloßspiegels unter dem Stauweiherspiegel im Beharrungszustande $l U_0^2 : c^2 R = 0{,}000\,1905 \cdot 4000 \cdot 9 = 6{,}859$ m, der Wert $m = 19{,}62 \cdot 0{,}000\,1905 \cdot 50 = 0{,}1869\ \mathrm{m}^{-1}$, $mh + 1 = 2{,}282$ und aus der Gl. (205f) $m Z_{II} + 1 - \log\mathrm{nat}\,(m Z_{II} + 1) = 2{,}282$, $m Z_{II} + 1 = 0{,}1145$ oder die höchste Erhebung des Wasserschloßspiegels $- Z_{II} = 4{,}74$ m.

Bei schrittweisem Vorgange, von dem noch S. 358 die Rede sein wird, hat man an Stelle der Gleichungen (205) und (205a)

$$\Delta u = -\frac{g}{l}\left(z + \frac{l U^2}{c^2 R}\right)\Delta t \quad \text{und} \quad \Delta z = -\frac{F}{F_1}\, U\,\Delta t$$

und kann folgende Tabelle berechnen[1]), deren Ergebnis $- Z_{II} = 4{,}62$, wie man sieht, ein genügend genaues ist:

Zeit	Δz	z	Δu	u
0′ 00″	− 0,6000	+ 6,8590	0,0000	+ 3,0000
10″	− 0,5971	+ 6,2590	− 0,0147	+ 2,9853
20″	− 0,5915	+ 5,6619	− 0,0277	+ 2,9576
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2′ 00″	− 0,4478	+ 0,2932	− 0,0946	+ 2,2392
10″	− 0,4288	− 0,1546	− 0,0975	+ 2,1417
20″	− 0,4083	− 0,5829	− 0,1002	+ 2,0415
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5′ 00″	− 0,0556	− 4,5200	− 0,1137	+ 0,2780
10″	− 0,0329	− 4,5756	− 0,1137	+ 0,1643
20″	− 0,0102	− 4,6085	− 0,1135	+ 0,0508
30″	+ 0,0125	− 4,6187	− 0,1133	− 0,0625
40″	—	− 4,6062	—	—



Praktisch nicht weniger wichtig als die Kenntnis der höchsten Lage des Wasserschloßspiegels bei plötzlicher Absperrung ist die der tiefsten Lage bei plötzlichem Anlassen der Turbinenleitung[2]). Angenommen werde, daß nach dem Öffnen das Kraftwerk ständig so viel Wasser $U_0 F$ entnimmt, daß nach Aufhören der Schwingungen im Stollen vom Querschnitt F die Geschwindigkeit U_0 beträgt. Wieder bedeute F_1 die Grundfläche des Wasserschlosses, U die veränderliche Stollengeschwindigkeit, $z = \frac{l U^2}{c^2 R}$ den jeweiligen Druckhöhenverlust, t die Zeit. Dann besteht abermals die Arbeitsgleichung

1) Z. d. V. deutsch. Ing. 56 (1912), S. 1292.

2) *Ph. Forchheimer*, Z. d. V. deutsch. Ing. 57 (1913), S. 545.

(205) $$z - \frac{U^2 l}{c^2 R} - \frac{l}{g}\frac{dU}{dt} = 0,$$

worin, weil der Turbinenbedarf $F U_0$ teils vom Weiher, teils vom Wasserschloß gedeckt wird,

(206) $$F U_0 = F U + F_1 \frac{dz}{dt}$$

oder

(206a) $$\frac{dU}{dt} = -\frac{F_1}{F}\frac{d^2 z}{dt^2}$$

gilt. Durch Einsetzen der Werte von U und $\frac{dU}{dt}$ aus (206) und (206a) in (205) erhält man

(206b) $$z - \frac{l}{c^2 R}\left[U_0^2 - 2\frac{F_1}{F}U_0\frac{dz}{dt} + \frac{F_1^2}{F^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \frac{l F_1}{g F}\frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Die dieser Differentialgleichung entsprechende Kurve muß der Natur der Aufgabe nach einer Sinuslinie ähneln. Wird nun eine solche angenommen, das heißt

$$z = Z_a \sin \alpha t$$

gesetzt, worin Z_a das gesuchte größte z bedeutet, so kann man Z_a und α derart bestimmen, daß zwar nicht die linke Seite von (206b) in jedem Augenblick, aber doch deren Integral zwischen den Grenzlagen $\left(\text{also zwischen } \alpha t = 0 \text{ und } \alpha t = \frac{\pi}{2}\right)$ Null ist. Man hat zunächst, weil für die Anfangslage, bei der alles Wasser aus dem Wasserschloß kommt,

$$U_0 = \frac{F_1}{F}\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = \alpha \frac{F_1}{F} Z_a (\cos \alpha t)_{t=0}$$

sein muß,

(207) $$\alpha = \frac{F U_0}{F_1 Z_a},$$

daher

$$\frac{dz}{dt} = \alpha Z_a \cos \alpha t = \frac{F}{F_1} U_0 \cos \alpha t, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{F^2}{F_1^2}\frac{U_0^2}{Z_a}\sin \alpha t,$$

dann, wenn man die Werte für z, $\frac{dz}{dt}$ und $\frac{d^2 z}{dt^2}$ in (206b) einführt,

$$Z_a \sin \alpha t - \frac{l U_0^2}{c^2 R}[1 - 2\cos \alpha t + \cos^2 \alpha t] - \frac{l F}{g F_1}\frac{U_0^2}{Z_a}\sin \alpha t$$

oder nach Integration (bei der man αt als Variable betrachtet)

$$-Z_a \cos \alpha t - \frac{l U_0^2}{c^2 R}\left[\alpha t - 2 \sin \alpha t + \frac{\alpha t + \sin \alpha t \cos \alpha t}{2}\right] + \frac{l F}{g F_1}\frac{U_0^2}{Z_a}\cos \alpha t$$

und nach Einführung der Grenzen

$$-\frac{l U_0^2}{c^2 R}\left[\frac{3\pi}{4} - 2\right] - \left[-Z_a + \frac{l F}{g F_1}\frac{U_0^2}{Z_a}\right] = 0.$$

Hiermit erhält man für die tiefste Senkung

$$(207\,\mathrm{a})\qquad Z_a = 0{,}178\,\frac{l\,U_0^2}{c^2 R} + \sqrt{\left(0{,}178\,\frac{l\,U_0^2}{c^2 R}\right)^2 + \frac{l\,F}{g\,F_1}\,U_0^2}.$$

In dem oben behandelten Beispiel findet sich

$$Z_a = 1{,}22 + \sqrt{1{,}49 + 4000 \cdot 0{,}1019 \cdot 0{,}02 \cdot 9} = 9{,}87\ \mathrm{m},$$

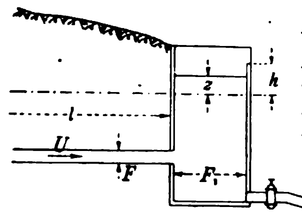
während durch ein schrittweises Verfahren *Pressel* 9,80 m fand.

Für raschen Schluß scheint, so lange $h:Z$ sich nicht zu sehr von 1 abweichend herausstellt, die ähnlich wie (207a) gebaute Gleichung

$$(207\,\mathrm{b})\qquad Z = h - \sqrt{h^2 + 1{,}20\,\frac{l\,F}{g\,F_1}\,U_0^2}\ \left(\text{worin } h = \frac{l\,U_0^2}{c^2 R}\right)$$

zu gelten[1]), welche bequemer als (205f) auszurechnen ist.

Der verwickeltere Fall einer wechselnden Entnahme eignet sich ohne willkürliche Annahmen, wie z. B. die der Proportionalität von Druckverlust und Strömungsgeschwindigkeit, nicht mehr für eine algebraische Lösung[2]). Hier führt schrittweises Vorgehen[3]) zum Ziele. Wieder sei der Weiher durch einen Stollen von der Länge l und Querschnitt F mit dem Wasserschloß von der Grundfläche F_1 verbunden, werde dem Wasserschloß durch eine Leitung die nunmehr wechselnde Menge Q in der Zeiteinheit entnommen, und betrage die Strömungsgeschwindigkeit im Stollen U, der Druckhöhenverlust $U^2:g$, während z die Höhe des Wasserschloßspiegels über dem Weiherspiegel (der Gleiche) bedeute. Es sei ferner außer der Leitung eine Überfallschwelle von der Ausdehnung b in der Höhe h über der Gleiche im Wasserschloß vorgesehen, über die sobald $z > h$ ist, die Menge $\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,b(z-h)^{3/2}$ in der Zeiteinheit überfließe. Es gilt dann zunächst die Raumgleichung



$$(208)\qquad F\,U = F_1\frac{dz}{dt} + Q + \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,b(z-h)^{3/2}$$

(in der für $z < h$ allerdings $\mu = 0$ zu setzen ist). Die lebendige Kraft zur Zeit t ist im Stollen

$$\frac{\gamma\,l\,F\,U^2}{2g}$$

und im Wasserschloß vernachlässigbar. In der Zeiteinheit tritt die Menge $F\,U$ aus einem Gebiet, das unter dem Druck des Weiherspiegels

1) Nach brieflicher Mitteilung von *W. Liebisch*.

2) *R. Dubs* geht in seinem Buch: Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen (Berlin 1909), S. 273 sogar so weit, die Reibung in einem unendlich langen Stollen zu vernachlässigen.

3) So *K. Pressel*, der von einem Überfall absah, Schweiz. Bauz. 53 (1909), S. 57, 210.

steht, unter gleichzeitiger Überwindung des Reibungswiderstandes $U^2 : g_1$ ins Wasserschloß ein. Daher besteht, wenn man die von den zu- und ausströmenden Wassermengen mitgeführten Energien vernachlässigt, die Arbeitsgleichung

$$\frac{lF}{g} U \frac{dU}{dt} = -FU\left(z + \frac{U^2}{g_1}\right), \tag{208a}$$

deren linke Seite den Differentialquotienten der lebendigen Kraft nach der Zeit darstellt. Daraus folgt nach Abkürzung durch FU

$$dU = -\frac{g}{l}\left(z + \frac{U^2}{g_1}\right) dt,$$

während die Raumgleichung (206)

$$dz = \frac{1}{F_1}\left[FU - Q - \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\, b\, (z-h)^{3/2}\right] dt$$

ergibt. Ersetzt man nun die Differentiale durch Differenzen, betrachtet man also kleine, aber meßbare, statt unendlich kleine Zeitintervalle, so hat man statt dessen

$$\Delta U = -\frac{g}{l}\left(z + \frac{U^2}{g}\right) \Delta t, \tag{208b}$$

$$\Delta z = \frac{1}{F_1}\left[FU - Q - \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\, b\, (z-h)^{3/2}\right] \Delta t. \tag{208c}$$

Man kann also, wenn man im Zeitpunkte t sowohl U wie z kennt, ΔU und Δz für die Zeit berechnen und daher $U + \Delta U$ sowie $z + \Delta z$, das sind die Werte, angeben, welche die Strömungsgeschwindigkeit im Stollen und die Spiegelhöhe im Wasserschloß im Zeitpunkt $t + \Delta t$ haben. Dabei setze man in (207) und (207a) für Q besser nicht den Wert ein, den es zur Zeit t hat, sondern das Mittel seiner Werte zu den Zeiten t und $t + \Delta t$. Es ist kaum nötig hinzuzufügen, daß, so lange $z < h$ bleibt, $\mu = 0$ anzunehmen ist.

Wichtig ist es, daß in den Fällen der Praxis die Schließzeit der Leitung viel kürzer als die Schwingungsdauer zu sein pflegt. Dadurch fallen die Maxima der aufeinanderfolgenden Stöße nahe zusammen und zeigt sich, wie *F. Prášil*[1]) und *R. Dubs*[2]) durch Beispiele erläutert haben, die Wirkung eines Leitungsschlusses derart, als ob er nicht in kurzer Zeit, sondern plötzlich erfolgen würde.

101. Kleine Schwingungen bei fortwährendem Durchfluß. Wieder sei ein Stauweiher, ein Druckstollen von der Länge l und dem Querschnitt F, ein Wasserschloß von der Grundfläche F_1 und eine Turbinen-

---

1) Schweiz. Bauz. 52 (1908), S. 271, 301, 317, 333.

2) Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen, Berlin 1909, S. 204.

leitung vorhanden, welche die etwas veränderliche Aufschlagmenge Q in der Zeiteinheit führe. Der Druckverlust kann bei Einführung einer Konstanten g_2 durch $\frac{U^2}{g_2}$ ausgedrückt werden, worin die Strömungsgeschwindigkeit im Stollen

$$U = \left(Q - F_1 \frac{dz}{dt}\right) : F \tag{209}$$

ist und, wenn man sich auf *kleine* Schwankungen beschränkt, sich daher

$$U^2 = \left(Q^2 - 2F_1 Q \frac{dz}{dt}\right) : F^2$$

zeigt, womit der Druckverlust

$$\frac{U^2}{g_2} = \frac{Q^2}{g_2 F^2} - \frac{2F_1 Q}{g_2 F^2} \frac{dz}{dt} \tag{209 a}$$

wird. Aus (209) folgt weiter durch Differentiation

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{F} \frac{dQ}{dt} - \frac{F_1}{F} \frac{d^2 z}{dt^2}. \tag{209 b}$$

Wenn man nun die Turbine mit einem solchen Regler versieht, daß die Nutzleistung sich nicht ändert, so muß QH stets $= \bar{Q}\bar{H}$ bleiben, wobei $\bar{Q}$ die mittlere oder für den Betrieb vorgeschriebene Beaufschlagung, H die Höhe des Wasserschloßspiegels über dem Unterwasserspiegel und $\bar{H}$ den Mittelwert von H bedeutet. Der Regler hat also durch Drosseln oder Öffnen der Leitung dafür zu sorgen, daß

$$d(QH) = Q\,dH + H\,dQ = -Q\,dz + H\,dQ = 0$$

bleibe, oder

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{H} \frac{dz}{dt} \tag{209 c}$$

sei. Nun lautet die Energiegleichung (vgl. etwa (197))

$$Q\left(z - \frac{U^2}{g_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{lFU^2}{2g}\right) = \frac{lF}{g} U \frac{dU}{dt}$$

oder

$$z - \frac{U^2}{g_2} = \frac{l}{g} \frac{dU}{dt}.$$

Werden hier die Werte aus (209 a) und (209 b) eingesetzt, so ergibt sich

$$z - \frac{Q^2}{g_2 F^2} + \frac{2F_1 Q}{g_2 F^2} \frac{dz}{dt} = \frac{l}{gF} \frac{dQ}{dt} - \frac{lF_1}{gF} \frac{d^2 z}{dt^2},$$

und bei Berücksichtigung von (209 c)

$$z - \frac{Q^2}{g_2 F^2} + \frac{2F_1 Q}{g_2 F^2} \frac{dz}{dt} = \frac{l}{gF} \frac{Q}{H} \frac{dz}{dt} - \frac{lF_1}{gF} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

oder

(209 d) $$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{2gQ}{g_2 l F} - \frac{Q}{F_1 H}\right)\frac{dz}{dt} + \frac{gF}{lF_1}\left(z - \frac{Q^2}{g_2 F^2}\right).$$

Diese Differentialgleichung nimmt die Form von Gl. (197 b) an, wenn man Q und H mit ihren Mittelwerten $\overline{Q}$ und $\overline{H}$ vertauscht[1]) und zugleich $z - \frac{\overline{Q}^2}{g_2 F^2}$ durch eine neue Variable ersetzt, die sich von z nur durch die konstante Länge $\overline{Q}^2 : g_2 F^2$ unterscheidet. Das Integral enthält dann, wie man aus (197 c) erkennen kann, einen Faktor e^{-mt}, in welchem im vorliegenden Falle

(209 e) $$m_1 = \frac{\overline{Q}}{F}\left(\frac{g}{g_2 l} - \frac{F}{2 F_1 \overline{H}}\right)$$

ist. Je nachdem m_1 positiv oder negativ ist, nimmt $e^{-m_1 t}$ mit der Zeit ab oder zu, oder werden die Schwingungsweiten allmählich kleiner oder größer. Damit eine Dämpfung stattfinde, muß also die Grundfläche des Wasserschlosses

(210) $$F_1 > \frac{g_2 l F}{2 g \overline{H}}$$

sein. Ist das Gegenteil der Fall, so erhöht die Tätigkeit des Reglers die Unregelmäßigkeiten des Turbinenganges und wächst jede noch so kleine Gleichgewichtsstörung ohne Schwingung zu einem endlichen Ausschlage an. Wird der Druckverlust in einem kreisrunden Stollen vom Durchmesser D in der von *Weisbach* beliebten Form durch $\zeta \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g}$ ausgedrückt, also

$$\frac{1}{g_2} = \frac{\zeta}{2g} \frac{l}{D}$$

gesetzt, so geht die Ungleichung (210) in

(210 a) $$F_1 > \frac{\pi D^3}{4 \zeta \overline{H}}$$

über. *D. Thoma* beweist ferner, daß, wenn der mittlere Druckhöhenverlust im Stollen mit $\bar{z}$ bezeichnet wird, für

(210 b) $$F_1 < \frac{g_2 l F}{2 g \overline{H}} \left\{\left[1 + \frac{g_2 F^2}{\overline{Q}^2}(H - 2\bar{z})\right] - \sqrt{\left[1 + \frac{g_2 F^2}{\overline{Q}^2}(H - 2\bar{z})\right]^2 - 1}\right\}$$

angefachte, also zunehmende Schwingungen entstehen und daß für

1) Diese Vertauschung macht den Beweis unstreng. Den strengen Beweis der von *D. Thoma* herrührenden Formel (210) führt derselbe in seiner Dissertation: Beiträge zur Theorie des Wasserschlosses, München 1910, S. 10.

$$(210\,c)\qquad F_1 > \frac{g_2 l F}{2gH}\left\{\left[1+\frac{g_2 F^2}{Q^2}(H-2\bar{z})\right] + \sqrt{\left[1+\frac{g_2 F^2}{Q^2}(H-2\bar{z})\right]^2-1}\right\}$$

nach jeder kleinen Störung der neue Beharrungszustand ohne Schwingungen erreicht wird.[1])

Beispiele.[2]) Höhenunterschied $\bar{H}+\bar{z}$ zwischen Stauweiher- und Unterwasserspiegel $=10$ m, Stollenlänge $l=301$ m, Stollenquerschnitt $F=12{,}57$ m² (4 m Dmr.), $\frac{1}{g_2}=0{,}0712$ m^{-1} sec² entsprechend $\zeta=$ ca. 0,018, Arbeit $\bar{H}\bar{Q}=$ 250 m t sec^{-1}. Es berechnet sich $\bar{z}=0{,}299$ m und $F_a=4{,}2$ m², $F_b=279$ m², $F_c=17560$ m², wenn man mit F_a, F_b und F_c die rechten Seiten der Gleichungen (210 a), (210 b) und (210 c) bezeichnet.

Sinkt bei Hochwasser im Untergraben $\bar{H}+\bar{z}$ auf 6,8 m, so muß man die Beaufschlagung erhöhen, wodurch $\bar{z}$ auf 0,778 m wächst und sich $F_a=33{,}6$ m², $F_b=450$ m², $F_c=6040$ m² findet.

Für $\bar{H}+\bar{z}=50$ m, $l=301$ m, $F=2{,}53$ m² oder $D=1{,}8$ m, $\frac{1}{g_2}=$ 0,1535 m^{-1} sec², entsprechend $\zeta=$ ca. 0,016, $\bar{H}\bar{Q}=250$ mt sec^{-1}, woraus $\bar{z}=0{,}616$ m, folgt $F_a=0{,}0323$ m², $F_b=5{,}13$ m², $F_c=812$ m².

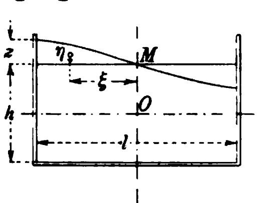
Für eine Hochdruckanlage mit $H+\bar{z}=200$ m, $l=1300$ m, $F=19{,}6$ m² oder $D=5$ m, $\frac{1}{g_2}=0{,}221$ m^{-1} sec², entsprechend $\zeta=$ ca. 0,013, $\bar{H}\bar{Q}=9000$ m t sec^{-1}, folgt $\bar{z}=1{,}18$ m und $F_a=0{,}088$ m², $F_b=29{,}6$ m², $F_c=9950$ m².

102. Schwankung eines Trogspiegels. Aus irgend einem Grunde sei in einem rechtwinkligen Troge der Wasserspiegel in einem bestimmten Augenblicke, obwohl in Ruhe, weder eben noch wagrecht, sondern bilde eine Fläche mit gewelltem Längenschnitt, derart, daß jeder Erhebung auf der einen Seite eine ebenso große Senkung auf der andern Seite entspreche. Der Quere nach seien die Spiegellinien wagrecht. Es muß sofort nach dem gegebenen Augenblick eine Bewegung einsetzen, und zwar erfolge diese derart, daß sich alle Hebungen und Senkungen des Spiegels proportional ihrer eigenen Größe vermindern, wodurch der Spiegel durch die wagrechte Lage durchschwingen muß,

1) Ebenda S. 21, 24. Hier werde bzgl. des Widderstoßes in Röhren verwiesen auf *Ph. Forchheimer* in Encykl. d. mathem. Wissensch., 4. Bd., 3. Teilbd., S. 437, *R. Dubs* u. *V. Bataillard*, Allgem. Theorie üb. die veränderliche Bewegung, 1. Rohrleitungen von *L. Allievi*, Berlin 1909; ferner bzgl. des hydraulischen Widders auf *M. Grübler* in Encykl. d. mathem. Wissensch., 4. Bd., 3. Teilbd., S. 514, *H. Lorenz*, Lehrbuch der technischen Physik, 3. Bd., Münch.-Berl. 1910, S. 228. Allerlei Versuche über Schwingungen machte *A. de Caligny*, s. dessen Recherches théoriques et experimentales sur les oscillations de l'eau, 1. Teil Versailles, 2. Teil Paris 1883.

2) Ebenda S. 25.

bis sich jeder Ausschlag in einen entgegengesetzten verwandelt hat. Die Zeitdauer einer solchen Schwingung sei unter Vernachlässigung der im allgemeinen geringen Wirkung der Reibung und unter Verzicht auf den Beweis der Möglichkeit der betrachteten Bewegung zu berechnen. Es sollen bedeuten h die Tiefe, l die Troglänge bei ungestörtem Gleichgewicht, F die Fläche zwischen der gehobenen oder gesenkten Spiegelhälfte und der Gleiche, ξ_s und η_s die jeweiligen Schwerpunktskoordinaten der Gesamtmasse, bezogen auf ein durch ihren Schwerpunkt O beim Ruhezustand gelegtes Achsenkreuz, ξ und η die Koordinaten des Schwerpunktes der Fläche F, bezogen auf die Spiegelmitte M. Die Gesamtfläche besteht dann aus einem Rechteck hl mit dem Moment Null bezüglich O und zwei Flächen entgegengesetzen Sinnes mit dem Moment eines Kräftepaares $2F\xi$ bzw. $2F\eta$. Es gilt daher für die halben Gesamtmomente



$$\text{(211)} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\xi_s hl = F\xi, \\ \frac{1}{2}\eta_s hl = F\eta. \end{cases}$$

Nach (211) läßt sich η_s als Funktion von ξ_s darstellen, dann die Pendellänge der schwingenden Masse, nämlich der Krümmungshalbmesser des Schwerpunktsbogens

$$1 : \frac{d^2\eta_s}{d\xi_s^2}$$

aufsuchen, woraus sich weiter nach dem Pendelgesetze, insoweit die Masse als die eines mathematischen Pendels aufgefaßt werden darf, die Zeitdauer einer vollständigen Hin- und Herschwingung (oder die sogenannte doppelte Schwingungsdauer des Pendels)

$$\text{(211 a)} \qquad 2T = 2\pi\sqrt{1 : g\frac{d^2\eta_s}{d\xi_s^2}}$$

ergibt.

Beispiel 1. Für einen ebenen Spiegel[1]) mit der Ausschlagweite z des äußersten Punktes ist

$$F = \frac{1}{4}zl^2, \qquad \frac{1}{2}\xi_s hl = \frac{1}{12}zl^2, \qquad \frac{1}{2}\eta_s hl = \frac{1}{12}z^2 l$$

oder

$$\eta_s = \frac{6h}{l^2}\xi_s^2, \qquad \frac{d^2\eta_s}{d^2\xi_s} = \frac{12h}{l^2}, \qquad 2T = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{l}{\sqrt{gh}} = 1{,}814\frac{l}{\sqrt{gh}}.$$

1) *J. Gröger,* Z. d. öst. I. u. A.V. 53 (1901), S. 728. Die Trogspiegelschwankungen kehren im großen in der Natur in den „Seiches" der Binnenseen und mancher Meere wieder.

2. Für einen nach der Gleichung $y = z \sin \frac{\pi x}{l}$ gewellten Spiegel findet man bei Zerlegung von F in lotrechte Streifen

$$\frac{1}{2}\xi_s h l = z\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin\frac{\pi x}{l}\,dx = z\left(-\frac{l}{\pi}x\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{l^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right)_0^{l/2} = \frac{z l^2}{\pi^2},$$

$$\frac{1}{2}\eta_s h l = \frac{z^2}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx = \frac{z^2 l}{4\pi}\left(\frac{\pi x}{l} - \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\right)_0^{l/2} = \frac{z^2 l}{8}$$

oder

$$z^2 = \frac{\pi^4 h^2}{4 l^2}\xi_s^2 = 4 h \eta_s, \qquad \eta = \frac{\pi^4 h}{16 l^2}\xi^2, \qquad \frac{d^2\eta_s}{d\xi_s^2} = \frac{\pi^4 h}{8 l^2},$$

und schließlich

$$2T = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{l}{\sqrt{g h}} = 1{,}800\frac{l}{\sqrt{g h}}.$$

Eine Betrachtung *J. R. Merians*, welche *K. von der Mühll* [1]) von der Gleichung (16c) der veränderlichen reibungslosen Bewegung ausgehend wiederholte, lieferte für niedrige Schwankungen statt dessen die Formel

$$(211\text{b}) \qquad 2T = 2\sqrt{\frac{\pi l}{g}\,\mathfrak{Cotang}\,\frac{\pi h}{l}},$$

die für sehr niedrige Schwankungen zu $2T = \frac{2l}{\sqrt{g h}}$ wird. Dieselbe Zeit würde bei ihrer Geschwindigkeit $\sqrt{gh}$ eine Einzelwelle zum Hin- und Hergang benötigen.

Die Schwingung der Gl. (211b) bietet das Beispiel einer *freien* Schwingung, bei welcher die aus dem Gleichgewicht gebrachte Flüssigkeit während des Schwingens sich selbst überlassen bleibt. Zum Unterschied hiervon wirken bei der *unfreien* oder *erzwungenen* Schwingung außer der Schwere noch sonstige störende Kräfte fortgesetzt auf die Flüssigkeit ein, bei der hierher gehörenden Gezeitenbewegung z. B. die Anziehung von Mond und Sonne [2]).

XIII. Wellenbewegung.

103. Entstehung der Wellen. Zu den häufigsten schwingenden Bewegungen des Wassers gehören die Wellen im engeren Sinne des Wortes oder oszillatorischen Wellen. Die verschiedensten Ursachen,

1) Math. Ann. 27 (1886), S. 575. *J. R. Merian,* Über die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefäßen, Basel 1828.

2) Bzgl. der ausgedehnten einschlägigen Arbeiten sei insbesondere verwiesen auf *H. Lamb* (deutsch von *Friedel*), Lehrb. d. Hydrodynamik, S. 291f.

wie Entnahme oder Einguß von Wasser, Eintauchen oder Herausziehen eines Festkörpers, Bewegung eines solchen im Wasser, Erschütterung, Wind, geben zu ihrem Entstehen Anlaß, ja selbst die einfache Strömung mit freier Oberfläche erfolgt stets unter Wellenbildung. Die Wellen interessieren daher sowohl den Geophysiker als auch den Seemann und Schiffbauer und den Bauingenieur. Vom Standpunkte des letzteren aus seien sie hier besprochen, das heißt nur insoweit, als ihre Kenntnis für bauliche Anlagen von Bedeutung erscheint. Da ist zunächst zu betonen, daß die Wellen, mit denen bei Bauten am Meere oder Seen zu rechnen ist, im allgemeinen von der Luftbewegung herrühren.[1]) Nur wenn letztere weniger als 0,25 m sec^{-1} mißt, äußert sie nämlich keinen Einfluß aufs Wasser. Steigt die Geschwindigkeit auf über 0,5 m sec^{-1}, so wird die Oberfläche dunkler, indem sie sich, soweit sie unmittelbar vom Luftzug getroffen wird und solange derselbe herrscht, mit „Kräuselwellen" bedeckt, die nur wenige Zentimeter Länge und wenige Millimeter Höhe haben und im Grundriß flache Bogen bilden. Wind von mehr als 1 m sec^{-1} erzeugt eine *See* oder einen *Seegang,* nämlich Wellen, die zwar zunächst nur wenige Zoll Länge haben, aber mit der Winddauer wachsen (*G. B. Airys* forced waves), bis sie in der „toten" oder „ausgewachsenen" See ihr Maximum erreicht haben, welches sich umso bedeutender zeigt, je größer und tiefer das betreffende Meer ist. Nach Aufhören des Sturmes ändern die Wogen ihre Form, die Meeresoberfläche wird regelmäßiger und von den wirren Bewegungen bleibt die Dünung oder der Schwall (houle, swell, *Airys* free waves) mit annähernd geschlossenen Bahnen der Wasserteilchen zurück. Durch Wirkung leichter Brisen und Reflexionen treten zur eigentlichen Dünung (underswell) noch andere Wellensysteme hinzu, auch kann die Interferenz die Bildung stehender Wellen (Plätscherwellen, clapotis) bewirken.

104. Dünung bei unbegrenzter Tiefe. Von einer Wellentheorie[2]) verlangt man zunächst nur, daß die durch sie dargestellte Bewegung möglich sei, das heißt, daß sie die Kontinuitätsbedingung und die mechanischen Gesetze erfülle. Hierbei wird zwar wie bei der Betrachtung vollkommener Flüssigkeiten die Reibung vernachlässigt, also z. B. der

1) *O. Rieß,* Repert. d. Phys. 26 (1890), S. 109; *J. Scott-Russell,* Brit. Ass. Report 14. Meeting held at York 1844, London 1845, S. 317, 318. *G. B. Airy,* Tides and Waves in Encyclopaedia Metropolitana 5, London 1845.

2) Eine Darstellung der Wellentheorien gaben *B. de Saint-Venant* und *A. Flamant,* Ann. d. ponts et chauss. (6) 13) (1887), S. 31; (6) 15 (1888), S. 705. Weiter sei verwiesen auf *A. E. H. Love* in Encykl. d. Mathem. Wissensch. 4. Bd., 3. Teilbd., S. 130 und *Ph. Forchheimer,* ebenda S. 420. *H. Lamb* (deutsch von *J. Friedel*), Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipz.-Berl. 1907, S. 424 f.

Außendruck senkrecht zur Oberfläche angenommen, aber doch auf Wirbelfreiheit im *Helmholtz*schen Sinn (Quirlfreiheit) verzichtet.

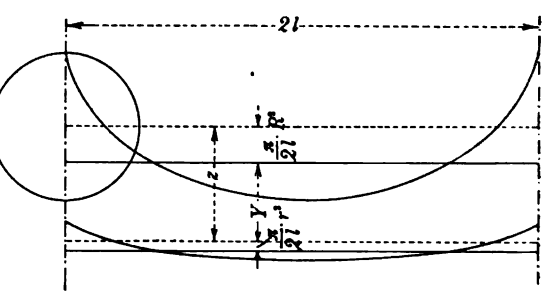
Für unendlich tiefes Wasser wird, wie gezeigt werden wird, den genannten Forderungen die Theorie *F. Gerstners*[1]) gerecht, nach welcher jedes Teilchen, das vor Eintritt des Wogens in der Tiefe

$$Z = \frac{l}{\pi} \log \operatorname{nat} \frac{R}{r} - \frac{\pi(R^2 - r^2)}{2l} \tag{212}$$

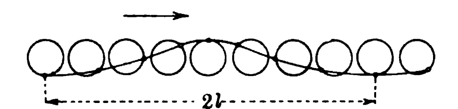
unter dem Ruhespiegel gelegen war und die Abszisse X hatte, nach Eintritt der Dünung mit der Winkelgeschwindigkeit $\pi : T$ einen Kreis

$$\begin{cases} x = X + r \sin \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l}\right), \\ z = Z - r \cos \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{X}{l}\right) - \frac{\pi r^2}{2l} \end{cases} \tag{213}$$

mit dem Halbmesser r beschreibt. In (213) bedeutet $2l$ die Wellenlänge von Scheitel zu Scheitel, $2T$ die Zeitdauer eines vollständigen Umlaufes, t die veränderliche Zeit, R den Halbmesser des obersten Kreises. Die Fahrstrahlen von den betreffenden Mittelpunkten zu den ursprünglich in einer Lotrechten gelegenen Teilchen bleiben nach (213) parallel,

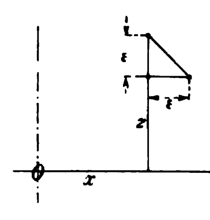


während für gleiche Unterschiede von X die Fahrstrahlen gleiche Winkel miteinander einschließen. Während in der Zeit $2T$ jedes Teilchen einen vollen Kreis durchläuft, schreiten die Wellen mit der Schnelligkeit



$$\omega = l : T \tag{214}$$

um eine Wellenlänge $2l$ vorwärts. Je größer $R : l$ ist, desto ausgeprägter ist die Wellenlinie, die für $l = \pi R$ eine gemeine Zykloide (Trochoide) mit lotrechter Spitze bildet. — Es sei nun zunächst nachgewiesen, daß bei der geschilderten Bewegung die Masse ihren vollständigen Zusammenhang bewahrt. Zu diesem Zwecke sei bemerkt, daß ein sehr kleines Dreieck von der ursprünglichen Fläche $\frac{1}{2}\varepsilon^2$, nämlich mit den Eckpunkten



1) Theorie der Wellen f. d. Abhandlungen der k. böhm. Ges. d. Wissensch., Prag 1804. *Gilberts* Ann. d. Physik (2) 2 (1809), S. 412.

$$X,\ Z;\quad X+\varepsilon,\ Z;\quad X,\ Z+\varepsilon,$$

während der Dünung die Endpunkte

$$x,\ z;\quad x+\varepsilon\frac{\partial x}{\partial X},\quad z+\varepsilon\frac{\partial z}{d X};\quad x+\varepsilon\frac{\partial x}{\partial Z},\quad z+\varepsilon\frac{d z}{d Z},$$

und daher, wie die Addition der Trapeze zwischen den neuen Ordinaten ergibt, den Flächeninhalt

$$\left(z+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial z}{\partial Z}\right)\varepsilon\frac{\partial x}{\partial Z}+\left(z+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial z}{\partial Z}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial z}{\partial X}\right)\left(\varepsilon\frac{\partial x}{\partial X}-\varepsilon\frac{\partial x}{\partial Z}\right)$$
$$-\left(z+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial z}{\partial X}\right)\varepsilon\frac{\partial x}{\partial X}=\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial z}{\partial Z}-\frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial x}{\partial Z}\right)$$

besitzt. Für

$$\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial z}{\partial Z}-\frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial x}{\partial Z}=1 \tag{215}$$

bleibt also die Dreiecksfläche ungeändert, oder die Kontinuität erhalten. Nun ergibt die Differentiation von (213) bzw. (212), weil r nur von Z abhängt,

$$\frac{\partial x}{\partial X}=1-\frac{\pi r}{l}\cos\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{l}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial Z}=1-\cos\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{l}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial Z}-\frac{\pi r}{l}\frac{\partial r}{\partial Z},$$
$$\frac{\partial z}{\partial X}=-\frac{\pi r}{l}\sin\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{l}\right),$$
$$\frac{\partial x}{\partial Z}=\sin\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{l}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial Z},$$
$$\frac{\partial Z}{\partial r}=1:\frac{\partial r}{\partial Z}=\frac{\pi r}{l}-\frac{l}{\pi r},$$

womit die linke Seite von (215) bei abgekürzter Schreibweise der trigonometrischen Funktionen zu

$$1-\frac{\pi r}{l}\cos+\frac{\partial r}{d Z}\left(-\cos+\frac{\pi r}{l}\cos^2-\frac{\pi r}{l}+\frac{\pi^2 r^2}{l^2}\cos+\frac{\pi r}{l}\sin^2\right)=1$$

wird und die Kontinuität bewiesen ist. — Für den Nachweis der Gültigkeit der mechanischen Gesetze werde der ganzen Wassermasse eine der Schnelligkeit entgegengesetzte Geschwindigkeit $l:T$ erteilt, wodurch sich das Wogen in ein stationäres Strömen mit unveränderlichem Umriß verwandelt. Bei der wogenden Bewegung beträgt die wagrechte Geschwindigkeit, wie die Differentiation von x in (213) nach t lehrt (wenn man zugleich den Zeitanfang so wählt, daß X und t gleichzeitig Null werden),

$$\frac{\pi r}{T}\cos\frac{\pi t}{T};$$

beim Strömen beträgt sie also

(215 a) $$u = \frac{\pi r}{T} \cos\frac{\pi t}{T} - \frac{l}{T},$$

während die lotrechte Geschwindigkeit in beiden Fällen

(215 b) $$\frac{dz}{dt} = w = \frac{\pi r}{T} \sin\frac{\pi t}{T}$$

ist. Hiermit zeigt sich die Geschwindigkeitshöhe

(216) $$\frac{u^2 + w^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{\pi^2 r^2}{T^2} - \frac{2\pi r l}{T^2} \cos\frac{\pi t}{T} + \frac{l^2}{T^2}\right)$$

und ihr Wachstum von $t = 0$ bis $t = t$ daher gleich

$$\frac{1}{2g}\left(-\frac{2\pi r l}{T^2} \cos\frac{\pi t}{T} + \frac{2\pi r l}{T^2}\right) = \frac{\pi r l}{g T^2}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right).$$

Während dieser Zeit wächst aber die Tiefenlage z des Wasserteilchens, ob das Wasser wogt oder strömt, gemäß (213) um

$$\left(Z - r \cos\frac{\pi t}{T} - \frac{\pi r^2}{2l}\right) - \left(Z - r - \frac{\pi r^2}{2l}\right) = r\left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right).$$

Die Fallhöhe verwandelt sich also in Geschwindigkeitshöhe, falls die Umlaufzeit

(217) $$T = \sqrt{\pi l : g},$$

somit die Schnelligkeit

(217 a) $$\omega = \frac{l}{T} = \sqrt{\frac{gl}{\pi}}$$

ist. Unter dieser Voraussetzung ändern sich also die Strömungsgeschwindigkeiten längs der Zykloiden derart, als ob diese Leitflächen bilden würden und die Oberflächen der Wasserbänder unter gleichmäßigem Gasdruck ständen. — Es ist nun noch zu zeigen, daß auch die Druckänderung senkrecht zu den Leitfäden richtig erfolgt, mit anderen Worten, daß man die von oben und unten gleich stark gepreßten Leitflächen entfernen kann, ohne daß sich die Strömungsweise ändert. Zu diesem Zwecke werde erinnert, daß, da x und z Funktionen derselben Veränderlichen t sind, für den Krümmungsradius ϱ der Zykloide

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{x' z'' - x'' z'}{[(x')^2 + (z')^2]^{3/2}} = \frac{u w' - u' w}{(u^2 + w^2)^{3/2}}$$

gilt. Bei einer Schichtdicke dn beträgt daher für eine Stromlänge 1 die Fliehkraft

$$\frac{\gamma}{g} \frac{u w' - u' w}{(u^2 + w^2)^{3/2}} dn$$

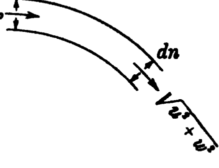
und das Gewicht derselben Masse

$$\gamma\, dn,$$

daher die zur Strömung senkrechte Teilkraft des Gewichtes

$$\gamma \frac{u}{(u^2+w^2)^{1/2}}\, dn.$$

Hiermit ist dargelegt, daß auf der Strecke dn der Druck im Wasserband nach unten um die absolute Größe



(217 b) $$dp = \frac{\gamma}{g}\, \frac{gu - uw' + u'w}{(u^2+w^2)^{1/2}}\, dn$$

zunimmt. Bezeichnet nun dz_0 die Breite desselben Wasserbandes unter seinem Scheitel und u_0 die daselbst herrschende Strömungsgeschwindigkeit, so muß, da die gleiche Menge durch dz_0 und dn läuft und die Geschwindigkeiten negativ sind,

$$u_0 dz_0 = -(u^2+w^2)^{1/2} dn$$

sein. Zugleich bestimmt sich aber für den Scheitel nach (213) und (212)

$$dz_0 = dZ - dr - \frac{\pi r}{l} dr = -\frac{l+\pi r}{\pi r} dr$$

und nach (215 a)

$$u_0 = -\frac{l-\pi r}{T}.$$

Hieraus folgt

$$dn = -\frac{l+\pi r}{\pi r}\, \frac{l-\pi r}{T}\, \frac{1}{(u^2+w^2)^{1/2}}\, dr$$

und

(217 c) $$-dp = -\frac{\gamma}{g}\, \frac{gu - uw' + u'w}{u^2+w^2}\, \frac{l^2-\pi^2 r^2}{\pi r T}\, dr.$$

Nun ist zufolge (215 a) und (215 b)

$$u' = -\frac{\pi^2 r}{T^2} \sin\frac{\pi t}{T}, \quad w' = \frac{\pi^2 r}{T^2} \cos\frac{\pi t}{T}$$

(217 d) $$gu - uw' + u'w = \frac{g\pi r}{T} \cos\frac{\pi t}{T} - \frac{gl}{T} - \frac{\pi^3 r^2}{T^3} + \frac{\pi^2 r l}{T^3} \cos\frac{\pi t}{T},$$

so daß, wenn für die Umlaufszeit T wieder der Wert $\sqrt{\pi l : g}$ gemäß (217) festgesetzt, also $g = \pi l : T^2$ gesetzt wird, sich die rechte Seite von (217 d) zu

$$-\frac{\pi}{T^3}\left(l^2 - 2\pi r l \cos\frac{\pi t}{T} + \pi^2 r^2\right)$$

vereinfacht. Da nun

$$u^2 + w^2 = \frac{1}{T^2}\left(l^2 - 2\pi r l \cos\frac{\pi t}{T} + \pi^2 r^2\right)$$

ist, geht schließlich bei Aufrechthaltung von (217)

(217 e) $$-dp = \frac{\gamma}{g}\, \frac{l^2 - \pi^2 r^2}{r T^2}\, dr = \gamma\left(\frac{l}{\pi r} - \frac{\pi r}{l}\right) dr$$

hervor. Nach (217 e) ist dp nur von dr abhängig, also ist, da r längs

einer Zykloide seinen Wert nicht ändert, der Druckzuwachs dp zwischen zwei gegebenen Zykloiden an allen Stellen des von ihnen begrenzten Strömungsbandes gleich groß. Wenn also die Oberfläche unter gleichförmigem Luftdruck p_0 steht, muß auch der Druck p längs jeder Zykloide gleichförmig sein, so daß man eine beliebige derselben zur Oberfläche machen könnte. Die Größe dieses Druckes ergibt sich aus (217 e) durch Integration zwischen der Oberfläche, wo der Rollkreishalbmesser $= R$ ist, und der Kurve vom Rollkreishalbmesser r zu

$$p = p_0 + \gamma\left(\frac{l}{\pi}\log\operatorname{nat}\frac{R}{r} - \frac{\pi(R^2 - r^2)}{2l}\right) = p_0 + \gamma Z. \tag{217 f}$$

Da durch die Verwandlung der Dünung in Strömung, nämlich durch die Erteilung einer allenthalben gleichen Zusatzgeschwindigkeit $-\,\omega$, an den Drücken nichts geändert wird, gilt (217 f) auch für das Wogen und besagt, *daß* während der Dünung *der Druck* auf ein Teilchen *so groß bleibt, wie er war, als das Teilchen sich noch in seiner Ruhelage* in der Tiefe Z unter dem Ruhespiegel *befand*. Die abgeleiteten Beziehungen würden es sehr wahrscheinlich machen, daß eine Dünung wesentlich die *Gerstner*schen Gesetze befolgt, wenn dem nicht nachstehender Umstand widerspräche. Die Welle wandert beim Wogen in der Richtung des sie erzeugenden Windes (nach der Annahme von links nach rechts) und ebenso, soweit die wagrechte Geschwindigkeit in Frage kommt, jedes (im Sinne des Uhrzeigers) kreisende Teilchen in den Wellenbergen. Dabei drehen sich die Teilchen nach *Gerstner* im entgegengesetzten Sinne ihrer Umlaufkreise, wenn bei dem nunmehr gewählten Sinn der Koordinaten der Ausdruck der Gl. (8)

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \tag{218}$$

positiv ist. Da die Drehung von Wogen und Strömen identisch ist, ist es zulässig, letzteres zu betrachten. Für dasselbe gilt, wenn wieder x und t gleichzeitig Null sein sollen, nach (212), (213), (215 a) und (215 b)

$$x = r\sin\frac{\pi t}{T}, \quad z = \frac{l}{\pi}\log\operatorname{nat}\frac{R}{r} - r\cos\frac{\pi t}{T} - \frac{\pi R^2}{2l},$$

$$u = \frac{\pi r}{T}\cos\frac{\pi t}{T} - \frac{l}{T}, \quad w = \frac{\pi r}{T}\sin\frac{\pi t}{T}.$$

Der entscheidende Ausdruck (218) kann für die betrachtete stationäre Strömung nun auch in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{w} + \frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{\frac{\partial z}{\partial r}} - \left(\frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{u} + \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\frac{\partial x}{\partial r}}\right)$$

geschrieben werden, und zeigt sich dann bei Ausrechnung der Einzelwerte (bei abgekürzter Schreibweise der trigonometrischen Funktionen) =

$$(218\,a)\qquad \frac{-\frac{\pi^2 r}{T^2}\sin}{\frac{\pi r}{T}\sin} + \frac{\frac{\pi}{T}\cos}{-\frac{l}{\pi r} - \cos} - \left(\frac{\frac{\pi^2 r}{T^2}\cos}{\frac{\pi r}{T}\cos - \frac{l}{T}} + \frac{\frac{\pi}{T}\sin}{\sin}\right)$$

$$= -\frac{2\pi}{T} - \frac{\frac{\pi}{T}\cos}{\frac{l}{\pi r} + \cos} - \frac{\frac{\pi}{T}\cos}{\cos - \frac{l}{\pi r}} = \frac{2\pi}{T}\,\frac{-\frac{l^2}{\pi^2 r^2} + 2\cos^2}{\frac{l^2}{\pi^2 r^2} - \cos^2}.$$

Das Vorzeichen dieses Bruches hängt, da $l^2 > \pi^2 r^2$ sein muß, also der Nenner immer positiv bleibt, vom Zähler ab. An den Scheiteln ($t = 0$) ist der $\cos = 1$, daher der Zähler hier unter Umständen positiv. Das besagt, daß die Teilchen sich in den Scheiteln wenig gestreckter Wellen im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers drehen. Daß der von links nach rechts wehende Wind dem Wasser solche Drehmomente erteile, ist nicht recht denkbar.

Da die Zykloiden vergleichsweise schmale Berge zwischen weiten Tälern aufweisen, liegt der Ruhespiegel nicht in der Mitte von Scheitel und Sohle, sondern — wie dies auch bereits Gl. (213) angibt — tiefer, und zwar um das Stück $\pi R^2 : 2l$. Demnach liegen die Wellenscheitel

$$R + \frac{\pi}{2}\frac{R^2}{l}$$

höher als der Ruhespiegel oder bei vollständig ausgebildeter Troglinie in der Höhe $^3/_2 R$ über letzterem.

Eine Wellentheorie, bei welcher die Flüssigkeit sich wirbelfrei bewegt, also eine Wellenbewegung, in welche eine vollkommene Flüssigkeit aus dem Ruhezustande übergehen könnte, hat *G. G. Stokes*[1]) angegeben. Die Oberfläche ist angenähert trochoidal mit dem wesentlichen Unterschied gegen die *Gerstners*, daß in der Grenzform dachartige Kämme von 120° Flächenwinkel statt scharfer Schneiden entstehen. Auch findet nicht ein bloßes Schwingen der Teilchen statt, sondern auch ein langsames nach unten rasch abnehmendes Fließen in der Richtung der Wellenbewegung. Eine solche Welle von der Grenzform, also von möglichster Höhe, hat auf Grund der *Stokes*schen Theorie *J. H. Michell*[2]) berechnet und gezeichnet.

H. v. Helmholtz[3]) behandelte die Bildung von Wellen über unend-

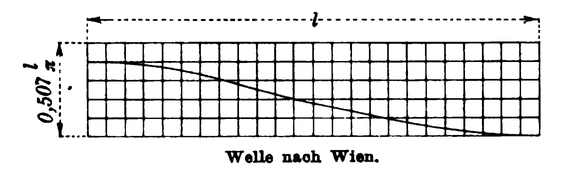
---

1) Cambridge, Trans. 8 (1847) = *Stokes*, Math. and Phys. Papers 1, S. 197, 314.

2) Phil. Mag. (5) 36 (1893), S. 430.

3) Berlin, Sitzungsberichte d. k. preuß. Akad. d. Wiss. 1889, 2. Halbbd., S. 772 = Wissenschaftl. Abh. 3, S. 333.

licher Tiefe durch den Wind als Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit (der Luft) über einer anderen (dem Wasser), wobei er allerdings die Forderung der Gleichheit der beiderseitigen Normaldrücke auf die gemeinschaftliche Grenzfläche nicht vollständig zu erfüllen vermochte. *W. Wien*[1]) hat dann nach der *Helmholtz*schen Methode verschiedene Wellen bestimmt und gelangte bei seinen Ziffernbeispielen bei sanftem Wind zu spitzeren Formen als bei heftigem, was mit der Wirklichkeit kaum in Einklang stehen dürfte.



Welle nach Wien.

Es liegt nun die Frage nahe, wie weit die verschiedenen Theorien der Beobachtung entsprechen, allein die Antwort ist nicht leicht zu erteilen, denn die Aufnahme von Wellen im freien Meer bietet große Schwierigkeiten und die Schlußfolgerung aus einer Aufnahme[2]) auf die Gültigkeit einer Theorie wird überdies dadurch erschwert, daß die Meeresoberfläche zumeist von mehreren sich kreuzenden Wellensystemen bedeckt wird. Das ist auch der Grund, warum die reinsten Wellenformen nicht während eines Sturmes, sondern später erscheinen, nachdem die Zahl der Systeme sich durch die Dämpfung verringert hat. Einigen Anhalt für die Beurteilung bietet das Verhältnis der Wellenlänge $2l$ (Entfernung benachbarter Scheitel) zur Wellenhöhe h (Höhenunterschied von Scheitel und Sohle). Dasselbe beträgt

nach Beobachtung von	Wind nach Beaufortskale		Verhältnis $2l:h$		
			Maximum	Minimum	Mittel
G. Schott[3]) .	mäßiger Wind = 5		41	20	33
	starker Wind = 6 bis 7		19	18	18
	Sturm	9 u. mehr	21	13	17
Gerstner. . . .	—	—	∞	3,14	—
Stokes-Michell	—	—	∞	7,04	—

Nach *Proetels* Beobachtungen entstehen die flachsten Wellen bei mittleren Windgeschwindigkeiten und großer Landentfernung, die steilsten bei großen Windgeschwindigkeiten und kurzer Landentfernung. Dem

1) Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1900, S. 169 = Berlin, Sitzungsberichte d. Ak. 1894, 2. Halbbd., S. 509.

2) Ein Verfahren zur photogrammetrischen Aufnahme gibt *W. Laas*, der auch einige Aufahmen beifügt, in der Z. d. V. deutsch. Ing. 49 (1905), S. 1889, 1937, 1976 an; aber die eigentliche Veröffentlichung der Ergebnisse steht noch aus.

3) Über die Dimensionen der Meereswellen, Berlin 1893.

Beschauer erscheinen auf ihn zulaufende Wellen viel steiler als sie wirklich sind[1]).

Die Energie einer Dünung läßt sich unschwer berechnen. Die Winkelgeschwindigkeit eines kreisenden Teilchens von Volum dV und Eigengewicht γ beträgt nach (213) $\frac{\pi}{T}$, und daher seine kinetische Energie bei Berücksichtigung von (217)

$$\frac{\gamma}{2g}\frac{\pi^2 r^2}{T^2}dV = \gamma\frac{\pi r^2}{2l}dV.$$

Die Mittellage des Teilchens, das ist der Mittelpunkt seiner Kreisbahn, befindet sich nach denselben Grundgleichungen $\frac{\pi r^2}{2l}$ über seiner Ruhelage. Seine potentielle Energie (die zur Erhebung aufgewendete Arbeit) ist also der kinetischen Energie gleich. Die Wassersäule, die in der Ruhelage die Grundfläche Eins besaß, empfängt also (durch den Wind) bei der Dünung die Gesamtenergie (siehe (212))

$$\gamma\int\limits_{Z=0}^{Z=\infty}\frac{\pi r^2}{l}dZ = \gamma\int\limits_{r=R}^{r=0}\frac{\pi r^2}{l}\left[-\frac{l}{\pi r}+\frac{\pi r}{l}\right]dr$$

$$= \gamma\left[-\frac{r^2}{2}+\frac{\pi^2}{l^2}\frac{r^4}{4}\right]_{r=R}^{r=0} = \gamma\left[\frac{R^2}{2}-\frac{\pi^2 R^4}{4l^2}\right].$$

Auf die Breiteneinheit einer Welle von der Länge $2l$ und der Höhe $h = 2R$ entfällt also bis in unendliche Tiefe die Gesamtenergie

$$\gamma l R^2\left[1-\frac{\pi^2 R^2}{2l^2}\right] = \gamma\frac{lh^2}{4}\left[1-\frac{\pi^2 h^2}{8l^2}\right]. \tag{219}$$

105. Dünung bei endlicher Tiefe. Für endliche Tiefe H kennt man noch keine Lösung, welche die eingangs genannten Bedingungen (Kontinuität und mechanischen Gesetze) vollständig erfüllt, doch ist, wie *Boussinesq*[2]) zeigt, die Annäherung eine große, wenn man die Abhängigkeit der Koordinaten eines Teilchens von der Zeit t durch

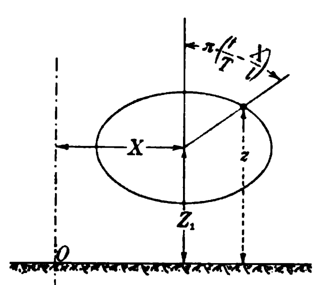
$$\begin{cases} x = X + a\sin\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{l}\right), \\ z = Z_1 + b\cos\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{l}\right) \end{cases} \tag{220}$$

---

1) Z. f. Bauw. 62 (1912), Sp. 690, 996 mit Wellenbildern Bl. 73.

2) Eaux courantes, S. 334. Photographien aufeinander folgender Stadien in einem Troge erzeugter Wellen: *É. J. Marey*, Paris, C. R. 116 (1893), S. 913. *P. Kelland* läßt sämtliche Teilchen Kreise beschreiben, wodurch der Kontinuitätsbedingung nicht so gut entsprochen wird, Edinburgh Roy. Soc. Trans. 14 (1840) u. 15 (1844).

ausdrückt, also die Teilchen Ellipsen beschreiben läßt. In (220) werden zum Unterschiede von früher die Ordinaten von unten nach oben gemessen und bedeuten x und z die Koordinaten des bewegten Teilchens, X und Z_1 die seines Bahnmittelpunktes, t wieder die Zeit, T die halbe Umlaufzeit. Die Halbachsen der Ellipsen in (220) sind



$$(220\text{a}) \qquad a = R\,\frac{\operatorname{Cof}\frac{\pi Z_1}{l}}{\operatorname{Sin}\frac{\pi H}{l}}, \qquad b = R\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi Z_1}{l}}{\operatorname{Sin}\frac{\pi H}{l}},$$

wobei R die halbe Wellenhöhe und H die Höhe der obersten Bahnmittelpunkte über der Sohle bedeutet.

Eine Seichtwasserwelle von der Länge l kann man gemäß (220a) aus einer gleich hohen Tiefwasserwelle von der Länge $l \operatorname{Tang}\frac{\pi H}{l}$ oder der halben Umlaufzeit $\sqrt{\frac{\pi l}{g}\operatorname{Tang}\frac{\pi H}{l}}$ ableiten, indem man alle Längen mit $\operatorname{Cotg}\frac{\pi H}{l}$ multipliziert. Dadurch wachsen alle Entfernungen, sobald man vom Wogen zum Strömen übergeht, nahezu im gleichen Verhältnis, während die Höhen und daher die Geschwindigkeiten die alten bleiben. Es wird also nunmehr die halbe Umlaufzeit ungefähr

$$(221) \qquad T = \operatorname{Cotang}\frac{\pi H}{l}\sqrt{\frac{\pi l}{g}\operatorname{Tang}\frac{\pi H}{l}} = \sqrt{\frac{\pi l}{g}\operatorname{Cotang}\frac{\pi H}{l}},$$

ferner, wie schon *Airy*[1]) gefunden hatte und auch aus den Arbeiten von *Laplace* und *Poisson* hervorgeht, die Schnelligkeit

$$(222) \qquad \omega = \frac{l}{T} = \sqrt{\frac{g l}{\pi}\operatorname{Tang}\frac{\pi H}{l}},$$

also kleiner als bei unendlicher Tiefe. In (222) hat $\operatorname{Tang}\frac{\pi H}{l}$ oder das Halbachsenverhältnis $b : a$ der obersten Bahnen folgende Werte:

$H : l =$	1,0	0,75	0,5	0,25	0,1
$\sqrt{\operatorname{Tang}\frac{\pi H}{l}} =$	0,998	0,991	0,958	0,810	0,552.

Die größte Umlaufgeschwindigkeit erlangen die Teilchen an den Endpunkten der kleinen Achse, und zwar ist sie daselbst

$$u_0 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{\pi a}{T}$$

1) *Lamb*, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von *Friedel*, S. 430, zitiert Tides and Waves (1845), § 160 f.

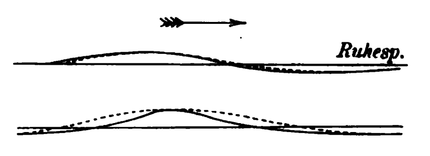
oder für die Oberflächenteilchen, für die $a = b$ Cotang $\pi \frac{H}{l}$ ist,

$$u_0 = \sqrt{\frac{\pi g a b}{l}} = \sqrt{\frac{\pi g a R}{l}}. \tag{222a}$$

Bei Beobachtung von 533 Wellen verschiedenster Größe hat *D. D. Gaillard*[1]) die Formel (222) bestätigt gefunden. Bei Abnahme der Tiefe H vermindert sich die Wellenlänge $2l$, und dies hat ein weiteres Abnehmen der Schnelligkeit zur Folge, so daß bei sanft ansteigendem Grund die Abnahme nach dem Genannten der empirischen Formel

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 0{,}9 \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}$$

gehorcht, in der sich ω_1 und ω_2 auf dieselbe Welle beziehen, die aus der Tiefe H_1 in die geringere H_2 gelangt. Die Abnahme der Schnelligkeit mit der Tiefe H bei Wellen gleicher Länge $2l$ bewirkt, daß sich in der Nähe des Ufers die Wellenkämme parallel zu ihm richten[2]). Denkt man sich eine Welle nach (220) und eine Tiefseewelle nach (213) von gleicher Länge und Höhe derart zusammengelegt, daß die Scheitel und die Tiefstpunkte sich decken, so verläuft im übrigen der Umriß der erstgenannten Welle durchweg tiefer als der der Tiefseewelle. Je seichter das Wasser ist, desto höher liegt also zufolge (220) bei gegebener Wellenhöhe und Wellenlänge der Scheitel über dem Ruhespiegel. Die Beobachtung wirklicher Wellen, die in Ufernähe keineswegs auf dieselben Schwierigkeiten stößt wie im offenen Meere, zeigt[3]), daß tatsächlich bei gegebener Wellenhöhe und -länge der Umriß noch etwas tiefer verläuft als nach (222). Dementsprechend fand *D. D. Gaillard*[4]) bei 45 Wellen, die er unmittelbar vor ihrem Brechen beobachtete, daß deren Kamm in der Höhe $h_s = 0{,}67$ bis $0{,}89\,h$ und im Mittel in der Höhe $0{,}76\,h$ über dem Ruhespiegel lag, wobei h die Wellenhöhe, d. i. den Höhenunterschied von Scheitel und Talsohle bezeichnet. Der Koeffizient von h wuchs



bei Gegenwind und Verflachung des Grundes, und nahm ab, wenn der Wind in der Wellenrichtung wehte oder der Grund steil anstieg. Der-

1) Professional papers of the Corps of Engineers, U. S. Army; 31 = *D. D. Gaillard,* Wave Action, Washington 1904, S. 108.

2) Siehe z. B. *G. Hagen,* Handbuch der Wasserbaukunst, 3. T., 1. Bd., Berlin 1863, S. 21. Daß Ausnahmen vorkommen können, betont *A. de Caligny,* Paris C. R. 76 (1873) S. 34.

3) *Gaillard,* Wave Action, S. 63.

4) Ebenda, S. 111.

selbe Beobachter[1]) nahm auch Wellen auf, die nicht brachen, und gelangte zur Meinung, daß für solche Wellen

$$h_s = \frac{h}{2} + c\frac{h^2}{2l} \tag{223}$$

sei, wobei c eine für jeden Beobachtungsort verschiedene Konstante vorstellte. Im Schiffahrtskanal von Duluth war beispielsweise bei 7,9 m mittlerer Tiefe $c = 2{,}0$. Erwähnenswert ist, daß unter 789 beobachteten Wogen eine mit besonders tiefem Scheitel, nämlich mit $h_s = 0{,}35\,h$ vorkam, und zwei von abnorm hoher Lage. Bei einer Welle im Duluth-Kanal von 2,44 m Höhe und 45,7 m Länge lag nämlich der *tiefste* Punkt 0,15 m *über* dem Ruhespiegel, und bei einer anderen im Oberen See von 0,76 m Höhe und 18,3 m Länge 0,06 m *über* dem Ruhespiegel. Unter letzterer Welle war die Ruhetiefe $H = 1{,}4$ m und die Welle brach später über 1,2 m Tiefe. Es scheint daher, daß bei Stürmen stets einige abnorme Wogen das Ufer erreichen.

Bei Tiefseewellen soll der *statische Druck* nach Gl. (217f) für jedes Teilchen so groß wie im Ruhezustande bleiben. Bezügliche Messungen liegen aber nur für Seichtwasserwellen vor. *D. D. Gaillard*[2]) brachte nämlich auf einer wagrechten Berme der einen Mündungsmole des Schiffahrtskanal von Duluth 30 cm unter dem Ruhespiegel ein Dosenmanometer an und fand, daß, wenn Wellen längs der Mole wanderten, die Druckhöhe im Mittel auf 0,89 der ursprünglichen Tiefenlage sank und dabei durchschnittlich 0,71 der Tiefenlage unter dem Wellenscheitel betrug.

Die gesamte Energie vom Spiegel bis zum Grunde einer Welle von der Länge $2l$ und den Halbachsen a und b der Ellipsenbahnen der Oberflächenteilchen berechnet *D. D. Gaillard*[3]) von der Gl. (220) ausgehend zu

$$\gamma b^2 l\left(1 - \frac{\pi^2 a^2}{2l^2}\right). \tag{224}$$

106. Größe beobachteter Wellen. Interferenz, Spaltung, Verstärkung. Zwei Flüssigkeiten. Eine nach der Wellenlänge geordnete Zusammenstellung sämtlicher ihm bekannten Messungen von Ozeanwellen hat *D. D. Gaillard*[4]) veröffentlicht. Seine Tabelle beginnt wie folgt:

---

1) Ebenda, S. 113.
2) Ebenda, S. 165.
3) Ebenda, S. 46.
4) Ebenda, S. 76.

Meer	Wellen Höhe h	Länge $2l$	Periode $2T$	Verhältnis $\frac{2l}{h}$	Schnelligkeit $\omega = \frac{l}{T}$	Beobachter
	m	m	Sec			
Südl. Stiller Ozean	14,0	233	16,5	16,6	14,1	R. Abercromby
Atlantischer Ozean	13,1	170	11,7	13,0	14,5	W. Scoresby
Atlantischer Ozean	12,2	—	—	—	—	„Normania"
Wick-Bai	12,2	—	—	—	—	Th. Stevenson
Nördl. Atlant. Ozean	12,2	—	—	—	—	V. Cornish
Südl. Atlant. Ozean	12,0	214	11,7	17,8	18,3	G. Schott
—	11,5	—	—	—	—	Paris
Peterhead.	10,7	183	15,0	17,1	12,2	W. Shield
—	11,0	—	—	—	—	„Novara"
Südl. Stiller Ozean	10,1 bis 11,0	—	—	—	—	Chüden
Indischer Ozean . .	10,2	114	7,5	11,1	15,2	Paris
Indischer Ozean . .	10,0	129	9,1	12,9	14,2	G. Schott

Außerdem berichtet *Gaillard*, daß eine von *Z. L. Tanner* im Stillen Ozean unweit der amerikanischen Küste photographierte Welle mindestens 15 m hoch gewesen sein muß. — Auf Meeren geringerer Ausdehnung und auf Seen entstehen nicht so gewaltige Wogen, die Wellenhöhe h hängt nämlich nicht bloß von der Stärke des Sturmes, sondern auch vom *Seeraum* (reach, fetch) d ab, d. i. von der Ausdehnung der Wasserfläche auf die Luvseite, und *Th. Stevenson*[1]) gibt die Erfahrungsregel, es sei für h und d in Meter gewöhnlich

$$h = 0{,}0106\sqrt{d} \tag{225}$$

bei geringer Luvweite d und heftigen Windstößen (violent squalls) jedoch

$$h = 0{,}0106\sqrt{d} + 0{,}762 - 0{,}0465\sqrt[4]{d}. \tag{225a}$$

Ein genaues Zutreffen der Formeln ist schon wegen der Verschiedenheit der Stürme nicht zu erwarten, und so liegt in dem Umstande, daß acht Bestimmungen von *D. D. Gaillard*[2]) für Seeräume von 0,7 bis 3,6 km das 0,56 bis 1,33 fache h der Gl. (225) und fünf Bestimmungen für Seeräume von 29 bis 479 km das 0,93 bis 1,21 fache h der Gl. (225 a) ergaben, eine genügende Bestätigung der Aufstellungen *Stevensons*.

Hintereinander laufende Wogen brauchen nicht die gleiche Höhe zu haben, eher zeigen sie einen gewissen Rhythmus, so daß bei den

1) The Theory and Practice of Hydromechanics, S. 166, nach Edinburgh, Roy. Soc. Proc. 4 (1857/62), S. 200. *Th. Stevenson*, Design and Construction of Harbours, 3. ed., Edinburgh 1886, S. 29.

2) Wave Action, S. 67.

Römern jeweils die zehnte Woge als die höchste galt.[1]) Während der Begegnung gegeneinanderlaufender gleich hoher Wellen, bei welcher das Wasser auf die 1,79fache Höhe der einfachen Welle stieg[2]), beobachteten die Brüder *Weber* eine kleine Verzögerung. Von festen Wänden werden die Wellen zurückgeworfen, wobei nach den Versuchen der Brüder *Weber* während des Anprallens die Höhe etwa auf das 1,7fache wächst.[3]) Durch Scheidewände, die nicht bis zur Sohle reichen, werden die Wellen gespalten.[4]) Addiert man die Ausschläge verschiedener Systeme, so entspricht die berechnete Bewegung zwar noch den Kontinuitätsbedingungen, aber nicht mehr vollkommen den mechanischen Gesetzen. Durchdringen sich die Wellensysteme, so gehen die Wellen nach der Kreuzung unverändert weiter. Auch mit Wirbeln können sich Wellen nach *O. Reynolds*[5]) in der Weise verbinden, daß eine Grenzfläche den wirbelnden Teil der Flüssigkeit vom wogenden scheidet.

In trichterförmigen Buchten findet, weil das gegen die Spitze schwingende Wasser infolge der abnehmenden Breite nach oben ausweichen muß, eine Verstärkung des Seeganges statt, während eine Schwenkung der Küstenlinie[6]) bei der Tendenz der Wellen über ansteigenden Grund den Kamm parallel zur Küste zu richten, eine Ausdehnung des Wellenkammes und damit eine Schwächung des Seeganges verursachen kann. Eine solche findet auch im Hafenbecken statt, in die er durch eine Öffnung eintritt. Hierbei erfolgt eine Beugung[7]) der Wogen. Bedeutet b die Öffnungsweite, so bildet in der Entfernung y vom Eingang die Welle einen Bogen vom Halbmesser y (in Metern) und hat dieser Bogen die Länge B, so beträgt nach *Th. Stevenson*[8]) das Verhältnis der späteren zur ursprünglichen Wellenhöhe

$$(226)\qquad \sqrt{\frac{b}{B}} - 0{,}0269\left(1 + \sqrt{\frac{b}{B}}\right)\sqrt[4]{y}.$$

Werden Wellen durch eine Mole gebeugt und mißt der Ablenkungswinkel α^0, so veranlaßt dies eine Abnahme der Wellenhöhe h_1 auf h_2,

---

1) *G. v. Boguslawski* u. *O. Krümmel,* Handb. d. Ozeanographie 2, Stuttgart 1887, S. 52.

2) *E. H.* u. *W. Weber,* Wellenlehre, Leipzig 1825, S. 216, 221.

3) Ebenda, S. 227.

4) Ebenda, S. 236.

5) London Royal Inst. Proc. 1893 = *O. Reynolds* Papers 2, Cambridge 1901, S. 533.

6) *D. D. Gaillard,* Wave Action, S. 66.

7) *E. H.* u. *W. Weber,* Wellenlehre, S. 246.

8) Design and Construction of Harbours, Edinburgh 1864, S. 123; 3. ed. 1886, S. 165. Edinb. Phil. Journ. 54 (1853), S. 378.

wobei nach einigen Beobachtungen von *R. L. Stevenson*[1]), falls die gebeugten Wellen sich frei ausdehnen,

$$\frac{h_2}{h_1} = 1 - 0{,}06\sqrt{\alpha} \tag{226a}$$

sei. Falls jedoch die Wellen nach der Beugung an der nicht von ihnen getroffenen Molenseite weiter laufen, gelte

$$\frac{h_2}{h_1} = 1 - 1{,}04\sqrt{\alpha}. \tag{226b}$$

Eine Welle wird auch flacher, wenn sie aus seichtem in tiefes Wasser tritt.[2]) Endlich kann eine Flußströmung die Wellen zum Brechen bringen und dadurch die hinten liegende Fläche schützen.[3])

Lagert eine Flüssigkeit auf einer anderen kaum dichteren, so verlangt ein Ändern der Grenzfläche wenig Arbeit. Deren Wellen können daher die der Oberfläche stark übertreffen. Dem schreibt es *Ekman*[4]) zu, daß in einigen norwegischen Fjordmündungen, wo sich Süßwasser über Salzwasser befindet, die Schiffe gelegentlich großen Widerstand erfahren.

107. Das Branden der Wellen und deren Stoßkraft. Verschiedene Ursachen, vor allem starker Wind, können bewirken, daß die Berge der Wellen schmäler und höher werden, bis zum überstürzenden Kamme. Man sagt dann, daß die Welle brandet oder bricht. Für die Bauten an der Küste ist das Brechen der Wellen am Strand von wesentlicher Bedeutung. Die Erscheinung beginnt damit, daß, wie Versuche von *G. Hagen*[5]) mit rhythmischer Bewegung einer geeigneten Vorrichtung dartaten, bei geringer Tiefe übereinander gelegene Teilchen infolge der Reibung zwischen den Wasserschichten merklich gleiche Geschwindigkeit annehmen (Grundwellen, ground-swell). In Verbindung mit der Reibung an der Sohle bewirkt dies, daß nahe an der Küste die Vorderfläche der Welle sich steil aufrichtet, die kreisende Bewegung der Teilchen in eine vorschreitende übergeht und schließlich die Welle bricht.

Einschlägige Versuche in Gerinnen stellten, wie S. 175 erwähnt, *J. Scott-Russell* und *H. Bazin* an. In der Natur nahmen *Th. Stevenson*[6])

---

1) *Th. Stevenson,* Design and Construction of Harbours, 3. ed., S. 163.

2) *J. Scott-Russell,* Brit. Ass. Report, 7. Meeting held at Liverpool 1837, London 1838, S. 451.

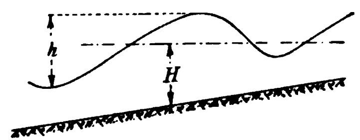
3) *Th. Stevenson,* Design and Construction of Harbours. Edinb. 1864, S. 51; 3. ed., S. 65.

4) Annalen der Hydrographie 32 (1904), S. 562; näheres siehe *Lamb-Friedel,* S. 436, 481. Siehe auch oben S. 372: Wellen nach *v. Helmholtz* und *Wien.*

5) Handbuch der Wasserbaukunst 1, 3. Teil, Berlin 1863, S. 56.

6) The Theory and Practice of Hydromechanics, Lectures delivered at the Institution of Civil Engineers, London 1885, S. 170. *Th. Stevenson,* The Design

und namentlich *D. D. Gaillard* Messungen vor, nach welchen bei Gegenwind oder Windstille die Wellen unter Umständen erst bei einer Tiefe H unter dem Ruhespiegel brechen, die 0,72 der Wellenhöhe h beträgt, während bei Wind in der Wanderrichtung der Wellen und stärker geneigtem Strand das genannte Verhältnis $H:h$ — so weit die Messungen reichen — bis auf 2,71 wachsen kann. Der Scheitel liegt, wenn die Welle bricht, etwa 0,65 bis 0,85 h über dem Ruhespiegel. Die anstürmende Woge macht den Eindruck, wasserreicher als die rücklaufende zu sein.



Das kommt zum Teil daher, daß im Achterteil der Woge das Rückfließen bereits beginnt, während der Kopf noch vorschreitet. Aber auch ein erhebliches Versinken von Wasser findet nach *W. H. Wheeler*[1]) auf Kiesstrand statt. Mit der Brandung ist zugleich eine Rückströmung in der Tiefe verbunden, die von den Strandbewohnern der Ostsee der *Sog* (undertow) genannt wird, und selbst wieder als Gegenbewegung das Branden der Wellen fördert. Der Sog[2]) veranlaßt vorzugsweise die Gefahr beim Baden während eines hohen Seeganges, indem die Füße immer stark seewärts gezogen werden. Ein steiles Ufer verursacht zum Teil ein Brechen, zum Teil ein Zurückwerfen der Welle, so daß man z. B. in einem Beruhigungsbecken (stilling basin) die Einfassung unter 1 : 3 oder noch sanfter böschen soll[3]).

Die anstürmende Welle ist übrigens als „Einzelwelle" aufzufassen, für deren Schnelligkeit oben die Formel *Scott-Russells*

$$\omega = \sqrt{g(H+h)} \tag{88a}$$

gegeben wurde, in der H die ursprüngliche Tiefe, h die Scheitelerhebung über den ursprünglichen Spiegel bedeutet. Bricht nach (88a) eine Welle über der Tiefe $H = h$, so tut sie dies bei einer Schnelligkeit $\sqrt{2gh}$, die sich in Geschwindigkeit verwandelt. Genauere Messungen liegen aber nicht vor; man weiß nur, daß die Wellen, die aus der offenen See kommen, in denselben Zwischenzeiten auf den Strand auflaufen und daß die Scheitelentfernungen, also die Wellenlängen, sich hierbei vermindern.

Den dynamischen, also den zum statischen Druck hinzukommenden Stoßdruck, den die Brander ausüben, wenn sie ein Hindernis treffen, hat

and Construction of Harbours, 3. ed., Edinburgh 1886, S. 78. *D. D. Gaillard*, Wave Action, S. 120, 172.

1) The Sea-Coast 2, impr., London 1903, S. 37.

2) *G. Hagen*, Handbuch der Wasserbaukunst, 3. Teil, 1, S. 87.

3) *Th. Stevenson*, Design and Construction of Harbours, 3. ed., S. 169.

Th. Stevenson[1]) gemessen. Er entsteht dadurch, daß die Bahnen der Wasserteilchen eine Ablenkung erfahren, hängt also von der in der Zeiteinheit abgelenkten und nicht wie beim Stoß fester Körper von der gesamten stoßenden Masse ab. Zur Druckaufnahme verwendete *Stevenson* Scheiben von 76 und 229 mm Durchmesser, aber auf den Druck auf die Flächeneinheit war offenbar nicht die Größe der betreffenden Scheibe, sondern nur die des Gegenstandes von Einfluß, an den sie befestigt war. Er maß 1843 und 1844 an den im Westen von Schottland im atlantischen Ozean gelegenen Klippen von Skerryvore im Sommer durchschnittlich 0,298, im Winter durchschnittlich 1,018 und als Maximum 2,968 kg cm^{-2}. An der Bell-rock genannten Klippe im Osten Schottlands in der Nordsee war das Maximum 1,470, an der schottischen Nordseeküste bei Dunbar 3,826 und an der schottischen Nordküste bei Buckie bei mehrjähriger Ablesung 3,279 kg cm^2. Die genannten Zahlen beziehen sich auf kleinere Flächen, geben also an, was für Wellenschläge man bei einzelnen Mauerwerksteilen gewärtigen muß. Im Jahre 1858 befestigte *Th. Stevenson* seine Vorrichtungen im Hafen von Dunbar über einem 2,1 bis 3,5 m unter Hochwasser liegenden Grund an eine Mauer und an einzelstehende Pfähle. Während sich bei den niedrigen ungebrochenen Wellen von 1 bis 1,5 m Höhe der Wellenschlag an der Mauer 8,27 mal so groß wie an den Pfählen zeigte, äußerten die aus 2,1 bis 3 m hohen Wellen entstandenen Brander an den Mauerscheiben nur einen 1,46 mal so starken dynamischen Druck wie an den Pfahlscheiben. Stärker war der Wellenschlag an einer Stelle, wo zwei Mauern zusammenstießen. *Th. Stevenson* untersuchte auch, wie sich der Druck mit der Höhe ändert und erhielt die beistehend angedeutete Verteilungslinie, die zwar eines Fehlers in den Vorrichtungen wegen nur angenähert gilt, aber immerhin zeigt, daß der Wellenschlag in Hochwasserhöhe am heftigsten ist. An der deutschen Nordseeküste kann nach *L. Franzius* und *C. Schilling*[2]) 1,5 kg cm^{-2} und an der Ostseeküste 1 kg cm^{-2} als größter Druck gelten. An der Ozeanküste Frankreichs wurde nie mehr als 2 kg cm^{-2} beobachtet, und hält sich der größte Stoßdruck an den am meisten ausgesetzten Stellen im allgemeinen zwischen 1,5 und 1,8 kg cm^{-2}.

Hochw.

1) Edinburgh Roy. Soc. Trans. 16 (1849), S. 23.

2) Handbuch d. Ingenieurwissenschaften 3, Wasserbau, 3. Abt., 3. Aufl., Leipzig 1901, S. 22. *Fouques-Duparc*, den *Hagen* den eigentlichen Erfinder des neuen Hafenbaues nennt, hat nach ihm, Handb. d. Wasserbaukunst, 3. Teil, 2. Bd., S. 299, 301, bei einem 1829 für Cherbourg vorgelegten Entwurf den Wellenstoß nur auf 3000 bis 4000 kg m^{-2} = 0,3 bis 0,4 kg cm^{-2} geschätzt.

In der North-Beach, Florida, hat *D. D. Gaillard*[1]) Messungen zur Aufklärung des Zusammenhanges zwischen Wellengröße und Stoßdruck vorgenommen. Die Strandlinie ist daselbst gerade, der Strand eben und die Druckmesser wurden an 20 cm im Geviert starken, nach hinten verstrebten Säulen so angebracht, daß sie den vollen Wellenschlag erhielten. Wird der zur statischen Pressung hinzukommende Stoßdruck auf die Flächeneinheit

$$p = \zeta \gamma \frac{u^2}{2g} \tag{227}$$

gesetzt, worin γ das Eigengewicht des Seewassers ($1032\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$) und u die Wassergeschwindigkeit bedeutet, so folgt der Koeffizient

$$\zeta = \frac{2gp}{\gamma u^2}. \tag{227a}$$

Gaillard ist der Ansicht, daß u = gleich der Summe aus der Wellenschnelligkeit ω und der Umlaufgeschwindigkeit u_0 der Oberflächenteilchen sei, setzt also gemäß (222) und (222a)

$$u = \omega + u_0 = \sqrt{\frac{glb}{\pi a}} + \sqrt{\frac{\pi g a b}{l}}, \tag{227b}$$

worin a und b die Halbachsen der Oberflächenbahn, $2l$ die Wellenlänge bezeichnet, und erhält so nachstehende Tabelle, zu der er bemerkt, daß es nicht ausgeschlossen ist, daß φ ausnahmsweise den Wert 2 erreicht, den es aber nach den Gesetzen des Stoßes[2]) nie überschreiten kann.

Abmessungen der größten Welle		Gemessene Schnelligkeit	u_0 (berechnet)	Stoßdruck-maximum	Koeffizient
Höhe $2a$ m	Länge $2l$ m	ω m sec^{-1}	m sec^{-1}	p kg cm^{-2}	ζ
0,61	14,0	2,56	0,88	0,072	1,16
0,76	18,3	1,87	0,98	0,112	1,45
0,91	22,9	3,57	1,13	0,157	1,36
1,22	25,0	3,72	1,24	0,198	1,53
1,52	36,6	4,63	1,62	0,228	1,11
1,83	45,7	5,55	1,89	0,325	1,12

Die zerstörende Arbeit, die ein Brander verrichten kann, bewertet *L. d'Auria*[3]) wie folgt. Er bemerkt, daß ein Brander von der Höhe h, der Länge $2l$ und der Breite Eins bei einer Geschwindigkeit u (die ungefähr = der Schnelligkeit ω der Wellen ist) die lebendige Kraft

h $2l$

1) Wave Action, S. 175, 192; ebenda S. 145f. *Stevensons* Messungen.

2) Siehe unten S. 385, 387.

3) Journ. of the Franklin-Institute (3) 130 (1890), S. 373; (3) 13 (1891), S. 49.

$\gamma h l u^2 : 2g$ besitzt. Da nun der Anlauf während der Zeit $2l : u$ erfolgt, müsse bei einem mittleren Widerstande $\frac{1}{2}p$ nach dem Impulssatze, wenn während der Anlaufzeit die ganze Geschwindigkeit verbraucht wird,

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{2l}{u} = \text{Masse mal Geschwindigkeit} = \frac{\gamma h l}{g} \cdot u$$

oder

$$\frac{p}{2} = \frac{\gamma h u^2}{2g}$$

sein. Den größten Widerstand könne man etwa doppelt so hoch, also zu

$$p = \frac{\gamma h u^2}{g} \tag{228}$$

schätzen. Dieser verteile sich, wenn er von einer lotrechten Mauer geboten wird, auf eine Höhe h und so ergibt sich die größte Pressung auf die Flächeneinheit eines Wellenbrechers zu

$$\frac{\gamma u^2}{g}. \tag{228a}$$

Diese Erwägung stimmt in ihrem Ergebnis mit der Betrachtung *Gaillards* überein und betrifft so wie letztere nur die Stoßarbeit, zu welcher noch die geringe Wirkung des statischen Druckes hinzutreten kann. Sie zeigt, daß bedeutende Lasten vom Wasser verschoben und dabei noch gehoben werden können; denn bei einer Geschwindigkeit u kann die Wassermasse eine Höhe $u^2 : 2g$ bergauflaufen, also z. B. bei 10 bzw. 14 m sec^{-1} Geschwindigkeit 5 bzw. 10 m emporstürmen. Schnelligkeiten von 10 und selbst 14 m sec^{-1} sind aber schon beobachtet worden[1].

Es ist also erklärlich, daß gewaltige zerstörende Wirkungen brandender Wellen bekannt sind. So ist z. B. in[2]) Cherbourg ein Betonblock von 40 m^3 Inhalt 4 m in wagrechter Richtung und 4 m aufwärts verschoben worden. In Cette wurde ein Betonblock von 70 m^3 mit nur 7,5 m^2 dem Wellenstoß zugekehrter Fläche 1 m weit eine flache Böschung hinaufgetrieben. Auf einer der Shetland-Inseln wurde ein fast 8 t schwerer Block über mehrere Stufen 22 m weit bis zu 6,1 m über das Hochwasser der Springtiden getrieben. Es ist in den meisten Fällen schwierig, aus den Zerstörungen einen Schluß auf die ausgeübte Kraft zu ziehen, da einerseits in einer entstandenen Lücke der Angriff sich wie in einer trichterförmigen Bucht steigern kann und andererseits ein Bauteil durch

1) Siehe oben die Tabelle S. 377.

2) Handb. d. Ingenieurwissenschaften 3, Wasserbau, 3. Abt., 3. Aufl., 1901, S. 21; *D. D. Gaillard,* Wave-action, S. 126; *G. Hagen,* Handbuch der Wasserbaukunst, 3. Teil, 1, S. 98. — Seltener schadet das Wasser durch Saugen. Doch wurde z. B. im Eddystone-Leuchtturm nach *J. Walker,* Min. Proc. Inst. Civ. Eng., Bd. 1, Session 1841, S. 115, einmal eine Tür unter Bruch ihrer starken Riegel und Angeln nach außen aufgerissen.

die Nachbarteile Unterstützung erfährt, auch die Festigkeiten schwer feststellbar sind. Bei einer auf einer langen Strecke verschobenen Brustmauer eines Wellenbrechers in Genua berechnet *O. Bernardini*[1]) 1,5 kg cm^{-2} mittleren Druck, der dadurch entstand, daß die Wellen eine 45grädige Schüttungsböschung hinaufliefen; dem habe es entsprochen, daß das Wasser etwa 20 m über mittlerem Meeresspiegel hinaufgeschleudert wurde. Die größten senkrechten Erhebungen sind an isoliert liegenden, auf geneigten Klippen erbauten Leuchttürmen, sowie an steilen Felswänden, vorzüglich solchen, vor denen unter Wasser eine Böschung vorhanden ist, beobachtet worden, so z. B. schlug die Brandung am Leuchtturm zu Bellrock bis zu 32 m, an der Mole zu Cherbourg bis zu 36 m, ja an dem den Wogen des Atlantischen Ozeans besonders ausgesetzten Leuchtturm von Eddystone[2]) bis zu 50 m Höhe hinauf. Im Jahre 1859 wurde von dem auf Bishop-Rock (Scilly-Inseln) stehenden Leuchtturm eine 150 kg schwere, an einem Balken hängende Glocke in einer Höhe von über 30 m heruntergestoßen. An der dahinterliegenden Küste von Cornwall sind in 90 m, an der norwegischen Küste bei Wasbergen sogar in 120 m Höhe noch zusammenhängende Wassermassen durch den Sturm hinaufgeschleudert worden.

XIV. Der Wasserstoß.

Der Stoß einer Flüssigkeit gegen einen festen Körper ist von dem gegenseitigen Stoß zweier fester Körper grundsätzlich verschieden, weil bei ersterem nach Eintritt des Beharrungszustandes der feste Körper fortdauernden Druck erleidet, während bei letzterem der Vorgang sich rasch abspielt, also bald Entlastung erfolgt. Dabei kann es sich um den Druck eines Strahles handeln, dessen Querschnitt kleiner als der des gestoßenen Körpers ist, oder um den eines Stromes, der den Körper allseitig umgibt und in enger Beziehung zum Widerstande steht, der bei Bewegung des Körpers in einer Flüssigkeit zu überwinden ist. Man hat daher den Strahldruck vom Strömungsdruck und vom Bewegungswiderstand zu unterscheiden. Ersterer spielt im Bau hydraulischer Motoren, letztere spielen im Schiffbau — ja, soweit es sich um Vorgänge in der Luft statt im Wasser handelt — in der Luftschiffahrt, der Flugtechnik und der Ballistik sowie als Winddruck auf Bauwerke eine wichtige Rolle. Da die genannten Gebiete ihre eigene selbständige und große Literatur

1) Giornale del Genio civile 39 (1901), S. 676. Über Angriff und Zerstörungen siehe ferner: Internat. ständig. Verband der Schiffahrts-Congresse, 10. Congreß — Mailand — 1905; 2. Abt., 4. Frage; *H. Mönch* u. *P. Hedde* im Handb. d. Ingenieurwissensch., 3. Wasserbau, 4. Aufl., 11. Bd. Häfen, 1912, S. 339.

2) Südlich von Plymouth.

besitzen, sei hier der Wasserstoß nur insofern behandelt, als ihm auch außerhalb jener Gebiete Bedeutung zukommt.

108. Strahldruck bei senkrechter Strahlrichtung. Die ersten Versuche über den Wasserstoß wurden unter Gutheißung der Pariser Akademie 1679 vorgenommen und schienen zu beweisen, daß der Strahlstoß immer dem Gewichte des Wasserzylinders gleich sei, der die Ausströmungsöffnung des Strahles zur Basis hat und bis zum Spiegel reicht. Obwohl dies nur angenähert bei Ausfluß des Strahles aus dünner Wand und keineswegs bei Austritt aus abgerundeter Öffnung zutrifft, blieben die vielen späteren Beobachter zunächst bei der nun einmal vorgefaßten Meinung. *I. Newton*[1]), der erste, der eine theoretische Ableitung des Strahldruckes unternahm, setzte das doppelte Gewicht an Stelle des einfachen, was aber auch nicht richtig war, und erst *Daniel Bernoulli*[2]), der auf ihn folgte, fand durch Einführung der Bewegungsgröße die Lösung der Frage und ist dadurch grundlegend geblieben.

Bei dem geraden Stoß, das heißt bei einer zur getroffenen Fläche senkrechten Strahlachse, und bei genügend großer ebener Ausdehnung dieser Fläche müssen die Wasserteilchen ihre Bewegung allmählich um einen rechten Winkel ändern, bis die gesamte Bewegungsgröße in der Strahlrichtung durch den Gegendruck der getroffenen Platte aufgehoben wird. In der Zeiteinheit beträgt bei einer Ausflußmenge Q die ausströmende Masse $\frac{\gamma Q}{g}$ und ihre Bewegungsgröße, wenn die ursprüngliche Geschwindigkeit mit v bezeichnet wird, $\frac{\gamma Q}{g} v$, so daß für den Gegendruck P der getroffenen Platte sofort

$$P = \frac{\gamma}{g} Q v = 2 \gamma F \frac{v^2}{2g} = 2 \gamma F h \tag{229}$$

folgt, worin F den Strahlquerschnitt, h die Geschwindigkeitshöhe bezeichnet. Der gerade Wasserstoß gegen eine ebene Fläche ist also gleich dem *Gewichte einer Wassersäule, die den Strahlquerschnitt zur Grundfläche und die doppelte Geschwindigkeitshöhe zur Höhe* hat. Wenn man von der Wirkung der Reibung absieht, muß übrigens nach dem *Bernoulli*schen Theorem die absolute Geschwindigkeit der ankommenden Teilchen gleich der abfließenden sein, weil beide unter demselben Druck stehen. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß ebenso wie im Inneren

1) Philosophiae naturalis principia mathematica 1687, Propos. 36 Probl. 8 Corrol. 2.

2) Petersburg, Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae t. 8 ad annum 1736 (ersch. 1741), S. 113 u. f.

des ankommenden Strahles im Inneren der abfließenden Wasserscheibe kein höherer Druck als der äußere atmosphärische herrsche, was nicht genau zutreffen dürfte. Auch ist angenommen, daß die Höhenlage der Teilchen sich nicht wesentlich ändert.

Ist die Platte rund und klein und liegt ihr Mittelpunkt in der Strahlachse, so daß alle Wasserteilchen unter demselben Winkel β mit der Strahlachse abströmen, so verbleibt von jeder Geschwindigkeit v_1, wenn die Abflußgeschwindigkeit v_2 beträgt, in der ursprünglichen Richtung eine solche $v_2 \cos\beta$, wonach nunmehr

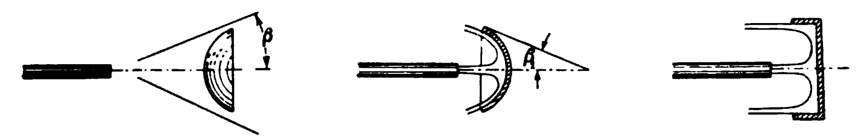
(230) $$P = \frac{\gamma}{g}\, Q(v_1 - v_2 \cos\beta)$$

gilt. Da aber wie früher $v_1 = v_2$ sein muß, folgt ohne weiteres

(230a) $$P = \frac{\gamma}{g}\, Qv(1 - \cos\beta).$$

Auch die Überlegung, die zu (230a) führte, rührt von *D. Bernoulli*[1]) her.

Die Gleichung (230a) läßt sich auch auf den Fall ausdehnen, daß man das Wasser auf eine konvexe Umdrehungsfläche stoßen läßt, die es unter einem Winkel β mit der Strahlachse ableitet. Macht man



$\beta = 180 - \beta_1$ zu einem stumpfen Winkel, indem man die Hohlseite einer Schale oder eine Platte mit einem erhöhten Leisten (rebord, border) versieht, so kann man Gl. (230a) mit

(231) $$P = \frac{\gamma}{g}\, Qv(1 + \cos\beta_1)$$

vertauschen, in der β_1 wieder einen spitzen Winkel bezeichnet. Für völlige Strahlumkehr oder $\beta_1 = 0$ geht hieraus als Maximum des Wasserstoßes

(231a) $$P = \frac{2\gamma}{g}\, Qv$$

hervor, wie schon *L. Euler* bemerkt hat[2]).

Versuche von *Ch. Bossut*[3]), *G. T. Michelotti* (dem Sohn)[4]), *S. Vince*[5]),

1) Ebenda S. 109, 124.

2) *Rühlmann*, Hydromechanik, S. 576 zitiert Übersetzung von *Robins* „Grundsätze der Artillerie" 1745, Anmerkungen S. 451, 458.

3) Hydrodynamique, Paris 1772, t. 2, Nr. 856.

4) Hydraulische Versuche, deutsch von *Eytelwein*, Anhang S. 251.

5) Philosophical transactions 1798, part. I, S. 8. Experiments upon resistance of bodies moving in fluids.

K. Ch. Langsdorf[1]), *G. Morosi*[2]) und *G. Bidone*[3]), welch letzterer mit Geschwindigkeiten von mindestens 8,7 m an Messingplatten von 5,4 bis 24,3 cm Durchmesser maß, haben so ziemlich denselben Druck wie (229) ergeben, wenn die Plattenfläche mindestens 6 mal so groß wie der Strahlquerschnitt war und wenn die Platte mindestens um die doppelte Strahldicke von der Ausflußöffnung abstand. War die gestoßene Fläche der Mündung ganz nahe, so sank bei *Bidone* P auf $1{,}5\,\gamma F h$, und besaß die Platte nur den Strahlquerschnitt als Fläche, so wurde das Wasser in spitzem Winkel abgelenkt und sank P sogar auf nur $\gamma F h$. Ferner fanden *Bidone* und andere, daß der Stoß im ersten Augenblicke beinahe noch einmal so groß wie später bei andauernder Strömung ist. Nach den Genannten stellte *J. Weisbach* genaue Messungen an, bei denen allerdings die Ausflußöffnungen, aus denen der Strahl trat, nur 1 bis 1,5 cm Dmr. hatten. *Weisbach* wendete sowohl eine ebene Platte von 10 cm Dmr., als auch eine nach einem Umdrehungshyperboloid geformte Schale von ebensolchem Durchmesser an, deren Endtangenten einen Winkel β_1 von 46^0 mit der Achse einschlossen. Er fand für die ebene Platte mit $h = 0{,}55$ bis 1 m den Stoßdruck im Mittel 0,96 des P der Formel (229). Bedeutender war die Abweichung des gemessenen Druckes P_1 bei der Hohlschale vom P der Formel (231), so daß sie nicht von einer unrichtigen Schätzung des Ausflußkoeffizienten oder Messungsfehlern herrühren konnte, sondern zeigte, daß die Abflußgeschwindigkeit v_2 infolge der Reibung wesentlich kleiner als die Ankunftsgeschwindigkeit war. Das Ergebnis der Versuche *Weisbachs* faßt *F. Grashof*[4]) wie folgt zusammen, wobei er unter $D : d$ das Verhältnis des Durchmessers der gestoßenen Fläche zu dem des Strahlenquerschnittes versteht:

Ausfluß durch	$D : d$	$\frac{v_1^2}{2g}$	$\frac{P_1}{P}$	$\frac{v_2}{v_1}$
		m		
Öffnung in dünner Wand	12,5	8,66	0,824	0,674
Öffnung in dünner Wand	9	7,24	0,881	0,837
konoidisches Mundstück.	10	1,91	0,899	0,851

Bemerkt werde noch, daß, wie bei einer konkaven Fläche die Verzöge-

1) Lehrbuch der Hydraulik, Altenburg 1794, S. 189.

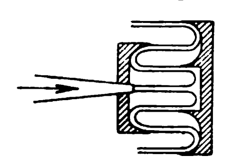
2) Mailand, Memorie dell' Imp. R. Istituto del Regno Lombardo-Veneto 1, anni 1812 e 1813, ersch. 1819.

3) Turin, Memorie 11 (1838), S. 130.

4) Z. d. V. deutsch. Ing. 7 (1863), S. 242 und Theoretische Maschinenlehre 1, S. 874. Daß ein plötzlicher Strahl nicht stärker als ein fortdauernder drückt: *D. D. Gaillard,* Wave Action, S. 183.

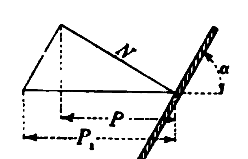
rung des Ausflusses durch die Reibung den Stoßdruck vermindert, sie ihn bei konvexer gestoßener Fläche erhöht.

Mit Versuchen bei Strahlumkehr befaßte sich *G. Morosi*. Bei Austritt des Strahles aus einer konvergenten Düse von 2,7 cm Weite, einem Mündungsabstand der gestoßenen Ebene von etwa 3 mal dem kleinsten Strahldurchmesser und einer gestoßenen Fläche von über 8 mal dem Strahlquerschnitt fand *Morosi*, daß der Stoß mehr als doppelt so groß als früher wurde, wenn er den Umfang der gestoßenen quadratischen Platte mit einem Leisten von mindestens 13,6 mm Höhe versah, durch den das Wasser genau entgegengesetzt zur Ankunftsrichtung abfloß.



Noch mehr steigerte sich der Druck[1]) bei zweimaliger Strahlumkehr und zwar verhielt sich der Druck auf die ebene Platte, zu dem auf die eingefaßte und zu dem auf die Platte mit doppelten Leisten wie 1 : 1,8 : 3,32.

109. Strahldruck bei schiefer Strahlrichtung. Den schiefen Wasserstoß berechneten die älteren Hydrauliker derart, daß sie in Anlehnung an die Stoßgesetze fester Körper die größte Kraft P_1, die der Strahl äußern könnte, in den senkrecht zur Platte wirkenden *Normalstoß* N und eine zur Platte parallele und daher unwirksame Teilkraft zerlegten. Mit α als Winkel zwischen Strahlachse und Platte gilt dann



$$N = P_1 \sin\alpha = \frac{\gamma}{g} Qv \sin\alpha \tag{232}$$

und für die zur Strahlrichtung parallele Komponente von N oder den sogenannten *Parallelstoß*

$$P = N \sin\alpha = \frac{\gamma}{g} Qv \sin^2\alpha\,. \tag{233}$$

Die Beziehung $N = P_1 \sin\alpha$ bezeichnet schon *D. Bernoulli*[2]) als die gewöhnliche. Abweichend hiervon finden zwar durch ziemlich willkürliche Überlegungen

(233 a) *Duchemin*[3]) $\quad N = \frac{\gamma}{g} Qv \frac{2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$,

1) Mailand, Memorie dell' I. R. Istituto 1 = 1812 u. 1813, S. 309.

2) Petersburg, Commentari, t. 8, S. 126.

3) Recherches expérimentales sur les lois de la résistance des fluides, 1842 = Mémorial de l'artillerie Nr. 5 = Experimental-Untersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten, deutsch von *Schnuse*, Braunschweig 1844, § 52 usw.

$$(233\text{a}) \quad \begin{cases} \textit{Weisbach}^{1)} & P = \frac{\gamma}{g} Q v \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}, \\ \textit{Broch}^{2)} & P = \frac{\gamma}{g} Q v \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg} \alpha, \end{cases}$$

aber die Gültigkeit von (232) und (233) steht trotzdem fest[3]). *F. Wittenbauer*[4]) beweist sie z. B., indem er den Schwerpunkt der Teilchen betrachtet, die ursprünglich ein Strahlelement bildeten. Da diese Teilchen später sich zu einem (übrigens ungleichmäßig dicken) Ring zusammensetzen, der sich auf der Platte liegend ausdehnt, so bewegt sich ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt erst im Strahl, später parallel zur Platte. Versteht man unter v die Strahlgeschwindigkeit, also die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes, unter v_s dessen Endgeschwindigkeit und unter α den Winkel zwischen Strahlachse und Platte, so gilt, weil man sich die Massen im Schwerpunkt vereinigt denken kann, nach dem Impulssatz für den Parallelstoß zunächst

$$(234) \qquad P = \frac{\gamma}{g} Q(v - v_s \cos \alpha).$$

Zugleich aber muß, da in der Plattenrichtung keine äußere Kraft auf die strömende Flüssigkeit wirkt, nach dem Prinzipe der Bewegung des Schwerpunktes

$$(234\text{a}) \qquad \frac{\gamma}{g} Q(v_s - v \cos \alpha) = 0$$

oder

$$v_s = v \cos \alpha$$

sein, woraus in Verbindung mit Gl. (234) sofort der zu beweisende Ausdruck

$$(235) \qquad P = \frac{\gamma}{g} Q v \sin^2 \alpha$$

hervorgeht.

Um die Verteilung des Abflusses über die Platte zu ermitteln, werde beachtet, daß jedes Teilchen von seiner Anfangsgeschwindigkeit v infolge des Plattenwiderstandes in der Richtung der Neigungslinie der Plattenebene nur $v \cos \alpha$ behält. Zu dieser Geschwindigkeit $v \cos \alpha$ tritt aber noch als Folge des im Kern der Wassermasse herrschenden Druckes eine Radialgeschwindigkeit v_r hinzu. Wird nun vom Punkte O, in welchem die Strahlachse die Platte trifft, ein Kreis beschrieben, dessen

1) Lehrbuch 1, Braunschw 1845, S. 525.

2) *O. J. Broch*, Lehrbuch der Mechanik, Berlin 1849.

3) Nach *B. de Saint-Venant*, Paris, Mémoires de l'Académie (2) 44 (1888), S. 28 gab erst *B. Clapeyron* einen richtigen Beweis in Ann. des mines 1833.

4) Zeitsch. Math. Phys. 46 (1901), S. 182.

Halbmesser ϱ so groß ist, daß alle auf den Kreis befindlichen Teilchen sich bereits nahezu parallel zur Platte bewegen, so muß, wenn man von der Wirkung der Reibung absieht, nach dem *Bernoulli*schen Theorem die Abflußgeschwindigkeit v_2 aller Teilchen daselbst gleich der ursprünglichen Geschwindigkeit v sein.

Man kann auch annehmen, daß, weil ϱ groß im Vergleich zur Strahldicke ist, die Teilchen den betrachteten Kreis in geraden Linien durchqueren, die vom Punkt O ausgehen. Wenn nun der Winkel, den eine solche Gerade mit der Neigungslinie der Plattenebene einschließt, mit φ bezeichnet wird, gilt, wie die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten v_r und $v \cos\alpha$ zu v lehrt,

$$v_r^2 = v^2 + v^2 \cos^2\alpha - 2v^2 \cos\alpha \cos\varphi = v^2(1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi). \tag{236}$$

Da nun ein und derselbe Druck alle Geschwindigkeiten erzeugt, müssen die Massen, welchen er in der Zeiteinheit die Geschwindigkeiten v_r erteilt, den v_r verkehrt proportional sein. Es sind dieselben Massen, welche unter der Mitwirkung der Geschwindigkeiten $v \cos\alpha$ unter den Winkeln φ mit der Neigungslinie den Kreis durchqueren. Es gilt daher, wenn δ die mit φ wechselnde Dicke der Wasserschicht im Kreis und k eine Konstante bezeichnet, $\delta v_r = k : v_r$ oder

$$\delta = \frac{k}{v_r^2} = \frac{k}{v^2(1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi)}. \tag{236a}$$

Es muß ferner wegen der Gleichheit von Zufluß und Abfluß

$$Q = \int_{-\pi}^{\pi} \varrho\,\delta\,v\,d\varphi = \frac{\varrho k}{v}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi} \tag{236b}$$

sein. Die allgemeine Lösung des Integrales lautet

$$\frac{2}{\sin^2\alpha}\,\text{arc tang}\left[\text{cotang}^2\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\frac{\varphi}{2}\right], \tag{236c}$$

wie man sich durch Differenzieren überzeugen kann, indem man dabei

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}\,\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\,\frac{1+\text{tang}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)^2\text{tang}^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{1}{(1-\cos\alpha)^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + (1+\cos\alpha)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi}$$

erhält. Durch Einführung der Grenzen bekommt man also

$$Q = \frac{\varrho k}{v} \frac{4}{\sin^4 \alpha} \operatorname{arc\,tang} \infty = \frac{2\pi \varrho k}{v \sin^2 \alpha} \tag{237}$$

oder

$$k = \frac{v Q \sin^2 \alpha}{2\pi \varrho}$$

und als Wasserschichtdicke in der Entfernung ϱ vom Treffpunkte O des Strahles[1])

$$\delta = \frac{Q}{2\pi \varrho v} \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \varphi}. \tag{238}$$

Mit δ als Funktion von φ ist bei der allgemeinen Gleichheit von v_2 und v die Abflußweise nunmehr bekannt.

110. Strahldruck bei behindertem Abfluß[2]). Da mit der Gl. (238) rings im Umkreis die wechselnde Wasserschichtdicke δ, sowie die unveränderliche Geschwindigkeit v bekannt sind, kann man auch den Wasserstoß berechnen, falls die Platte mit einem Leisten versehen ist, der den Abfluß auf einem Teil der Platte behindert. Während die Geschwindigkeit v_s des gemeinschaftlichen Schwerpunktes jener Teilchen, die ursprünglich ein Strahlelement bildeten, bisher in die Neigungslinie der Platte fiel, wird ihre Richtung jetzt durch das Hindernis $N_1 N_2$ beeinflußt und ist für die Berechnung des Parallelstoßes nur mehr jener Teil v_{s1} von v_s maßgebend, der jetzt noch in die Neigungslinie fällt. Gl. (234) verwandelt sich dadurch in

$$P = \frac{\gamma}{g} Q (v - v_{s1} \cos \alpha). \tag{239}$$

Um v_{s1} zu finden, bemerke man, daß die im Sektor $d\varphi$ in der Zeiteinheit abfließende Menge

$$\frac{\gamma}{g} \varrho \, d\varphi \cdot \delta \cdot v$$

in N (Figur S. 392) an die Begrenzung stößt und daselbst einen Gegendruck dN hervorruft, der, wenn der Winkel unter dem ON die Leistenkurve in N schneidet, mit λ bezeichnet wird, die Größe (vgl. (238))

$$dN = \frac{\gamma}{g} \varrho \delta v^2 \sin \lambda \, d\varphi = \frac{\gamma}{g} Q v \frac{\sin^2 \alpha \sin \lambda}{2\pi (1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \varphi)} d\varphi \tag{239a}$$

---

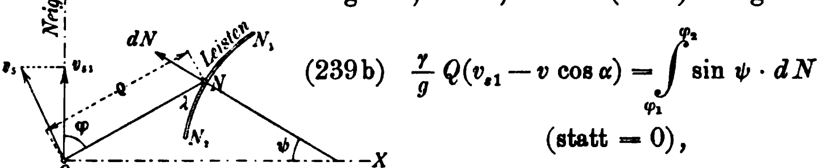
1) Die Gl. (238) stammt von *F. Wittenbauer*, welcher sie in der Zeitsch. f. Math. u. Phys. 46 (1901), S. 189 unter der Annahme ableitete, daß der Zwang in der Richtung der Platte allseitig gleich sei. Dabei gilt nach *K. F. Gauß*, daß wenn im Zeitelement ein Massenelement dm bei gezwungener Bewegung von M nach Q gelangt, während es bei freier Bewegung von M nach N gelangt wäre, der Zwang $= 2\, \overline{NQ}^2 \, dm$ ist.

2) *F. Wittenbauer*, ebenda S. 191 f.

hat. Bezeichnet man ferner mit ψ die Neigung der Kurvennormalen in N gegen die zur Plattenneigungslinie OY senkrechte Gerade OX, so ist

$$\lambda = \varphi - \psi.$$

Vom Gegendruck dN des Leistens beeinflußt der zu OY parallele Teil $\sin\psi \cdot dN$ die Schwerpunktsgeschwindigkeit v_{s1} in der Richtung OY, derart, daß Gl. (234a) übergeht in



$$\text{(239b)}\quad \frac{\gamma}{g}\,Q(v_{s1} - v\cos\alpha) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\psi \cdot dN$$

(statt $= 0$),

worin φ_1 und φ_2 die den Endpunkten N_1 und N_2 der Begrenzung entsprechenden Werte von φ sind, oder in

$$\frac{\gamma}{g}\,Q(v_{s1} - v\cos\alpha) = \frac{\gamma}{g}\,Qv\,\frac{\sin^2\alpha}{2\pi}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin\lambda\sin\psi}{1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Es ergibt sich also, weil $v - v_{s1}\cos\alpha$ mit $v\sin^2\alpha - (v_{s1} - v\cos\alpha)\cos\alpha$ identisch ist, der Parallelstoß nach (239) zu

$$\text{(240)}\quad P = \frac{\gamma}{g}\,Qv\sin^2\alpha\left[1 - \frac{\cos\alpha}{2\pi}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin\lambda\sin\psi}{1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi}\,d\varphi\right].$$

Beispiel[1]). Bildet der Leisten einen vom Strahltreffpunkt als Mittelpunkt aus beschriebenen Kreisbogen, so ist $\psi = 90^\circ + \varphi$ und $\lambda = 90^\circ$ daher

$$\cos\alpha\int\frac{\sin\lambda\sin\psi}{1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi}\,d\varphi = \int\frac{-\cos\alpha\cos\varphi}{1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1+\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi}\right)d\varphi \quad \text{(vgl. (236c))}$$

$$= \frac{\varphi}{2} - \frac{1+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\,\text{arc tang}\left(\text{cotang}^2\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\frac{\varphi}{2}\right) + \text{konst.}$$

und

$$P = \frac{\gamma}{g}\,Qv\sin^2\alpha\left\{1 - \left[\frac{\varphi}{4\pi} - \frac{1+\cos^2\alpha}{2\pi\sin^2\alpha}\,\text{arc tang}\left(\text{cotang}^2\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}\right\}.$$

Für einen Halbkreis, der von $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ bis $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ reicht, ist hiernach beispielsweise

$$P = \frac{\gamma}{g}\,Qv\sin^2\alpha\left\{\frac{3}{4} + \frac{1+\cos^2\alpha}{\pi\sin^2\alpha}\,\text{arc tang}\left(\text{cotang}^2\frac{\alpha}{2}\right)\right\}.$$

111. Strömungsdruck auf eine Platte und Widerstand bei Bewegung einer solchen. Mit dem *Strömungsdruck* auf eine Platte, nämlich der Gegenkraft, die man im unbegrenzten, fließenden Wasser auf-

1) *F. Wittenbauer*, ebenda S. 194.

bieten muß, damit sie nicht fortgeschleppt werde, befaßte sich als erster *E. Mariotte*[1]), der eine quadratische Platte von bfg. 0,1 m² Fläche Geschwindigkeiten von 0,4 bis 1,08 m sec^{-1} aussetzte. Nach seinen Angaben wäre in moderner Weise ausgedrückt bei einer Fläche F (in m²) einer Strömungsgeschwindigkeit v (in m sec^{-1}) und einem Eigengewicht γ (in kg m^{-3}) der Flüssigkeit die Stoß- oder Schleppkraft (in kg)

$$(241) \qquad P = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g} = 1{,}29 \text{ bis } 1{,}31\, \gamma F \frac{v^2}{2g}.$$

L. G. du Buat[2]) fand, daß die Kraft P daher entspringt, daß die Pressung an der stromauf gekehrten Seite größer und an der stromab gekehrten Seite kleiner ist, als der Tiefenlage unter ruhigem Wasser entspräche. Für ähnliche F und v wie die *Mariottes* hat *du Buat*

$$(241\text{a}) \qquad P = (1{,}19 + 0{,}67)\, \gamma F \frac{v^2}{2g} = 1{,}86\, \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

wobei die Zahl von 1,19 vom Überdruck und die Zahl 0,67 vom Unterdruck stammt. Mit dem Koeffizienten 1,86 stimmen auch die Ergebnisse anderer Experimentatoren[3]).

Hat man es nicht mit einer festen Scheibe in fließendem Wasser, sondern mit einer sich bewegenden in ruhigem Wasser zu tun, so ist, wie *du Buat* entdeckte, der *Widerstand* des Wassers ein anderer und zwar *kleiner*. Nach *L. Prandtl*[4]) besteht der erhöhte Widerstand in einer Zunahme der durch Wirbel verursachten Druckabsenkung auf der Achterseite der Platte, wenn die Flüssigkeit (bei ihm ist es Luft) schon mit Wirbel ankommt. Hier sei bemerkt, daß die Platte in ursprünglich ruhigem Wasser dieses in einen Umlauf bringt, der den späteren Fortschritt erleichtert, so daß die Platte fortdauernd günstig vorbewegtes Wasser vorfindet. Wird dieses durch die Turbulenz immer wieder entfernt, so muß mehr Arbeit verrichtet werden, also der Widerstand wachsen.

Für 0,1 m² Querschnitt und 0,9 m sec^{-1} Geschwindigkeit der Platte fand *du Buat*[5]), indem er ebenfalls sowohl den Überdruck wie den Unterdruck maß,

$$(241\text{b}) \qquad P = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g} = (1 + 0{,}433)\, \gamma F \frac{v^2}{2g}.$$

Der Wert 1,433 stimmt auch mit einer Messung des Grafen *Pambour*[6])

1) Traité du mouvement de l'eau, Teil 2, Gespräch 2, Regel 5.

2) Principes d'hydraulique 2, nouv. éd. 1816, S. 177, 190.

3) *Poncelet*, Introduction à la mécanique industrielle, Paris 1839, S. 585. Versuche mit herabfallendem Wasser: *D. D. Gaillard,* Wave Action, S. 184.

4) Zeitsch. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1 (1910), S. 74.

5) Principes d'hydraulique 2, nouv. éd. 1816, S. 215.

6) *Gaudry,* Traité des machines a vapeur 1, Paris 1856, S. 70.

überein, während *Poncelet*[1]) rät, allgemein $\zeta = 1{,}30$ zu nehmen, ferner *M. Beaufoy*[2]) bei einer Scheibe von 0,093 m² Fläche $\zeta = 1{,}12$ fand; und *G. Piobert, A. J. Morin* und *I. Didion*[3]) bei Flächen von 0,03 bis 0,25 m² den Widerstand offenbar viel zu hoch mit

$$P = 0{,}934 F + 2{,}81 \gamma F \frac{v^2}{2g} \tag{241c}$$

bewerteten.

Den Strömungsdruck auf feststehende rechteckige Platten trachtete in neuerer Zeit *T. E. Stanton*[4]) festzustellen, dessen Gerinne aber im Vergleich zu den Platten nicht groß genug war. So war bis vor kurzem unser Wissen über den Strömungsdruck und den Widerstand bei Platten recht zweifelhaft, bis Versuche von *Engels* und *Gebers* einige Sicherheit brachten.

Es sind oben die Gleichungen (22a und b) nachgewiesen worden, nach welchen, wenn die Zähigkeit keine Rolle spielt, die Vorgänge eines Modells sich im Original wiederholen, wenn man sowohl die Druckhöhen wie die Längen im Verhältnis der Geschwindigkeitsquadrate vergrößert. Die Drucke auf die ähnlichen Flächen wachsen dann wie die dritten Potenzen ihrer Seiten. Für den Widerstand P, welchen reibungslos gedachtes Wasser bewegten, einander ähnlichen Körpern entgegensetzt, lautet dieses Gesetz, welches für diesen Fall bereits *I. Newton* kannte[5]), daß im Ausdruck (241)

$$P = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g}$$

ζ sich nicht ändert, wenn man $v^2 : \sqrt{F}$ konstant bleiben läßt. Die erwähnten Versuche von *H. Engels* und *Fr. Gebers*[6]), die mit weit vollkommeneren Mitteln als alle früheren gemacht wurden, haben nun für lotrecht gestellte und wagrecht bewegte unter- oder austauchende *Platten* das Zutreffen des Gesetzes nachgewiesen und gute Daten für ζ geliefert. Es war z. B. für untertauchende Quadrate von 0,1 m Seitenlänge, wenn die Oberkante 0,1 m unter den Spiegel getaucht war, bei

v in m sec^{-1}	= 0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
P in kg	= 0,16	0,66	1,41	2,33	3,51	5,02	6,85
ζ	= 1,26	1,29?	1,23	1,14	1,10	1,09	1,10

1) Introduction à la mécanique industrielle, S. 587.

2) Nautical and hydraulic experiments by Colonel *Beaufoy*, 1834.

3) *Poncelet,* Introduction, S. 582.

4) Institution of Naval Architects, Transactions 1909.

5) Philosophiae naturalis principia, London 1687, lib. 2, sectio 7, prop. 32, theor. 26.

6) Schiffbau 9 (1907/8), S. 201f.; *Gebers,* ebenda S. 435f.

und für austauchende, also zu Stau und Wellen Anlaß gebende Platten, von denen Quadrate von 0,1 m Seitenlänge ins Wasser reichten, für

v in m sec^{-1} =	0,5	1	1,5	2
P in kg =	0,16	0,78	1,71	2,87
ζ =	1,26	1,53	1,49	1,41

Für untergetauchte Quadrate nahm übrigens ζ ab, wenn die Tauchtiefe wuchs, so zeigten obige Platten folgende Zahlen:

v	Tauchung:	0,1	0,2	0,3
1 m sec^{-1}	ζ =	1,28	1,24	1,28
5 m sec^{-1}	ζ =	1,21	1,19	1,15

Daß im Ausdruck (241) ζ veränderlich ist, haben auch Versuche von *F. Matthias*[1]) dargetan. *H. Lang*[2]) folgert aus ihnen, daß bei untergetauchten Rechtecken von der Fläche F der Widerstand gegen ihre Bewegung am geringsten wird, wenn die Oberkante $2\sqrt{F}$ unter dem Spiegel liegt, und daß dieser Mindestwiderstand für metrisches Maß

$$(241\,\mathrm{d})\qquad P_{\min} = \left(1{,}05 + \frac{0{,}21}{\sqrt{v}}\right)\gamma F \frac{v^2}{2g} = \left(53{,}5 + \frac{10{,}6}{\sqrt{v}}\right) F v^2$$

ist, wofür bei anderer Tauchtiefe (mit P in kg, F in m^2, v in m sec^{-1})

$$(241\,\mathrm{e})\qquad P = 50{,}3 \text{ bis } 56{,}9\left(1 + \frac{0{,}21}{\sqrt{v}}\right) F v^2$$

tritt.

Der Ansatz (241), nach welchem der Widerstand P dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, bringt zum Ausdruck, daß die Zähigkeit in ihm keine Rolle spielt und wesentlich Trägheitskräfte zu überwinden sind. Damit wird aber zugleich ζ für alle Flüssigkeiten gleich groß, so daß man Daten, die für Scheiben in der Luft erhoben worden sind, allenfalls auch auf solche in Wasser anwenden darf, obschon der kinematische Reibungskoeffizient der Luft annähernd 14mal so groß wie der des Wassers von 15° C ist[3]). Irreführend sind aber vielfach die Zahlen, welche, wie dies häufig bei Luftversuchen geschah, an umlaufenden Scheiben unter Anwendung eines vergleichsweise kleinen Laufkreises ermittelt wurden, weil bei diesem Vorgange das Verhältnis

---

1) Ebenda 13 (1911/12), S. 249, 299, 351, 396.

2) Bisher unveröffentlicht.

3) Näher ausgeführt in *F. W. Lanchester,* Aerodynamik 1, deutsch v. *C.* u. *A. Runge,* Leipzig-Berlin 1909, S. 47, 48. Über die Entwickelung des betreffenden Teiles der Aerodynamik siehe *S. Finsterwalder,* Encyklopädie d. math. Wissensch., 4. Bd., 3. Teilband, S. 150 u. f.; *C. Cranz,* ebenda S. 190 u. f. = Aerodynamik u. Ballistik.

des Halbmessers des inneren Umlaufkreises zu dem des äußeren das Ergebnis beeinflußt[1]) und die Scheibe immer wieder in die schon früher von ihr bewegte Luft kommt. Endlich ist hervorzuheben, daß auch in der Luft der Strömungsdruck den Widerstand wesentlich und zwar etwa um die Hälfte aus dem S. 393 angegebenen Grunde übertrifft[2]).

Die in der Luft vorgenommenen Versuche gestatten einen Einblick in die Abhängigkeit des senkrecht zur Platte gerichteten Widerstandes N von der *Bewegungsrichtung* der Platte. Nach den Versuchen *S. P. Langleys*[3]) trifft hierfür *Duchemins* Formel (233a)

$$N = P_1 \frac{2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha},$$

in welcher P_1 den Widerstand bei Bewegung senkrecht zur Platte bedeutet, genau zu, obwohl sie nach *Duchemin* nur für den Strahldruck passen und für den Strömungsdruck senkrecht zur Platte

$$N = P_1 \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$$

gelten sollte[4]). Vielleicht kommt dies daher, daß derselbe bei Ableitung seiner Formel von der Verteilung der Wasserfäden ausging, die er an einer in strömendes Wasser getauchten Platte beobachtete. Überraschend war auch, daß *W. Dines*[5]) abweichend von den Vorgenannten den größten Normaldruck nicht für $\alpha = 90^0$, sondern für $\alpha =$ ungefähr 35^0 und dann starken Druckabfall zwischen 35^0 und 40^0 erhielt. Ähnliche Höcker der Druckkurve fand *Stanton* in strömendem Wasser und *O. Föppl*[6]) im Luftstrom. Dieser wies auch mittels Salmiaknebeln nach, daß für α zwischen 38^0 und 42^0 zweierlei Strömungsweisen bestehen, deren Widerstände sich wie $1 : 1^1/_2$ bis $1^3/_4$ verhalten.

Versuche, bei welchen kleine rechteckige Platten an einem auf einem Gleise fahrbaren Wagen befestigt waren, nahm *F. Fink*[7]) vor, der also nicht N, sondern die Triebkraft $N \sin \alpha$ ermittelte, die sich mit

1) So nach *R. Knoller,* Flug- u. Motor-Technik 3 (1909), Nr. 22 u. 23 = Gesetze des Luftwiderstandes, Wien 1909, S. 5.

2) Siehe ebenda S. 4.

3) Smithsonian Contributions to Knowledge 801 = *S. P. Langley,* Experiments in Aerodynamics 1891, auch 2. ed., Washington 1902, S. 24.

4) *Duchemin,* Recherches expérimentales, S 148.

5) London Proc. Roy. Soc. 48 (1890), S. 223. Bildlicher Vergleich der Formeln: *F. W. Lanchester,* Aerodynamik 1, S. 172.

6) Z. d. V. deutsch. Ing. 56 (1912), S. 1937.

7) Civilingenieur (2) 38 (1892), Sp. 213, 529, 636. *L. Prandtl* zeigte in der Zeitsch. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1 (1910), S. 63, daß für praktische Fragen der Lufttechnik die Luft als unzusammendrückbar angesehen werden darf.

dem Führungsdruck des Gleises zu N zusammensetzt. Zieht man vom Widerstande den Teil ab, der auf die Reibung entfällt, so führen nach *H. Lang*[1]) die genannten Versuche auf nachstehende Änderung der Triebkraft mit dem Winkel α zwischen Platte und Fahrtrichtung:

$\alpha =$	0° bis 30°	30° bis 50°	50° bis 90°
$N \sin\alpha : P_1 =$	$1{,}8 \sin^2\alpha$; der Strom legt sich an die Rückwand in zu ihr parallelen Schichten an	∼förmige Übergangslinie	$\sin^{2/3}\alpha$; an der Rückwand treten Wirbel auf

Ähnliche Versuche von *F. Matthias* gaben etwas abweichend

für $\alpha =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$N : P_1 =$	0,90	0,95	0,99	1,01	1,01	1,00

Über die *Lage des Angriffspunktes* nahm als erster *G. Avanzini*[2]) Versuche vor, bei welchen er rechteckige Platten ein Gerinne entlang führte. Eine Betrachtung seiner Ergebnisse läßt im Wasser (zum Unterschiede von Luft) keinen wesentlichen Einfluß der Plattenlänge oder -breite erkennen, wohl aber einen solchen der Geschwindigkeit. Bezeichnet φ den Winkel zwischen Platte und Stromrichtung, l die Plattenlänge, e die Entfernung des Angriffspunktes des Strömungsdruckes von der stromauf befindlichen Kante, so gibt nachstehende Zusammenstellung die beobachteten φ:

Geschwindigkeit m sec⁻¹	Verhältnis $e : l$					Grundriß
	$\frac{12}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{10}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	
0,86	90°	53°30′	33°59′	25°9′	21°6′	
1,09	90°	—	—	—	18°2′	
1,35	90°	—	27°50′	—	15°	
1,71	90°	—	—	14°30′	12°12′	
2,23	90°	—	—	—	10°45′	
2,70	90°	—	—	—	8°44′	

Später gab *Joëssel*[3]) auf Grund von Versuchen in der Loire die Formel

$$e = (0{,}2 + 0{,}3 \sin\varphi)\, l,$$

nach welcher die Geschwindigkeit keinen Einfluß hätte.

Auch parallel zur Drehachse, also senkrecht zur oben betrachteten Verschiebung, erleidet der Angriffspunkt eine Verschiebung und zwar

1) Hütte 1, 21. Aufl., Berlin 1911, S. 330.

2) *R. de Villamil*: The Laws of Avanzini. London 1912 = Aëronautical Journal 1912 nach Memorie dell' Istituto Nazionale Italiano 1. *Duchemin*, S. 49, 51 zitiert auch: Memorie della Academia di Padova 3.

3) *Flamant*, 3. Aufl., S. 589 zitiert: Mémorial du Génie maritime 1873.

mit der Geschwindigkeit. *F. Matthias*[1]) ist der Ansicht, daß für $v = 0$ der Angriffspunkt mit dem des statischen Wasserdruckes zusammenfalle, während er bei wachsendem v in die Höhe rückt und nach den — übrigens nicht erschöpfenden — Versuchen bei einer Plattenhöhe h in der Höhe $0{,}58\,h$ über der Rechteckmitte liegen kann.

112. Widerstand und Strömungsdruck bei einer Kugel. Die Betrachtungen über den *Widerstand*, den ein rings von einer Flüssigkeit umgebener Körper bei seiner Fortbewegung erleidet, nahmen ihren Anfang mit einer Theorie *I. Newtons*[2]), nach welcher eine Kugel vom Halbmesser a, die sich in einem Mittel vom Eigengewichte γ mit der Geschwindigkeit v bewegt, einen Widerstand

$$P = \zeta \gamma \pi a^2 \frac{v^2}{2g} = 0{,}5\,\gamma \pi a^2 \frac{v^2}{2g} \tag{242}$$

erleidet. Drückt man in dieser Formel γ, a, v und g in m, kg und sec aus, so erhält man auch P in kg. *Newton* stellte auch Versuche an, indem er Kugeln in Wasser fallen ließ, und er erachtete das Ergebnis im Einklang mit seiner Theorie, aber *Borda* ermittelte $\zeta = 0{,}56$, *Hutton* $\zeta = 0{,}594$, *Beaufoy*, der eine Kugel von 0,34 m Durchmesser oder 0,093 m Querschnitt mit 0,6 bis 3,66 m Geschwindigkeit unter Wasser schleppte, ζ im Mittel $= 0{,}383$. *Du Buat* kehrte auf Grund seiner Versuche wieder zum $\zeta = 0{,}5$ *Newtons* zurück. Auch für die Kugel wächst ζ, wenn man sie festhält und dagegen das Wasser strömt. Dementsprechend erhielt *J. A. Eytelwein*[3]), der ζ nicht aus Fallversuchen ableitete, sondern aus der Neigung eines Fadens, der durch eine Kugel gespannt wurde, die er ins Wasser tauchte, $\zeta = 0{,}7886$. In stillem Wasser erlangt aus dem oben angegebenen Grunde eine fallende Kugel eine größere Endgeschwindigkeit als in turbulentem.

Bei genügend langsamer Bewegung ist der Widerstand nicht mehr v^2, sondern v proportional. *G. G. Stokes*[4]) leitet nämlich bei einem Rei-

1) Schiffbau 13 (1911/12), S. 300, 397.

2) Philosophiae naturalis principia mathematica, London 1726, 3. Aufl., 2. Buch, 7. Abschnitt.

3) Er zitiert im Handbuch der Mechanik, 2. Aufl., Leipzig 1823, S. 244 Sammlung nützlicher Aufsätze und Nachrichten die Baukunst betreffend 2 (1799), S. 52.

4) Transactions of the Cambridge Philosophical Society 9 (1850) = *G. G. Stokes*, Mathematical and Physical Papers 3, Cambridge 1901, S. 60 Flüssige Kügelchen sinken rascher als starre: *W. Rybczynski*, Anzeiger der Akad. d. Wissensch. in Krakau, A. (1911), S. 40. Längs einer Wand wächst der Widerstand: *J. Stock*, ebenda S. 18.

bungskoeffizienten η der Flüssigkeit für die Endgeschwindigkeit einer fallenden Kugel die Gleichung

$$v = \frac{2}{9} \frac{\gamma_1 - \gamma}{\eta} a^2$$

ab, wonach das um den Auftrieb verminderte Kugelgewicht

$$P = \frac{4\pi}{3} (\gamma_1 - \gamma) a^3 = 6 \pi \eta a v \tag{242a}$$

sein muß. Bemerkenswert ist es, daß *H. S. Allen*[1]) durch Messung der Geschwindigkeit kleiner aufsteigender Gasblasen und kleiner sinkender Kugeln gefunden hat, daß es einen Zwischenzustand zwischen der Bewegung in Schichten und jener in Schlieren gibt, für den die Reibung proportional mit $v^{1,5}$ zunimmt.

Auch den Versuchen *J. Thoulets*[2]), welcher die mittlere Strömungsgeschwindigkeit U maß, die in einer Röhre von gegen 1 cm Durchmesser Kugeln schwebend erhielt, entspricht, wie eine Nachrechnung durch *A. Schoklitsch*[3]) ergab, nicht ein Exponent 2, sondern etwa 1,84. Dabei waren die Kugeldurchmesser $2a = 0{,}17$ bis $0{,}42$ cm und wurde die mittlere Strömungsgeschwindigkeit U von 6 bis 67 cm sec^{-1} gesteigert. Zugleich zeigte sich bei Wiederholung der Versuche jenes U ganz unabhängig von der Temperatur, also von der Zähigkeit.

H. S. Allen[4]) hat in einfacher Weise einen übrigens nicht auf die Kugel beschränkten Ausdruck für den Widerstand aufgestellt. Er dividiert sowohl den Widerstand P, als auch den inneren Reibungskoeffizienten η durch die Dichte und nimmt (willkürlich)

$$\frac{gP}{\gamma} = c_n \left(\frac{g\eta}{\gamma}\right)^{n_1} a^{n_2} v^n \tag{242b}$$

an, worin c_n eine Konstante, a eine bestimmte Länge, also ein Bezugsmaß — hier sei es der Kugelhalbmesser —, und $\frac{g\eta}{\gamma}$ den schon im § 15 erwähnten kinematischen Reibungskoeffizienten bedeutet. Gl. (242 b) zeigt die Dimensionen

$$\frac{\text{Länge}^4}{\text{Zeit}^2} = \frac{\text{Länge}^{2n_1}}{\text{Zeit}^{n_1}} \text{Länge}^{n_2} \frac{\text{Länge}^n}{\text{Zeit}^n},$$

wonach

$$4 = 2n_1 + n_2 + n, \quad 2 = n_1 + n$$

1) Phil. Mag. (5) 50 (1900), S. 323, 519. Bez. der kritischen Geschwindigkeit vgl. oben S. 50. Eine Begründung des Wachstums proportional $v^{1,5}$ gibt *F. W. Lanchester*, Aerodynamik, deutsch von *C.* u. *A. Runge* 1, Leipz. u. Berl. 1909, S. 43, 60.

2) Annales des mines (8) 5 (1884[1]), S. 512.

3) Bisher unveröffentlicht.

4) Phil. Mag. (5) 50 (1900), S. 326.

oder

$$n_1 = 2 - n, \quad n_2 = n$$

sein muß, und das allgemeine Gesetz

(242 c) $$P = c_n \frac{\gamma^{n-1}}{g^{n-1}} \eta^{2-n} a^n v^n$$

zu lauten hätte. Diese Formel führt für $n = 1$ bzw. $n = 2$ und $c_n = 6\pi$ bzw. $\frac{1}{4}\pi$ auf die Gleichungen (242a) und (242) von *Stokes* und *Newton*. Für ein *Allen*sches Kügelchen gibt sie

(242 d) $$P = c_n \sqrt{\frac{\gamma\eta}{g}}\, a^3 v^3,$$

wonach dasselbe bei einem Eigengewicht γ_1 beim Fallen oder Steigen eine Endgeschwindigkeit

(242 e) $$v_a = \left(\frac{4\pi}{3c_n}\right)^{2/3} (\gamma_1 - \gamma)^{2/3} \left(\frac{g}{\gamma\eta}\right)^{1/3} a$$

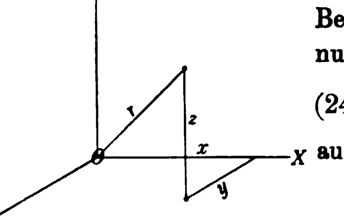
erlangen müßte. Durch Versuche fand *Allen*[1])

(242 f) $$v_a = \text{ungefähr } \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma)^{2/3} \left(\frac{g}{\gamma\eta}\right)^{1/3} \left(a - \frac{2}{5} a_k\right),$$

worin a_k den kritischen Radius bezeichnet, bei dem die *Stokes*sche Gleichung zu gelten aufhörte. Für Sand in Wasser von 15° C sei[2])

(242 g) $$a_k = 0{,}0085 \text{ cm}.$$

Obwohl bei gleichmäßigem Fortschritt die reibungslose Flüssigkeit der Bewegung keinen Widerstand entgegensetzt, tut sie solches in erheblichem Maße, wenn die Kugel infolge äußerer Kräfte (z. B. der Schwere) eine verzögerte oder beschleunigte Bewegung ausführt. Zur einschlägigen Berechnung werde von der Gleichung



(243) $$\Phi = -A \frac{x}{r^3}$$

ausgegangen, in der

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

die Entfernung eines Punktes vom Ursprung bedeute. Da die Differentiation von (243)

$$-\frac{1}{A}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \quad -\frac{1}{A}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{3xy}{r^5}, \quad -\frac{1}{A}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{3xz}{r^5},$$

$$-\frac{1}{A}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{-9xr^2 + 15x^3}{r^7}, \quad -\frac{1}{A}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{-3xr^2 + 15xy^2}{r^7},$$

$$-\frac{1}{A}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{-3xr^2 + 15xz^2}{r^7}$$

1) Ebenda S. 383, 584. 2) Ebenda S. 325. Vgl. unten S. 409.

liefert, folgt

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

und kann Φ als Geschwindigkeitspotential aufgefaßt werden. Die weitere Ableitung fußt auf der allgemeinen Bedeutung des Doppelintegrales

$$\iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial l} dF,$$

in dem F eine geschlossene Fläche, l die zu ihr normale Richtung bedeutet und Φ wieder ein Geschwindigkeitspotential, somit $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ die positive oder negative Strömungsgeschwindigkeit senkrecht zur Fläche F bedeutet, ferner $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ von innen nach außen zu messen und die Integration über den von F umschlossenen Raum zu erstrecken sei. Teilt man diesen Raum in zwei andere, 1 und 2, und bildet für letztere die entsprechenden Integrale, so ist

$$\text{(243a)} \quad \left[\iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial l} dF\right]_1 + \left[\iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial l} dF\right]_2 = \iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial l} dF,$$

weil für die Querfläche die $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ in den beiden Teilräumen entgegengesetztes Vorzeichen haben und sich daher die Ausdrücke $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial l} dF$ für die Querfläche aufheben. Die Teilung kann man derart vornehmen und fortsetzen, daß man den ursprünglichen Raum in lauter Stromfäden von den Querschnitten dS zerlegt. Bezeichnet n die längs der Fäden gemessenen Längen, so ist dann, weil der Durchfluß sich längs eines Fadens nicht ändert, für jeden Faden $\frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$ (worin $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ die Strömungsgeschwindigkeit) eine konstante Größe, und besteht daher, wie die Differentiation lehrt, die Beziehung

$$d\left[\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS\right] = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 dn\, dS,$$

oder, wenn man das Volum mit V, also das Volumelement mit

$$dV = dn\, dS$$

bezeichnet, die Beziehung

$$d\left[\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS\right] = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 dV.$$

Wird nun über den ganzen von F eingeschlossenen Raum integriert, so hat man, weil $\frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$ zugleich $\frac{\partial \Phi}{\partial l} dF$ ist,

$$\iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial l} dF = \iiint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 dV$$

und auch

$$\frac{\gamma}{g}\iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial l}\, dF = \frac{\gamma}{g}\iiint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)^2 dV, \tag{243b}$$

also gleich der *kinetischen Energie in dem von F begrenzten Raum*[1]). Dabei ist allerdings Bedingung, daß der Raum keine Quelle oder Senke enthalte, weil an diesen Stellen $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ unendlich groß wird und daher zu beiden Seiten einer Scheideebene hier die absoluten Werte von $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ um einen endlichen Betrag verschieden sein können. Dagegen ist es zulässig, daß der begrenzte Raum F als Innenbegrenzung besitzt und sich bis ins Unendliche ausdehnt, falls nur im Unendlichen $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ verschwindet.

Nunmehr werde zur Gl. (243) zurückgekehrt, die man mit Bezeichnung des Winkels zwischen einem Fahrstrahl r und der x-Achse mit θ auch

$$\Phi = -A \frac{\cos \theta}{r^2} \tag{244}$$

schreiben kann. Soll die durch (244) gegebene Flüssigkeitsbewegung dem Fortschritt einer Kugel vom Halbmesser a entsprechen, so muß die Bewegung derart vor sich gehen, daß ein Flüssigkeitsteilchen, das sich zu beliebiger Zeit an der Kugeloberfläche befindet, auch später an der inzwischen fortgeschrittenen Oberfläche, wenn auch an einer anderen Stelle derselben liegt. Das ist, da die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der r-Richtung $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ beträgt, der Fall, wenn für $r = a$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \cos \theta$$

ist, wobei U die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes bezeichnet. Die Vereinigung mit (244) gibt also als notwendige und, wie sich zugleich zeigt, erfüllbare Bedingung

$$\left(2 \cdot \frac{A \cos \theta}{r^3}\right)_{r=a} = U \cos \theta$$

oder

$$A = \frac{1}{2} U a^3,$$

womit (244) in

$$\Phi = -\frac{1}{2} U \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \tag{244a}$$

1) *W. Thomson* u. *P. G. Tait,* Treatise on Natural Philosophy, § 308, S. 283.

übergeht[1]). Für die Kugelfläche vom Halbmesser a hat man demzufolge

$$\Phi = \frac{1}{2}\, U \cos\theta \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(U \frac{a^3}{r^3} \cos\theta\right)_{r=a} = U \cos\theta$$

und da für eine Zone vom Zentriwinkel $d\theta$ oder für

$$dF = 2\pi\, a^2 \sin\theta\, d\theta,$$

ist, hat man weiter demnach, wenn man die Kugelfläche als Fläche F von (243b) nimmt, womit l und r identisch werden,

$$(245) \qquad \frac{\gamma}{g}\iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial l}\, dF = -\frac{\gamma}{g}\pi\, a^3 U^2 \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi\gamma}{3g}\, a^3 U^2.$$

Die kinetische Energie der Kugel beträgt, falls sie das Eigengewicht γ_1 besitzt, $\frac{4\pi}{3}\frac{\gamma_1}{g} a^3 U^2$, die jeweilige des umgebenden Mittels $\frac{2\pi}{3}\frac{\gamma}{g} a^3 U^2$; man kann also die Wirkung der Außenkräfte derart berechnen, als ob keine Flüssigkeit vorhanden wäre und dafür die Kugel die Masse

$$(245\text{a}) \qquad \frac{4\pi}{3g} a^3 U^2 \left(\gamma_1 + \frac{\gamma}{2}\right)$$

hätte[2]). Im Falle einer geradlinigen Bewegung der Kugel beträgt deren Beschleunigung $\frac{dU}{dt}$, und da die beschleunigende Kraft neben der Kugelmasse noch der hinzugedachten Masse diese Beschleunigung erteilen muß, folgt, daß der Gegendruck der Flüssigkeit

$$\frac{2\pi\gamma}{3g}\, a^3 \frac{dU}{dt}$$

beträgt, und, soweit die Überlegung zutrifft, für eine gleichförmige Bewegung verschwindet. Das eben entwickelte Gesetz (245a) hat zuerst *du Buat* experimentell entdeckt, als er ein Pendel im Wasser schwingen ließ und er drückte es in den Worten aus, daß das Pendel einen Bug und ein Heck aus Wasser mitschleppe, die zusammen ungefähr den halben Rauminhalt des Pendels haben[3]). Übrigens hat der Genannte auch mit Körpern anderer Form, wie z. B. Würfeln oder Zylindern, zahlreiche Pendelversuche vorgenommen[4]).

1) *G. Stokes*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society 8 (1843), S. 119 = Math. and Phys. Papers 1, S. 17; *L. Dirichlet*, Berlin, Ber. üb. d. z. Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen d. k. preuß. Akad. d. Wiss. 1852, S. 13 = Werke 2, Berlin 1889—97, S. 115.

2) Zuerst von *Green* für unendlich kleine Geschwindigkeiten nachgewiesen, Transactions of the Royal Society of Edinburgh 13 (1836), S. 54 = Math. Papers, S. 315.

3) Principes d'hydraulique 2, nouv. éd. 1816, S. 233.

4) Ebenda S. 240.

113. Widerstand und Strömungsdruck bei beliebiger Form. Die Erforschung des Widerstandes und Strömungsdruckes bei Körpern beliebiger Form nahm ihren Anfang mit Versuchen von *J. Ch. Borda*, welcher einen und denselben Körper in verschiedenen Richtungen durch ruhendes Wasser schleppte und das Verhältnis bestimmte, in welchen die verschiedenen Widerstände zueinander standen. Aus diesen und späteren Versuchen stellte *J. V. Poncelet*[1]) nachstehende Tabelle über das Verhältnis der Widerstände bei verschiedener Stellung zusammen:

Forscher	Körper	Stellung derart, daß Bug		Widerstandsverhältnis
Borda	Keil mit ebenen Seiten, Winkel an der Spitze = {90°, 60°	Keil	rechteck. Basis	0,728 0,520
Borda	Keil mit Seitenflächen aus Bögen von 60°	Keil	rechteck. Basis	0,390
Borda	Halbzylinder, dessen Leitlinie Halbellipse beschrieben um gleichschenkliges Dreieck	Rundung	rechteck. Basis	0,430
Borda	Halbzylinder, dessen Leitlinie Halbkreis	Rundung	rechteck. Basis	0,570
Borda Borda Hutton	Kegel mit Winkel an der Spitze = {90°, 60°, 51°24′	Spitze	Kreisfläche	0,691 0,543 0,433
Borda Hutton Vince	Halbkugel	Halbkugel	Kreisfläche	0,405 0,413 0,405

Derselbe führt auch an, daß das Widerstandsverhältnis der Halbkugel zur ganzen Kugel nach *Borda* und *Hutton* 0,990 betrage. Für die absolute Größe des Widerstandes P, den ein Parallelepiped vom Querschnitt F und der Länge l zu überwinden hat, wenn es mit einer Geschwindigkeit v im ruhenden Wasser fortschreitet, liegen folgende Angaben von *du Buat* und *Duchemin* vor, die allerdings etwas auseinander gehen:

$l : \sqrt{F} =$		0,0	1,0	2,0	3,0
$P : \gamma F \frac{v^2}{2g}$	nach *du Buat*[2])	1,433	1,172	—	1,102
	nach *Duchemin*[3])	1,254	1,282	1,306	1,330

1) Introduction à la mécanique industrielle. *Ch. Hutton* ließ übrigens die Körper nicht in Wasser, sondern in Luft umlaufen; siehe dessen Tracts on mathematical and philosophical subjects, Bd. 3, London 1812, S. 163f. *Poncelet* benutzte die daselbst S. 189 angegebenen Zahlen.

2) Principes d'hydraulique 2, 1816, S. 215.

3) Recherches expérimentales, 1842, S. 129.

Größer ist jedenfalls der Strömungsdruck P, den fließendes Wasser von der Geschwindigkeit U auf den ruhenden Körper ausübt, denn für dieselben Parallelepipede fand *du Buat*[1]) für

$$\begin{array}{llll} l:\sqrt{F} = & 0{,}0 & 1{,}0 & 3{,}0 \\ P:\gamma F\frac{v^2}{2g} = & 1{,}856 & 1{,}457 & 1{,}339 \end{array}$$

J. V. Poncelet[2]) hat getrachtet, für den Strömungsdruck auf einen untergetauchten Körper beliebiger Form ein Gesetz abzuleiten, wobei er von der *Borda*schen Formel ausging. Fände die Umströmung des Körpers ohne Druckverlust statt, so würde vor und hinter dem Körper der gleiche Druck herrschen. An der Stelle, wo das Wasser aus dem verengten Raum wieder in den weiten tritt, gibt es bei einem verengten Querschnitt F_1 und einem ursprünglichen F_2 entsprechend (123) einen Druckverlust

$$\frac{U^2}{2g}\left(\frac{F_2}{F_1}-1\right)^2,$$

worin U die Strömungsgeschwindigkeit im unverengten bedeutet. Da dieser Druckverlust auf den größten Körperquerschnitt F wirkt, habe der Wasserstoß die Größe

$$P = \gamma F\frac{U^2}{2g}\left(\frac{F_2}{F_1}-1\right)^2 \tag{246}$$

oder, weil der engste Strömungsquerschnitt mF_1 noch etwas kleiner als der engste Wasserquerschnitt $F_2 - F$ sein kann, die Größe

$$P = \gamma F\frac{U^2}{2g}\left[\frac{F_2}{m(F_2-F)}-1\right]^2, \tag{246a}$$

worin m eine Beiziffer bezeichnet, die von der Körperform abhängt und etwas < 1 ist.

In den angeführten Untersuchungen erscheint der Widerstand nicht näher zergliedert, sondern dem Geschwindigkeitsquadrate v^2 proportional gedacht. Das erscheint zulässig, wenn man wie bei querbewegten Platten es nur mit kleinen Reibflächen zu tun hat, oder wenn man bei langgestreckten Körpern zwar mit *L. Euler* den Verdrängungswiderstand vom Reibungswiderstand unterscheidet, aber wie *Euler* beide als proportional mit v^2 ansieht. In beiden Fällen muß man das Ähnlichkeitsgesetz[3]) als gültig betrachten, nach welchem, wenn ein Körper bei der Geschwindigkeit v den Widerstand P hervorruft, ein ähnlicher Körper

1) Principes d'hydraulique 2, 1816, S. 211.
2) Introduction à la mécanique industrielle, appendice 1839.
3) Vgl. S. 33 u. 399.

von $n$mal so großen Längenabmessungen einen Widerstand $n^3 P$ erfährt, falls er mit der Geschwindigkeit $v\sqrt{n}$ geschleppt wird. Ausgedehnte, 1795 begonnene Versuche von Oberst *M. Beaufoy*[1]) zeigten nun, daß der Gesamtwiderstand nicht so stark steigt, und neue Versuche von *W. Froude*[2]) lehrten, daß bei Schiffsform der *Oberflächenwiderstand* nahezu durch

$$k\gamma S v^{1,8} \tag{247}$$

oder genauer durch

$$k\gamma S v^{x} \tag{247a}$$

ausgedrückt werden könne, worin S die benetzte Oberfläche und k sowie x Koeffizienten bedeuten, die, wie folgende Tabelle[3]) zeigt, von der Länge und der Oberflächenbeschaffenheit abhängen:

Länge der Fläche	Firnißanstrich		Paraffin	
in m	k	x	k	x
0,61	0,210	2,00	0,209	1,95
2,44	0,184	1,85	0,161	1,94
6,10	0,161	1,85	0,145	1,93
15,24	0,152	1,83	—	—

R. E. Froude, der Sohn des Vorigen, kehrte später zu einem einheitlichen Wert $x = 1,825$ zurück. — *W. Froude* zerlegte also den Schiffswiderstand in den Oberflächenwiderstand (skin-resistance), den Kielwasserwiderstand (eddy-making-resistance) und den Wellenwiderstand (wave-making-resistance), welch letzterer bei genügend tief untergetauchten Körpern entfällt.

Die Reibung befindet sich u. a. in *B. de Saint-Venants*[4]) Ausbau der *Poncelet*schen Theorie berücksichtigt. Er entwickelte nämlich mit Benutzung einschlägiger Versuche von *du Buat* und *Beaufoy*[5]) die Formel

$$P = \gamma \frac{U^2}{2g}\left\{1,7F\left[\frac{F_2}{\mu(F_2 - F)} - 1\right]^2 + 0,0031\,S\right\}, \tag{248}$$

in welcher für Prismen μ zwischen 0,75 und 0,8 liegt und S die Oberfläche des untergetauchten Körpers bedeutet, an der eine Reibung stattfindet. Für ein Parallelepiped von der Länge l setzt er[6])

1) Vollständig veröffentlicht erst von seinem Sohn *H. Beaufoy*: Nautical and hydraulic experiments, London 1834.

2) Report of the 42. meeting of the British Association held ad Brighton 1872, London 1873, S. 118f.

3) Neuere Werte siehe z. B. *F. Meyer* in der Hütte, 21. Aufl., 2. Bd., Berlin 1911, S. 745; *F. Gebers*, Schiffbau 9 (1907/8), Nr. 12, 13. Bei der Schiffahrt in Kanälen tritt auch eine Reibung an den Bettflächen auf.

4) Paris, Mémoires de l'académie des sciences (2) 44 (1887), N. 5, S. 174, 175.

5) *De Saint-Venant* zitiert: Nautical and hydraulic experiments 1, 1834, S. 239.

6) Paris, Mémoires N. 5, S. 177.

(248a) $$S = 4F\left(\frac{l}{\sqrt{F}} - 2\right),$$

für einen Zylinder von der Länge l und dem Durchmesser d

(248b) $$S = 4F\left(\frac{l}{d} - 2\right).$$

Für eine Halbkugel[1]) wäre $S = 2F$, für eine dünne senkrecht zur Strömung bewegte Platte $S = 0$. Endlich gelte für eine dünne Platte, die einen Winkel φ zwischen 45° und 90° mit der Bewegungsrichtung einschließt, ohne daß μ eine Änderung erleide,

(248c) $$P = \gamma \frac{U^2}{2g} 1{,}7 F\left[\frac{F_2}{\mu(F_2 - F\sin\varphi)} - 1\right]^2.$$

Für $\varphi < 45°$ nehme die Einschnürung ab und höre schließlich auf; dabei wachse μ und werde zuletzt $= 1$.

Zuverlässige Versuche mit Prismen, die sie in einem geräumigen Becken schleppten, haben *H. Engels* und *F. Gebers* vorgenommen und gefunden[2]), daß der Gesamtwiderstand eines untergetauchten Prismas von quadratischem Querschnitt den einer mit diesem Querschnitte übereinstimmenden Platte erst erreicht, wenn das Prisma annähernd 30mal so lang wie die Plattenkanten ist. Kürzere Prismen leisten geringeren Widerstand, und zwar den geringsten bei einer Länge, die der doppelten Quadratseitenlänge gleich ist. Zum Beispiel zeigte sich für einen Querschnitt von 0,1 auf 0,1 m bei 0,1 m Tauchung in der Formel

$$P = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g}$$

für

	Länge:	0,1 m	0,2 m	0,5 m	1 m	2 m	3 m
$v = 1\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$	$\zeta =$	0,89	1,00	1,07	0,92	1,20	1,29
$v = 2\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$	$\zeta =$	1,01	0,82	0,97	0,97	1,08	1,20
$v = 5\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$	$\zeta =$	0,98	0,75	0,81	0,85	0,95	1,15

Für untergetauchte, symmetrisch gebaute Keilkörper fand *F. Fink*[3]) bei Fahrt in Richtung der Symmetrieebene nachstehenden Verdrängungswiderstand, zu dem also noch ein Reibungswiderstand hinzukäme:

a) wenn nur zwei lotrechte rechteckige Tafeln vorhanden sind, die den Winkel 2α miteinander einschließen,

für $\alpha = 0°$ bis $90°$, $\quad P_\alpha = 1{,}8 \sin\alpha\, P_{90°}$, $\quad$ >⟶

1) *Flamant,* Hydraulique, 3. éd., S. 587.
2) Schiffbau 9 (1907/8), S. 201, 243 f.; *Gebers,* ebenda S. 435 f.
3) Civilingenieur (2) 38 (1892), S. 655 f.

für $\alpha = 90^0$ bis 150^0, $\langle \rightarrow$ P_α derart wachsend, daß bei Auftragung die Kurve bei $\alpha = 120^0$ bis 130^0 einen Höchstwert von ungefähr $1{,}2\,P_{90^0}$ zeigt,

für $\alpha = 150^0$ bis 180^0, $< \rightarrow$ $P_\alpha =$ ungefähr P_{90^0}, weil der Wasserkörper im Keil wie eine Platte wirkt,

b) wenn außer den Seitenflächen ein wagrechter Boden und eine wagrechte Decke vorhanden sind,

für $\alpha^0 = 0^0$ bis 90^0, $P_\alpha = \sin\alpha\, P_{90^0}$.

Hierbei ist unter P_{90^0} der Widerstand verstanden, den eine Platte von der Größe des Keilrückens (also von der Größe der Projektion des Keils auf eine zur Fahrrichtung senkrechte Fläche) bietet, wenn sie senkrecht zu sich selbst verschoben wird.

Auf die zahlreichen Versuche verschiedener Forscher mit austauchenden Körpern werde, weil sie ins Gebiet des Schiffbaues gehören, hier nicht eingegangen[1]). Dagegen werde der Zusammenhang zwischen Widerstand und Rohrreibung beleuchtet und an *Allens* Formel (242c) erinnert. Den Widerstand P kann man in ihr auch als Produkt aus einer Druckhöhe (Flüssigkeitssäule) h und einer mit a^2 proportionalen Fläche ausdrücken und hat dann bei Änderung der Konstanten

$$(249) \qquad \gamma h a^2 = c_r \frac{\gamma^{n-1}}{g^{n-1}} \eta^{2-n} a^n v^n \quad \text{oder} \quad h = \frac{c_r}{g^{n-1}} \left(\frac{\eta}{\gamma a}\right)^{2-n} v^n.$$

Wird nun noch h als Druckhöhenverlust auf einem Rohrtrum von Durchmesserlänge D aufgefaßt und als Bezugsmaß a der Durchmesser D gewählt, so geht (249) in die Gefällsgleichung[2])

$$(249\text{a}) \qquad J = \frac{h}{D} = \frac{c_r}{g^{n-1}} \left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^{2-n} \frac{U^n}{D^{3-n}}$$

über. Für $n = 1$ stimmt (249a) mit *Poiseuilles* Ausdruck (siehe S. 26), für $n = {}^7\!/_4$ mit *Blasius'* Ausdruck (siehe S. 55) überein.

Analog der kritischen Geschwindigkeit (vgl. (34b)) in Röhren muß für das Widerstandsgesetz bei Kugeln das Verhältnis $\gamma a U : \eta g$ entschei-

1) Verwiesen werde auf *A. Kriloff* u. *C. A. Müller* in Encyklopädie d. mathem. Wissensch., 4. Bd., 3. Teilband, Theorie des Schiffes; *H. Lang* in Hütte, 21. Aufl., 1. Bd., 1911, S. 323f.; *E. Sonne* im Handb. d. Ingenieurwissensch. 3, Wasserbau, 5. Bd., 4. Aufl., 1906, S. 61f. Fallversuche mit Zylindern in Luft: *G. Eiffel*, Recherches expérimentales sur la résistance de l'air, Paris 1907; *L. Prandtl*, Zeitsch. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1 (1910), S. 74. Strömungsbilder: *F. Ahlborn*, Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellsch. 5 (1904), S. 417; 6 (1905), S. 67; 10 (1909), S. 370.

2) Unmittelbar abgeleitet von *W. Nußelt*, Mitteilungen üb. Forschungsarbeiten, Heft 89 (1910), S. 5. — Bei Gerinnen erscheint die Tiefe statt *D*.

dend sein. *J. Zeleny* und *L. W. McKeehan*[1]) fanden nun bei annähernd kugelförmigen Sporen bei ihrem Fall in Luft nachstehende Werte:

Halbmesser a	cm	0,00021	0,00048	0,0016
$\gamma a U : \eta g$		0,00007	0,0007	0,02
U berechnet nach (Gl. 242a)	cm sec^{-1}	0,072	0,40	3,40
U gemessen	cm sec^{-1}	0,047	0,23	1,76

während genaue Kügelchen von etwa $\gamma a U : \eta g = 0{,}1$ an der Formel (242a) gehorchten.

114. Wirbelbewegung hinter einem Hindernis. Bei den Betrachtungen *Poncelets* und *de Saint-Venants* wurde angenommen, daß der Raum zwischen dem eingeschnürten Wasserquerschnitt und dem festen Körper durch wirbelndes Wasser ausgefüllt sei, ohne daß die Genannten aber diese Wirbel näher betrachtet hätten. Erst neuerdings haben *Th. v. Kármán* und *H. Rubach*[2]) durch näheres Eingehen auf die entstehenden Wirbel eine Methode zur Berechnung des Widerstandes angewendet, die sehr fruchtbar zu werden verspricht. Der Grundgedanke, von dem die Verfasser ausgehen, stammt von *L. Prandtl*[3]), welcher aussprach, daß die Teilchen der Grenzschicht an der Körperoberfläche, die durch die Wirkung der Reibung einen Teil ihrer lebendigen Kraft eingebüßt haben, eher zur Umkehr gezwungen werden als die Teilchen in der freien Flüssigkeit. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß bei Vorhandensein einer Strömung zwar in nächster Nähe eines festen Körpers, die Reibung eine Drehung der Flüssigkeitsteilchen hervorruft, aber in einiger Entfernung vom Festkörper, weil die Strömung stets neue Teilchen herbeischafft, die geringe Flüssigkeitsreibung keine Drehung zu verursachen vermag, so daß hier nur Bewegungen wie in einer vollkommenen Flüssigkeit, also z. B. Kreisbewegungen, ohne Drehung auftreten.

Wenn man zunächst nur *einen* Wirbel[4]) mit den Mittelpunktskoordinaten x_1, y_1 als vorhanden voraussetzt, so muß, wenn keine Strömung der Gesamtmasse erfolgt, jedes Teilchen die Wirbelachse umkreisen, so daß, wenn die Potentialfunktion der Bewegung mit Φ bezeichnet wird, für die Geschwindigkeiten u und v in der x- und y-Richtung (vgl. oben (10b))

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

---

1) Physikalische Zeitschrift 11 (1910), S. 78. Die theoretische Begründung gab *F. Nöther*, Zeitsch. Math. Phys. 62 (1913), S. 1f. Vgl. oben S. 400.

2) Physikalische Zeitschrift 13 (1912), S. 49.

3) Verhandlungen des internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904, S. 484. Zeitsch. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 1 (1910), S. 74.

4) Diese Bewegung wurde zuerst von *H. v. Helmholtz* untersucht, Crelles Journal 55 (1858), S. 25 = Ges. Abh. Bd. 1, S. 101. Bis auf seinen innersten Faden ist jeder Wirbel quirlfrei, vgl. oben S. 13.

gelten muß. Zugleich muß aber die Differentialgleichung (10a)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

erfüllt sein. Beiden Forderungen wird mit der Konstanten ζ als „Wirbelstärke" — von der Dimension

$$\frac{(\text{Länge})^2}{\text{Zeit}}$$

der Ansatz

$$\Phi = -\frac{\zeta}{2\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{250}$$

gerecht, der also (mit einem von der Definition der Wirbelstärke abhängigen konstanten Faktor) die Lösung bildet. In der Tat zeigt sich

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\zeta}{2\pi} \frac{y - y_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \tag{250a}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\zeta}{2\pi} \frac{x - x_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \tag{250b}$$

und hiernach

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\zeta}{2\pi} \frac{2(x - x_1)(y - y_1)}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Aus (250a und b) geht eine Umlaufgeschwindigkeit

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{\zeta}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^2}} = \frac{\zeta}{2\pi r} \tag{250c}$$

hervor, wobei r die Fahrstrahllänge vom Wirbelmittelpunkt bis zum betreffenden Teilchen x, y bezeichnet. Sind mehrere Wirbel vorhanden, so erteilt jeder derselben den Wasserteilchen Geschwindigkeiten u_1, v_1 bzw. u_2, v_2 usw., die sich zu Geschwindigkeiten

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \quad v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

addieren, zu welchen überdies die Geschwindigkeiten einer Strömung hinzutreten können. Hieraus folgt, daß Wirbel voneinander nicht unabhängig sind, sondern daß jeder Wirbel den anderen scheinbar eine Bewegung erteilt. Dieselben Kräfte, welche die Wirbel hervorrufen, üben ihren Einfluß eben auf die ganze Wassermasse aus. Dabei stimmt die Bewegung der Wirbel mit der der Teilchen überein, indem der innere um seine Achse rotierende „Wirbelfaden" stets aus denselben Teilchen besteht.

Auch der Bestand einer unendlichen Wirbelmenge kann mathematisch ausgedrückt werden. So stellt der Ansatz

$$\Phi = -\frac{\zeta}{4\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\operatorname{Sin} \frac{2\pi y}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}}{1 - \operatorname{Cof} \frac{2\pi y}{l} \cos \frac{2\pi x}{l}} \tag{251}$$

eine unendliche geradlinige Reihe von Wirbeln von der Stärke ζ dar, die je im Abstande, der „Teilung", l aufeinander folgen. Zunächst erfüllt nämlich Φ die Differentialgleichung (10a), denn es zeigt sich[1]), wenn man die hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen in abgekürzter Weise nur $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}$, s und c schreibt,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\zeta}{2l}\,\frac{\mathfrak{S}c(1-\mathfrak{C}c)-\mathfrak{S}s\cdot\mathfrak{C}s}{\mathfrak{S}^2s^2+1-2\mathfrak{C}c+\mathfrak{C}^2c^2} = -\frac{\zeta}{2l}\,\frac{\mathfrak{S}c-\mathfrak{S}(c^2+s^2)\mathfrak{C}}{(\mathfrak{C}^2-1)(1-c^2)+1-2\mathfrak{C}c+\mathfrak{C}^2c^2}$$

$$= -\frac{\zeta}{2l}\,\frac{\mathfrak{S}(c-\mathfrak{C})}{(c-\mathfrak{C})^2} = \frac{\zeta}{2l}\,\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}-c}$$

oder

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\zeta}{2l}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y}{l} - \cos\frac{2\pi x}{l}} \tag{251a}$$

und bei einer ähnlichen Entwickelung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\zeta}{2l}\,\frac{\sin\frac{2\pi x}{l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y}{l} - \cos\frac{2\pi x}{l}}, \tag{251b}$$

daher wie erforderlich

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\zeta\pi}{l^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{l}\,\sin\frac{2\pi x}{l}}{\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y}{l} - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)^2}.$$

Ferner kehrt für jede Ordinate y dieselbe Erscheinung gemäß Gl. (251) wieder, so oft die Abszisse x um 2π wächst oder abnimmt, endlich gehen für x nahezu $= 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ und y nahezu $= 0$ nach (251a) und (251b) die Geschwindigkeiten über in

$$\text{(251c)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\zeta}{2l}\,\dfrac{\frac{2\pi y}{l}}{\left(1+\frac{4\pi^2y^2}{2l^2}\right)-\left(1-\frac{4\pi^2x^2}{2l^2}\right)} = \dfrac{\zeta}{2\pi}\,\dfrac{y}{x^2+y^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -\dfrac{\zeta}{2l}\,\dfrac{\frac{2\pi x}{l}}{\left(1+\frac{4\pi^2y^2}{2l^2}\right)-\left(1-\frac{4\pi^2x^2}{2l^2}\right)} = -\dfrac{\zeta}{2\pi}\,\dfrac{x}{x^2+y^2}, \end{cases}$$

wonach an den angegebenen Stellen die gleiche Bewegung herrscht wie nach (250a) und (250b) in der Nähe eines Einzelwirbels. Gl. (251) erfüllt also alle zu stellenden Forderungen und die Gl. (251a) und (251b)

1) Siehe z. B. *W. Ligowski*, Tafeln der Hyberbelfunktionen, Berlin 1890, S. 100f.

geben die Geschwindigkeiten an, wenn man unter x und y die auf einen Wirbel als Ursprung bezogenen Koordinaten versteht.

Falls ein symmetrisch gebautes Hindernis die Ursache der Wirbel ist, indem es mit seinen Vorsprüngen vorüberströmendes Wasser in Drehung versetzt, entstehen offenbar zwei Reihen Wirbel entgegengesetzten Sinnes, welche Reihen einander entweder gegenüberliegen oder so verschränkt sind, daß sich Wirbel und Teilungsmitten gegenüberstehen. Es werde nun untersucht, ob nur einer der Verbände oder beide möglich sind, sowie ob die Möglichkeit noch an bestimmte Bedingungen geknüpft ist[1]). Dabei werde vorausgesetzt, daß die Wirbel, weil sie von der Strömung fortgeführt werden, Parallelreihen bilden müssen. Diese Voraussetzung bedeutet zugleich, daß das Verhalten der Wirbel ein solches ist, als ob die Reihen nicht nur nach *einer* x-Richtung, sondern nach der positiven und negativen x-Richtung endlos wären, also mit anderen Worten, daß das Hindernis in seiner Wirkung die stromauf fehlenden Wirbel ersetzt. Das Hindernis läßt alle Wirbel auch bei Schwankungen in der Strömungsgeschwindigkeit mit der richtigen Ordinate entstehen, während die Ablösung des Wirbels vom Hindernis nicht in ganz regelmäßiger Folge stattfinden wird. Soll dies die Erscheinung nicht stören, so müssen die Wirbel trotzdem in der Strömungsrichtung wandern. Es kommt also darauf an, nachzusehen, unter welcher Bedingung für einen Wirbel $v = 0$ bleibt, falls dieser vom vorhergehenden statt um l um $l - \lambda$ absteht, wobei λ eine sehr kleine Strecke bedeutet. Für einen Punkt in der Reihe im Abstande λ vom Ursprunge, also für $x = \lambda$, $y = 0$ ist nach (251b), wenn λ zwar klein ist, aber die Abkürzung doch nicht so weit vorgenommen werden darf wie in (251c), wenn der Wirbelsinn ***negativ*** ist, zunächst

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\zeta}{2l} \cdot \frac{\frac{2\pi\lambda}{l} - \frac{4\pi^3\lambda^3}{3l^3}}{\frac{2\pi^2\lambda^2}{l^2}} = \frac{\zeta}{2\pi\lambda}\left(1 - \frac{2\pi^2\lambda^2}{3l^2}\right).$$

Ist der betrachtete Punkt der Mittelpunkt des abnormalen Wirbels, so ersetzt ferner der neue Wirbel den des Ursprungs und entfällt letzterer[2]). Dadurch ändert sich die Geschwindigkeit senkrecht zur Reihe im betrachteten Punkt nach (250c) noch um

$$-\frac{\zeta}{2\pi\lambda},$$

1) Die Entwickelung weicht von hier an von der *Th. v. Kármáns* ab.

2) Sich selbst erteilt der neue Wirbel keine Geschwindigkeit.

womit sie zu

$$(252) \qquad \frac{\zeta}{2\pi\lambda}\left(1 - \frac{2\pi^2\lambda^2}{3l^2}\right) - \frac{\zeta}{2\pi\lambda} = -\frac{\zeta\pi\lambda}{3l^2}$$

wird. Für die regelmäßige Reihe ist $v = 0$; für die Folge

$$\ldots l, l, l + \lambda, l - \lambda, l, l, \ldots$$

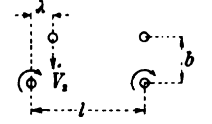
hat der abnormale Wirbel nach (252) die Geschwindigkeit $-\frac{\zeta\pi\lambda}{3l^2}$; für die Folge

$$\ldots l, l, l - \lambda, l, l, \ldots,$$

welche einer ungeänderten Wirkung des Festkörpers entspricht, ist daher die Geschwindigkeit senkrecht zur Reihe

$$(252\text{a}) \qquad v_1 = -\frac{\zeta\pi\lambda}{6l^2},$$

denn die Vergrößerung der einen Entfernung l um λ und die Verkleinerung der anderen um λ muß offenbar die doppelte Wirkung einer einzigen Änderung λ haben. Liegt nun der ersten Reihe eine zweite von *positivem* Wirbelsinn im Abstand $-b$ gegenüber, so erteilt letztere dem abnormalen Wirbel, für den nunmehr in (251b) $x = \lambda$, $y = b$ zu setzen ist, ebenfalls eine negative Geschwindigkeit senkrecht zur Reihe. Bei gegenüberliegenden Reihen ist also nach dem früher Gesagten ein regelmäßiger Verlauf der Erscheinung nicht möglich.



Anders bei verschränkten Reihen. Hier gilt wieder (252a) für die Wirkung der eigenen Reihe; die mit ihr verschränkte liefert aber nach (251b)

$$v_2 = -\frac{\zeta}{2l}\,\frac{\sin\frac{\pi l + 2\pi\lambda}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l} - \cos\frac{\pi l + 2\pi\lambda}{l}} = \frac{\zeta}{2l}\,\frac{\sin\frac{2\pi\lambda}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l} + \cos\frac{2\pi\lambda}{l}},$$

wonach angenähert

$$v_1 + v_2 = \frac{\zeta}{2l^2}\,\frac{2\pi\lambda}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l} + 1} - \frac{\zeta\pi\lambda}{6l^2}$$

wird. Hier ist die Forderung $v = v_1 + v_2 = 0$ erfüllbar und gibt

$$\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l} = 5, \quad \mathfrak{Cof}\frac{\pi b}{l} = \sqrt{3}, \quad \frac{\pi b}{l} = 1{,}147$$

und

$$(253) \qquad b = 0{,}365\, l.$$

Nur für verschränkte Reihen mit dem Verhältnis 0,365 ihres Abstandes zur Teilung sind also die Wirbel stabil[1]). Tatsächlich fanden

1) Dasselbe Verhältnis berechnete *Th. v. Kármán,* als er sämtliche Wirbel bis auf ein Wirbelpaar festhielt und letzteres schwingen ließ; Göttingen, Nachrichten d. Gesell. d. Wissenschaften 1911, S. 513.

v. Kármán und *Rubach*, als sie die Erscheinung experimentell untersuchten für die ersten Wirbel hinter dem Körper b = etwa $0{,}35\,l$, während in größerem Abstand hinter einem Kreiszylinder $b = 0{,}28\,l$ und hinter einer Platte $= 0{,}305\,l$ war. Dieser kleinere Wert erklärt sich dadurch, daß für eine Störung, die sich wellenartig über die Reihe ausdehnt, wie die Genannten nachweisen, Stabilität für

$$\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi b}{l} = \sqrt{2}, \quad \mathfrak{Tang}\,\frac{\pi b}{l} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

oder

$$b = 0{,}283\,l \tag{254}$$

ergibt.

In der x-Richtung erhalten die Wirbel von denen der eigenen Reihe keine Geschwindigkeit, während sie von der verschränkten Reihe nach Gl. (251a), in welcher $x = \frac{1}{2}l$, $y = b$ zu setzen ist, die Geschwindigkeit

$$u_0 = \frac{\zeta}{2l}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi b}{l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi b}{l} + 1} = \frac{\zeta}{2l}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{\pi b}{l} \tag{255}$$

bekommen. Im Unendlichen hebt sich die Wirkung der beiden Reihen, weil sie aus Wirbeln gleicher Stärke, aber entgegengesetzten Sinnes bestehen, auf. Mit dieser Schnelligkeit würden die Wirbel in sonst ruhigem Wasser fortschreiten. Strömt aber das Wasser mit der Geschwindigkeit $-U$, muß also im Unendlichen dieses $-U$ herrschen, so stellt u_0 nur eine Relativbewegung dar, während $u_0 - U$ die wahre Geschwindigkeit ist.

Für die Geschwindigkeiten u und v an beliebiger Stelle in nichtströmendem Wasser hat man endlich, wenn man die x-Achse in die Mitte der beiden verschränkten Reihen legt und die y-Achse derart, daß ihr Abstand vom nächsten Wirbel jeder Reihe $\pm\frac{1}{4}l$ beträgt, zufolge (251a) und (251b)

$$u = \frac{\zeta}{2l}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y + \pi b}{l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y + \pi b}{l} - \cos\frac{4\pi x + \pi l}{2l}} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y - \pi b}{l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y - \pi b}{l} - \cos\frac{4\pi x - \pi l}{2l}}\right], \tag{255a}$$

$$v = -\frac{\zeta}{2l}\left[\frac{\sin\frac{4\pi x + \pi l}{2l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y + \pi b}{l} - \cos\frac{4\pi x + \pi l}{2l}} - \frac{\sin\frac{4\pi x - \pi l}{2l}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y - \pi b}{l} - \cos\frac{4\pi x - \pi l}{2l}}\right]. \tag{255b}$$

worin die Nenner sich auch $\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y \pm \pi b}{l} \pm \sin\frac{2\pi x}{l}$ schreiben ließen.

115. Strömungsdruck infolge der Wirbelbildung. Der Umstand, daß die Ausdrücke (255a und b) für Wasser gelten, das im Unendlichen ruht, gestattet aus ihnen ohne weiteres die Druckveränderung nach dem *Bernoulli*schen Gesetz zu berechnen, bei welchem es nur auf die Relativbewegung zwischen den Flüssigkeitsteilchen und der Begrenzung ankommt. Hat im Unendlichen der Spiegel die Höhe h über der Sohle, welche wagrecht sein möge, so beträgt an beliebiger Stelle die Spiegelhöhe

$$h - \frac{u^2 + v^2}{2g} \tag{256}$$

und zwar auch dann, wenn man bei der ganzen Masse einschließlich ihrer Grenzen eine Strömungsgeschwindigkeit $-U$ hinzufügt. Sieht man von letzterer ab, so zerfällt die Masse in die mit Wirbeln versehene und bewegte auf der einen Seite des Hindernisses und die ruhende auf der anderen. Während die Wirbel gemäß Gl. (255) mit u_0 fortschreiten, eilt das Hindernis selbst mit der Geschwindigkeit $+U$ den Wirbeln voran. Der Widerstand, den bei der Strömung $-U$ das Hindernis dem strömenden Wasser bietet (also etwa die wagrechte Kraft, die es auf die Sohle überträgt), wird bei einerseits ruhigem Wasser zu einer Außenkraft, mit der das Hindernis geschleppt wird. Betrachtet man in diesem Falle einen parallel zur y-Achse von $y = -\infty$ bis $y = \infty$ reichenden Wasserstreifen, der sich zu beiden Seiten des Hindernisses ausdehnt, so sind an Außenkräften die Drücke

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{2}\left(h - \frac{u^2+v^2}{2g}\right)^2 dy = \text{angenähert} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\gamma h^2}{2} - \gamma h \frac{u^2+v^2}{2g}\right) dy \tag{256a}$$

auf der Wirbelseite, ferner die Drücke

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma h^2}{2} dy \tag{256b}$$

auf der Ruheseite, sowie der Widerstand

$$P \tag{256c}$$

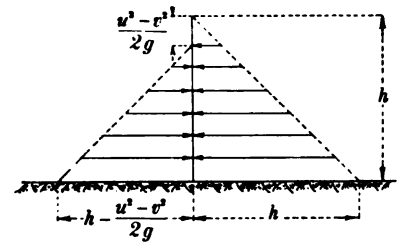
vorhanden. Diese Kräfte erteilen dem ruhenden Wasser Bewegungsgrößen und die positiven werden dadurch unterstützt, daß in der Zeit dt die aus dem Bezirke $x = -\infty$ stammende, überall gleich tief angenommene Masse

$$\left(\frac{g}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} h\, u\, dy\right) dt$$

den Impuls

$$\frac{\gamma h}{g}\,dt\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2\,dy$$

zuführt. Dieser Impuls auf die Teilchen einer übrigens frei wählbaren Ordinate und die Wirkung der unter (256a) genannten Drücke auf dieselben Teilchen addieren sich zu



$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma h^2}{2}\,dy+\frac{\gamma h}{g}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2-v^2}{2}\,dy\right)dt,$$

worin u und v durch (255a und b) gegeben sind. Wählt man als Ordinate die Gerade $x=0$, so hat man demnach

(256d)
$$u=\frac{\zeta}{2l}\left[\mathfrak{Tang}\frac{2\pi y+\pi b}{l}-\mathfrak{Tang}\frac{2\pi y-\pi b}{l}\right],$$

$$v=-\frac{\zeta}{2l}\left[\frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y+\pi b}{l}}+\frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y-\pi b}{l}}\right]$$

und

(256e)
$$u^2=\frac{\zeta}{4l^2}\left[2-\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{2\pi y+\pi b}{l}}-\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{2\pi y-\pi b}{l}}-2\,\frac{\mathfrak{Cof}\frac{4\pi y}{l}-\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{4\pi y}{l}+\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l}}\right],$$

(256f)
$$v^2=\frac{\zeta}{4l^2}\left[\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{2\pi y+\pi b}{l}}+\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{2\pi y-\pi b}{l}}+\frac{4}{\mathfrak{Cof}\frac{4\pi y}{l}+\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l}}\right],$$

also

(257)
$$u^2-v^2=\frac{-\zeta^2}{2l^2}\left[\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{2\pi y+\pi b}{l}}+\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{2\pi y-\pi b}{l}}+\frac{2\left(1-\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l}\right)}{\mathfrak{Cof}\frac{4\pi y}{l}+\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l}}\right],$$

dann weiter

(257a)
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(u^2-v^2)\,dy=\frac{-\zeta^2}{4\pi l}\left[\mathfrak{Tang}\frac{2\pi y+\pi b}{l}+\mathfrak{Tang}\frac{2\pi y-\pi b}{l}\right.$$
$$\left.+\frac{1-\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l}}{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi b}{l}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi b}{l}\,\mathfrak{Sin}\frac{4\pi y}{l}}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi b}{l}\,\mathfrak{Cof}\frac{4\pi y}{l}+1}\right]_{-\infty}^{\infty}.$$

Davon, daß (257a) tatsächlich das Integral von (257) darstellt, kann man sich leicht durch die Differentiation überzeugen, bei welcher z. B. das letzte Glied in der Klammer bei abgekürzter Schreibweise seiner hyperbolischen Funktionen

$$\frac{4\pi}{l}(1-\mathfrak{C}b)\frac{\mathfrak{C}y(\mathfrak{C}b\,\mathfrak{C}y+1)-\mathfrak{S}y\cdot\mathfrak{C}b\,\mathfrak{S}y}{\mathfrak{C}b^2\,\mathfrak{C}y^2+2\,\mathfrak{C}b\,\mathfrak{C}y+1-\mathfrak{S}b^2\,\mathfrak{S}y^2}=\frac{4\pi}{l}\,\frac{(1-\mathfrak{C}b)(\mathfrak{C}b+\mathfrak{C}y)}{\mathfrak{C}b^2+\mathfrak{C}y^2+2\,\mathfrak{C}b\,\mathfrak{C}y}$$

$$=\frac{4\pi}{l}\,\frac{1-\mathfrak{C}b}{\mathfrak{C}y+\mathfrak{C}b}$$

liefert. Die Einführung der Grenzen in (257a) gibt den von x unabhängigen Ausdruck

$$\frac{\zeta^2}{2\pi l}\left[-1-1+\mathfrak{Tang}\frac{\pi b}{l}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\left(\mathfrak{Tang}\frac{2\pi b}{l}\right)\right]$$

und daher

$$\text{(257b)}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma h^2}{2}\,dy+\frac{\gamma h}{g}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2-v^2}{2}\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma h^2}{2}\,dy+\frac{\gamma\zeta^2 h}{2\pi g l}\left[-1+\frac{\pi b}{l}\,\mathfrak{Tang}\frac{\pi b}{l}\right].$$

Zieht man hier die unter (256b) erwähnten Gegendrücke auf der Ruheseite ab, so behält man

$$\text{(257c)}\qquad \frac{\gamma\zeta^2 h}{2\pi g l}\left[-1+\frac{\pi b}{l}\,\mathfrak{Tang}\frac{\pi b}{l}\right]=\frac{\gamma h}{g}\left[\frac{-\zeta^2}{2\pi l}+\frac{\zeta b}{l}u_0\right]$$

übrig. — Da der Körper mit der Geschwindigkeit $U-u_0$ den Wirbeln vorauseilt, entstehen in der Zeit

$$\text{(258)}\qquad T=\frac{l}{U-u_0}$$

zwei neue Wirbel und wächst die Bewegungsgröße auf der Wirbelseite in dieser Zeit genau um die eines Streifens, der sich von $y=-\infty$ bis $y=\infty$ erstreckt und die Breite l hat, also z. B. von $x=-\frac{1}{4}l$ bis $x=\frac{3}{4}l$ reicht. Die Bewegungsgröße eines unendlich langen Streifens von der Breite dx ist

$$\frac{\gamma h}{g}dx\int_{-\infty}^{\infty}u\,dy$$

oder, wie die Integration von (255a) zeigt,

$$\frac{\gamma h}{g}\,\frac{\zeta}{4\pi}\,dx\left[\log\text{nat}\frac{\mathfrak{Cof}\dfrac{2\pi y+\pi b}{l}-\cos\dfrac{4\pi x+\pi l}{2l}}{\mathfrak{Cof}\dfrac{2\pi y-\pi b}{l}-\cos\dfrac{4\pi x+\pi l}{2l}}\right]_{y=-\infty}^{y=\infty},$$

das ist identisch mit

$$\frac{\gamma h}{g}\,\frac{\zeta}{4\pi}\,dx\left[\log\text{nat}\,e^{2\pi b:l}-\log\text{nat}\,e^{-2\pi b:l}\right]=\frac{\gamma h}{g}\,\frac{\zeta b}{l}\,dx,$$

wonach der Zuwachs an Bewegungsgröße in der Zeit T

$$\frac{\gamma h}{g}\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{3}{2}l}\frac{\zeta b}{l}\,dx = \frac{\gamma h}{g}\zeta b \tag{258a}$$

beträgt. Die Zusammenfassung von (256c), (257c) und (258a) gibt die Impulsgleichung

$$PT + \frac{\gamma h}{g}\left[\frac{-\zeta^2}{2\pi l} + \frac{\zeta b}{l}u_0\right]T = \frac{\gamma h \zeta b}{g}$$

oder, wenn man T nach (258) ausdrückt, als Druckkraft zwischen Wasser und Hindernis

$$P = \frac{\gamma h}{g}\left\{\frac{\zeta b}{l}(U-2u_0) + \frac{\zeta^2}{2\pi l}\right\} = \frac{\gamma h}{g}\left\{\frac{\zeta b}{l}\left(U - \frac{\zeta}{l}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{\pi b}{l}\right) + \frac{\zeta^2}{2\pi l}\right\} \tag{259}$$

und auch

$$P = \frac{\gamma h}{g}\cdot\frac{2U^2 l}{\mathfrak{Tang}\,\frac{\pi b}{l}}\left\{\frac{b}{l}\frac{u_0}{U} - \left(\frac{2b}{l} - \frac{1}{\pi\,\mathfrak{Tang}\,\frac{\pi b}{l}}\right)\frac{u_0^2}{U^2}\right\}. \tag{259a}$$

Diese Gleichung, welche unter der Annahme entwickelt wurde, daß man den Körper, der bis zur Sohle reicht, durch das Wasser zieht, daß also P einen Widerstand darstellt, bleibt ungeändert, wenn man eine Strömung $-U$ hinzufügt, also wenn der Körper stillsteht und eine Strömung von der Geschwindigkeit U ihn trifft, in welchem Falle P zum Wasserstoß wird. Nach (259a) vermag man diesen also auf Grund von Längen- und Geschwindigkeitsmessungen anzugeben. Für $b = 0{,}365\,l$ (siehe Gl. (253)) hat man beispielsweise

$$P = \frac{\gamma h}{g}\left\{0{,}894\frac{u_0}{U} - 0{,}833\left(\frac{u_0}{U}\right)^2\right\}U^2 l,$$

während für $b = 0{,}283\,l$

$$P = \frac{\gamma h}{g}\left\{0{,}799\frac{u_0}{U} - 0{,}323\left(\frac{u_0}{U}\right)^2\right\}U^2 l,$$

herauskommt.

Der Wert dieser Gleichungen besteht darin, daß man bei gegebener Tiefe h ohne schwierige Kraftmessungen durch Bestimmung von u_0, U und l den Klammerwert ψ_w und damit den Widerstand P berechnen kann. Hat man nun für einen Körper im voraus P anzugeben, so erhebt man u_0, U und l an einem kleinen Modell. Denn da bei ähnlicher Vergrößerung des Körpergrundrisses alle Strömungslinien sich ebenfalls ähnlich vergrößern, muß, wenn d eine charakteristische Abmessung des Körpers — ein „Bezugsmaß“ — ist, soweit die entwickelte Theorie überhaupt zutrifft,

$$P = \frac{\gamma h U^2}{g}\psi_w d \tag{260}$$

gelten. Bei einigen Messungen haben *v. Kármán* und *Ruhbach* dieses quadratische Ähnlichkeitsgesetz bestätigt gefunden, und sie erhoben für

		ψ_w	$u_0 : U$	$l : d$
Platten von der Breite	d	0,80	0,20	5,5
Zylinder vom Durchmesser	d	0,46	0,14	4,3

Von Interesse ist der Vergleich dieser Angaben mit denen älterer Forscher. Bezeichnet man wie oben in Gl. (241) u. f. den größten Körperquerschnitt hd mit F, so wäre nach den angegebenen ψ_w

$$\text{für Platten} \quad P = 1{,}6\,\gamma F \frac{U^2}{2g},$$

$$\text{für Zylinder} \quad P = 0{,}92\,\gamma F \frac{U^2}{2g},$$

während nach Gl. (241) bis (241 b), wenn das Wasser den Körper *allseitig* umgab, für Platten $P = 1{,}29$ bis $1{,}86\,\gamma F \frac{U^2}{2g}$ und nach *Engels* und *Gebers* für Parallelepipede $= 0{,}9$ bis $1{,}3\,\gamma F \frac{U^2}{2g}$ war.

Die Heranziehung des *Bernoulli*schen Gesetzes (vgl. (256 a)) könnte auch, wie hier beigefügt werde, zu einem Rückschluß auf den *Stau* führen, den ein Pfeiler in einem *breiten* Strom verursacht[1]). In der Mitte zwischen den beiden Wirbelreihen schlängelt sich offenbar eine Stromlinie, für deren Wendepunkt $x = y = 0$ ist, so daß hier nach (256 e und f)

$$u^2 = \frac{\zeta}{4 l^2}\left[2 - \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 \frac{\pi b}{l}} - 2\,\frac{1 - \mathfrak{Cos}\frac{2\pi b}{l}}{1 + \mathfrak{Cos}\frac{2\pi b}{l}}\right],$$

$$v^2 = \frac{\zeta}{4 l^2}\left[\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 \frac{\pi b}{l}} + \frac{4}{1 + \mathfrak{Cos}\frac{2\pi b}{l}}\right]$$

oder

$$u^2 + v^2 = \frac{\zeta^2}{l^2}$$

gilt, wonach der Spiegelunterschied zwischen den Wendepunkten und dem Strom *vor* dem Pfeiler (s. Gl. (255))

$$(261) \qquad z = \frac{u^2 + v^2}{2g} = \frac{\zeta^2}{2 g l^2} = \frac{2 u_0^2}{g\,\mathfrak{Tang}^2 \frac{\pi b}{l}}$$

betragen müßte, welcher Ausdruck für das oben (253) ausgerechnete Verhältnis von $b : h$ zu

$$(261\,\text{a}) \qquad z = \frac{3 u_0^2}{g}$$

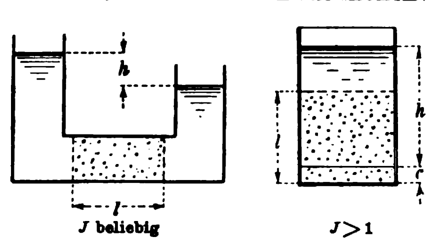
wird.

---

1) Bisher unveröffentlicht.

XV. Grundwasserbewegung.

116. Das Filtergesetz. Man kann als Ausgangspunkt für die Lehre von der Grundwasserbewegung *Coulombs* Betrachtung über den Widerstand, den bewegte Körper im Wasser erleiden und die hierauf fußende Formel (s. oben Gl. (25)) *R. de Pronys* ansehen. Einen weiteren Schritt bildeten die *Navier*schen Gleichungen und *Poiseuilles*[1]) experimenteller Nachweis (s. oben Gl. (14) bis (14h)), daß in Haarröhrchen der Druckverlust der Geschwindigkeit und dem inneren Reibungskoeffizienten proportional ist. Auf die Sickerung durch Sand sind *Poiseuilles* Formeln nicht ohne weiteres übertragbar, denn hier sind die gewundenen Poren von wechselnder Weite und offenbar länger als das Filter dick ist und statt der wahren mittleren Strömungsgeschwindigkeit in den Poren kann man hier nur die *Filtergeschwindigkeit* u angeben, nämlich die Raummenge Flüssigkeit, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Filters sickert. Da Porenlänge und Filterdicke, sowie Strömungsgeschwindigkeit und Filtergeschwindigkeit proportional sind, ist freilich anzunehmen, daß Filtergeschwindigkeit und Druckhöhenverlust oder Gefälle bei einem Filter proportional sind und das fand *H. Darcy*[2]) in der Tat. Dabei ist unter dem Druckhöhenverlust der Höhenunterschied h der Spiegel zu verstehen, die das Wasser zu beiden Seiten eines Filters annimmt, und unter dem *Gefälle* J dessen Verhältnis zur Filterdicke l, also $h:l$. Auf den Genannten folgte *Th. Weiß*[3]), der sich durch Versuche von der Proportionalität überzeugte, obwohl sie seinen theoretischen Ansichten widersprach. *G. Hagen*[4]) ermittelte, allerdings nicht einwandfrei, daß man bei Sand, aus dessen Unterfläche das Wasser frei austritt, als Druckhöhenverlust h die um die kapillare Saughöhe verminderte Höhe des Oberwasserspiegels über der Sandunterfläche anzusehen habe. *E. Duclaux*[5]) zeigte unter anderem, daß auch bei Sickerung durch porige Platten, und *J. B. Rostalski*[6]), daß bei solcher durch verzweigte Haarröhrchen das Verhältnis der Filter-



1) Ann. chim. phys. (3) 7 (1843), S. 62.
2) Les fontaines publiques de la ville de Dijon 1856, S. 590 u. f.
3) Civilingenieur (2) 11 (1865), Sp. 199, 202.
4) Handbuch d. Wasserbaukunst, 1. Teil, 1. Bd., 3. Aufl., 1869, S. 253.
5) Ann. chim. phys. (4) 25 (1872), S. 458.
6) Beiblätter zu den Ann. d. Phys. u. Chem., Bd. 2, 1878, S. 677.

geschwindigkeit zum Gefälle unveränderlich sei, und darauf führten auch die Beobachtungen *Havress*[1]) bei deren graphischer Darstellung durch *Ph. Forchheimer*[2]). Aus Versuchen von *F. Seelheim*[3]) mit sorgfältig von allen fremden Bestandteilen, auch den löslichen Silikaten, befreitem Quarzsand geht für letzteren hervor, daß, wenn d den Durchmesser des in eine Kugel umgeformt gedachten Kornes von mittlerem Gewicht in cm bedeutet, bei 12° C die Filtergeschwindigkeit

(262) $$u = 37{,}6\, d^2 J \text{ cm sec}^{-1}$$

ist. Dabei sei nach *Seelheim* bei Berechnung des Gefälles $(0{,}58 : d)$ cm von der Druckhöhe abzuziehen, wenn der Wasserspiegel innerhalb der Sandschicht liegt. Ton oder Kreide fange erst an durchzulassen, wenn der Druck eine von der Schichtdicke abhängige Größe erreicht; so seien 0,15 cm dicke Lagen von 3 oder 4 Gewichtsteilen Ton auf 1 Wasser für 150 cm Druck noch undurchdringlich. Ferner folgt aus *Seelheims* Arbeit[4]), daß in einem Gemenge von T Raumteilen Ton (Eigengewicht 2,22) von der Zusammensetzung $Al_2O_3 \cdot 2\,SiO_2 + 2{,}3\,H_2O$ und W Raumteilen Wasser für $T : W$ zwischen $1^1/_2$ und 2 bei 12° C

(262a) $$u = 0{,}0000013 \frac{W^2}{T(W+T)} J \text{ cm sec}^{-1}$$

und daß für reinen kohlensauren Kalk in Form geschlemmter Kreide bei 12° C, wenn K deren Raumteile bedeutet, ungefähr

(262b) $$u = 0{,}0000026 \frac{W^2}{K(W+K)} J \text{ cm sec}^{-1}$$

gilt. Schließlich sei für ein Gemenge von Ton, Kalk und Sand (S Raumteile), welch letzterer den Querschnitt im Verhältnis von $W + T + K$ zu $W + T + K + S$ verkleinert,

(262c) $$u = \frac{(0{,}0000013\,T + 0{,}0000027\,K)\,W^2}{(W + T + K + S)(T + K)^2} J \text{ cm sec}^{-1}.$$

Umfassendere Versuche mit sehr quarzreichem Sand, den er durch Siebe in sechs Sorten zerlegte, nahm *C. Kröber*[5]) vor, nach welchem für d in cm bei nicht zu dünner Schicht

(263) $$u = 173 \left(\frac{d}{90} J\right)^{\frac{0{,}3+d}{0{,}8+2d}} \text{cm sec}^{-1}$$

---

1) Revue universelle des mines 35 (1874), S. 469 u. f.

2) Z. d. Arch.- u. Ingen.-Ver. zu Hannover 32 (1886), Sp. 539.

3) Zeitschr. f. analytische Chemie 19 (1880), S. 387 u. f.

4) *Ph. Forchheimer*, Z. d. V. deutsch. Ing. 45 (1901), S. 1737. *Seelheim* selbst hat sein bezügliches Ergebnis nicht mathematisch richtig ausgedrückt.

5) Z. d. Ver. deutsch Ing. 28 (1884), S. 593, 617.

sein soll. Gl. (263) besagt, daß für feines Korn der Druckhöhenverlust so wie in Haarröhrchen mit der ersten, und für sehr grobes Korn so wie in weiten Röhren mit der zweiten Potenz der Filtergeschwindigkeit u wächst, bringt aber nur unvollkommen zum Ausdruck, daß die Geschwindigkeit bei gegebenem Gefälle in Haarröhrchen der zweiten Potenz und in weiten Röhren ungefähr der Wurzel aus dem Rohrdurchmesser proportional ist. Die verschiedenen Beobachter[1]) — bis auf *Darcy*, der *ungewaschenen* Sand benutzte — stimmen in ihren Angaben übrigens ziemlich überein, was um so bemerkenswerter ist, als sie anscheinend nichts voneinander wußten und nur *Darcys* Arbeit allgemeiner bekannt war. Zum besonderen Vergleich werde der Begriff der *Durchlässigkeit* k eingeführt, nämlich

(264) $$u = kJ$$

gesetzt. Die Zusammenstellung ergibt mit d in cm und k in cm sec^{-1}

Versuche von	Havrez		Seelheim		Hagen	Seelh.	Kröb.	Seelh.	Kröber			
$1000\,d$	8	15	16	23	28	48	54	68	70	90	135	210
$k : d^2$	128	90	37	36	36	38	42	38	41	49	36	41

In Einklang mit diesen Zahlen steht auch das Ergebnis der sorgfältigen Untersuchungen *A. Hazens*[2]), der bis zu Gefällen $J = 2$ vorschritt und bei losester Schüttung in reinem Feinsand bei 10° C

(265) $$u = 116\, d_w^2 J \text{ cm sec}^{-1}$$

fand. Hier erscheint der mittlere Korndurchmesser d durch den *wirksamen* Korndurchmesser (effective size of grain) d_w ersetzt, den *Hazen* einführte, weil es für die Porengröße, also für die Strömung, mehr auf die kleinen Körner, die sich vielfach zwischen größere einlagern, als auf letztere ankommt. Er kennzeichnet d_w dabei durch die Vorschrift, daß sämtliche Körner, deren Volumen kleiner als der Kugelinhalt $\frac{\pi}{6} d_w^3$ ist, zusammen $^1/_{10}$ des gesamten Sandgewichtes wiegen sollen. Wenn alle Körner in Kugeln verwandelt werden, scheidet d_w also den Sand in $^1/_{10}$ kleinere und $^9/_{10}$ größere Körner. Übrigens[3]) kann bei gleichmäßigem

---

1) Versuche nahmen auch vor *v. Welitschkowski* (Archiv f. Hygiene 2 (1884), S. 498), *E. Wollny*, Forschungen auf dem Gebiete der Agrikulturphysik (14 (1891), S. 1) und die kgl. *Kanalkommission* in Münster (*H. Lang*, Taschenbuch Hütte, 16. Aufl. (1896), S. 254). Sieh diesbez. auch *Ph. Forchheimer*, Z. d. V. deutsch. Ing. 45 (1901), S. 1737, 1784, 1787.

2) 24th Annual Report of the State Board of Health of Massachusetts for 1892, *A. Hazen*, The Filtration of Public Water-Supplies, New-York 1895.

3) Z. d. V. deutsch. Ing. 45 (1901), S. 1738.

Sand nach *Hazen* u bis zu $150\,d_w^2 J$ ansteigen und bei ungleichmäßigem, dicht gelagertem bis auf $60\,d_w^2 J$ sinken. Die Gleichförmigkeit ist also von Belang und für ihre Bemessung dividiert der Genannte den Durchmesser des Kornes, welches den Sand in kleinere Körner scheidet, die zusammen 0,6, und größere, die zusammen 0,4 des Gewichtes der ganzen Masse ausmachen, durch d_w. Diese Verhältniszahl, welche er „uniformity coefficient“ nennt, bezeichnet man wohl zutreffender als *Ungleichförmigkeit.* Die deutschen Filtersande haben nach seinen Messungen eine Ungleichförmigkeit von 1,5 bis 2,5. *Hazen* sagt, daß die durch Gl. (265) ausgesprochene Proportionalität von Filtergeschwindigkeit u und Gefälle J aufhört, wenn $d_w > 0{,}3$ cm ist. Für gröbere Sande nehme, wie dies ja auch *Kröber* behauptet, die Durchlässigkeit k ab, wenn die Geschwindigkeit wächst. Das ist zweifellos der Fall und Versuche von *U. Masoni*[1]) mit vulkanischen Feinsanden von $d_w = 0{,}037$ bis 0,055 cm haben sogar gezeigt, daß auch bei so feinem Korn die Geschwindigkeit weniger als das Gefälle wächst, wenn man dieses nur genug groß macht. Er erhielt z. B. für $d_w = 0{,}055$ und

$J =$	0,46	3,94	7,62	19,66	35,54	107,3
u in cm sec^{-1} =	0,19	1,29	2,43	4,80	7,64	14,6
k in cm sec^{-1} =	0,42	0,33	0,32	0,24	0,22	0,14

Das Verhalten dieser Sande wird übrigens durch Gleichungen von der Form[2])

$$J = \alpha u + \beta u^2 \tag{266}$$

genauer wiedergegeben, wie durch solche von der Form

$$J = \alpha u^\beta. \tag{266a}$$

Noch besser kann man sich natürlich bei der Bauweise

$$J = \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 \tag{266b}$$

der Erscheinung anschmiegen und zwar zeigen sich in (266b) alle drei Konstanten positiv. Recht auffällig ist die Abnahme von k in den groben Schottern der Flußalluvionen. Schon *O. Smreker*[3]) bemerkte, daß *A. Thiems*[4]) Messungen am Versuchsbrunnen der Stadt Straßburg i. E.

---

1) Sul moto dell' aqua attraverso i terreni permeabili, Neapel 1895; Di alcune determinazioni sperimentali sui coefficienti di filtrazione, Neapel 1896.

2) *Ph. Forchheimer,* Z. d. V. deutsch. Ing. 45 (1901), S. 1782.

3) Ebenda 22 (1878), Sp. 117, 193; 23 (1879), S. 347; 25 (1881), S. 283, 353 411, 483, Endergebnis S. 489; hierzu *A. Thiem,* 24 (1880), S. 101.

4) Journ. f. Gasb. u. Wass. 19 (1876), S. 707.

gegen eine unveränderliche Durchlässigkeit sprechen und er setzte für den dortigen Boden für u = etwa 0,001 bis 0,04 cm sec^{-1}

$$J = 10{,}7\, u^{3/2} + 31{,}2\, u^2. \tag{267}$$

Ferner fand *Ph. Forchheimer* im Kies des

Marchfeldes

$$J = 1{,}53 u + 237 u^2 \text{ für } u = 0{,}00031 \text{ bis } 0{,}011 \text{ cm sec}^{-1},$$

Lechfeldes bei Gersthofen

$$J = 0{,}71 u + 8 u^2 \text{ für } u = 0{,}12 \text{ bis } 1{,}2 \text{ cm sec}^{-1},$$

Grazer Feldes oberhalb Graz

$$J = 0{,}033 u + 0{,}79 u^2.$$

Das steht in Einklang mit Versuchen von *P. Kresnik*[1]), nach welchen in reinem Sand bei 10° C für die in m pro Tag (24 Stunden) ausgedrückte Filtergeschwindigkeit u_1

$$1000\, J = \frac{u_1}{0{,}7 + u_1}\left(\frac{1}{d} + \frac{u_1}{0{,}8\, d + 10{,}5\, d^2} + \frac{u_1^2}{30000\, d^2}\right) \tag{267a}$$

sein soll, wobei d den tatsächlich wirksamen Korndurchmesser in cm bezeichnet.

Übrigens wechselt die Durchlässigkeit im natürlichen Boden außerordentlich, teils weil sie, wie gesagt, von der Korngröße sehr abhängt und diese selten auf größeren Strecken die gleiche ist, teils weil schon kleine Lehmbeimengungen — wie auch aus *Seelheims* Angaben hervorging — die Durchlässigkeit sehr herabsetzen. Auch ist bei Filterversuchen die Durchlässigkeit Schwankungen unterworfen, kann sich z. B. in den ersten 24 Stunden verdoppeln, wenn es so lange braucht, bis alle Luft durch Lösung aus den Poren entfernt ist. Sacken des Sandes, Fortschwemmen oder Absetzen von Lehm, chemische Veränderungen können weitere Störungen selbst dann bewirken, wenn man es vermeidet, daß sich wie in Filteranlagen eine obere dichte Decke bildet[2]).

Erwähnenswert ist, daß nach *F. H. King*[3]) und *Newell*[4]) poriger Sandstein und wie es scheint selbst sehr feiner Sand ein gegenteiliges Verhalten wie Grobsand zeigen, nämlich eine Abnahme von k bei abnehmender Geschwindigkeit, z. B. sank in von *King* untersuchten Sanden aus sehr ungleichen Körnern bis zur Staubfeinheit herab, wenn das Ge-

---

1) Öst. Woch. f. d. öff. B. 12 (1906), S. 142.

2) Vgl. *Ph. Forchheimer*, Z. d. V. deutsch. Ing. 45 (1901), S. 1785.

3) Washington, 19th Ann. Report of the U. S. Geological Survey 1897/8, Part 2, S. 109 f. (1899).

4) *King* führt an: Thesis on the Geology of Bradford oil rocks 1885.

fälle von etwa 6 auf 1,2 vermindert wurde, der Durchfluß nicht nur auf $^1/_5$ des früheren, sondern um weitere 6 bis 37 v. H. herab.

Da die Bewegung in Sand nur eine abgeänderte Form jener in Haarröhrchen ist, wird sie gleich letzterer von der Temperatur beeinflußt. Das bemerkte schon *G. Hagen*[1]), der neben Wasser von 12,5° C solches von 29,4° C gebrauchte und eine Ergiebigkeitssteigerung von ungefähr 3 v. H. für je 1° C feststellte. *Havrez*[2]), der sogar bis 100° C hinaufging, fand unter anderem bei dieser Temperatur die Durchlässigkeit im Grobsand 6 mal so groß wie bei 0°. *Seelheim*[3]) will bei t° C im

$$
\begin{aligned}
&\text{Quarzsand} && u = 29{,}6\,d^2(1 + 0{,}0136\,t + 0{,}000\,704\,t^2)\,J,\\
(268)\quad &\text{Ton} && u = 0{,}000\,001\,02\,\frac{W^2}{T(W+T)}(1 - 0{,}002\,24\,t + 0{,}002\,038\,t^2)\,J,\\
&\text{Kalk} && u = 0{,}000\,0022\,\frac{W^2}{K(W+K)}(1 + 0{,}093\,t + 0{,}0005\,t^2)\,J
\end{aligned}
$$

haben, worin W, T und K dasselbe wie in (262a—c) bedeutet. Bei Ton wäre neben einer Einwirkung auf die innere Reibung im Wasser eine solche auf die Tonporen denkbar; kaum zu erklären ist aber die starke Abweichung des von t abhängigen Klammerausdruckes bei feinem Quarzsand von dem in (14a) vorkommenden Ausdruck $1 + 0{,}0337\,t + 0{,}000\,22\,t^2$ *Poiseuilles*. Mit den Physikern (und *Hagen*) genügend im Einklang steht hingegen *A. Hazen*[4]), der für t° C

$$
(268\text{a})\qquad u = 116\,d_{w}^2\,(0{,}7 + 0{,}03\,t)\,J\ \text{cm sec}^{-1}
$$

setzt.

Später fand *P. Kresnik*[5]), daß für wärmeres Wasser die Durchlässigkeit bei grobem Sand beträchtlich stärker als bei feinem zunimmt, daß nämlich

$$
(268\text{b})\qquad k = k_{10}\left(1 + 0{,}0745\,(t - 10)\sqrt[5]{d}\right)
$$

sei, wobei k_{10} die Durchlässigkeit bei 10° C bezeichnet.

117. Theoretische Ableitung des Filtergesetzes. Strömt eine Flüssigkeit durch ein in der x-Richtung liegendes Rohr oder Prisma von beliebigem, aber derart engem Querschnitt, daß die Strömung laminar erfolgt, so gilt für die Reibung zwischen benachbarten Schichten nach Gl. (11), weil die Geschwindigkeit von Punkt zu Punkt wechselt,

$$
\text{Reibungswiderstand für die Flächeneinheit} = \eta\,\frac{du}{dn},
$$

---

1) Handbuch, 1. Teil, 1. Bd., S. 256.

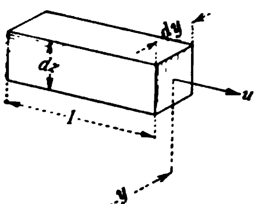
2) Revue universelle des mines 35 (1874¹), S. 507.

3) Zeitsch. f. analytische Chemie 19 (1880), S. 403, 409, 413.

4) Sonderauszug aus „Report", S. 15. The Filtration etc., S. 21.

5) Öst. Woch. f. d. öff. B. 12 (1906), S. 140.

wobei n senkrecht zu den Schichten gemessen wird. Es werde nun ein Element von der Länge 1 und dem Querschnitt $dy\,dz$ betrachtet, dessen Mittelpunktskoordinaten y und z seien. Für die Seitenfläche von den Ordinaten $y + \frac{1}{2}dy$ und der Höhe dz beträgt die beschleunigende Reibungskraft in der x-Richtung



$$dz \cdot \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy}{2}\right),$$

während auf der Seitenfläche $y - \frac{1}{2}dy$ eine verzögernde Kraft

$$dz \cdot \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy}{2}\right)$$

wirkt. Diese beiden Kräfte heben sich bis auf

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy\,dz$$

auf. Desgleichen bleibt von den Reibungen auf den Flächen mit den Koordinaten $z \pm \frac{1}{2}dz$ nur

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dz\,dy$$

übrig. Es wirken ferner Drücke auf die beiden Endflächen $dy\,dz$ und geben bei dem Eigengewicht γ und einem Gefälle J eine Mittelkraft

$$\gamma J\,dy\,dz.$$

Das Gleichgewicht in der x-Richtung verlangt also, daß

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy\,dz + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dy\,dz + \gamma J\,dy\,dz = 0$$

sei, wonach für die Verteilung der Geschwindigkeiten über den Querschnitt[1])

$$(269) \qquad -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\gamma J}{\eta}$$

gilt. Jede Funktion, für die die partielle Differentialgleichung (269) erfüllt ist, stellt also eine Bewegung durch eine Kapillarröhre dar, deren Begrenzung dadurch erkennbar ist, daß für dieselbe $u = 0$ sein muß.

Eine solche Funktion ist

$$(270) \qquad -u = (3a - y)(3z^2 - y^2) = 9az^2 - 3yz^2 + y^3 - 3ay^2,$$

falls man

$$(270\text{a}) \qquad a = \frac{\gamma J}{12\eta}$$

setzt; denn die Differentiation lehrt zunächst, daß, wie verlangt,

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 6a, \qquad -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 18a - 6y,$$

1) *A. G. Greenhill*, Lond. Math. Soc. Proc. 13 (1881), S. 43.

also

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 12a = \frac{\gamma J}{\eta}$$

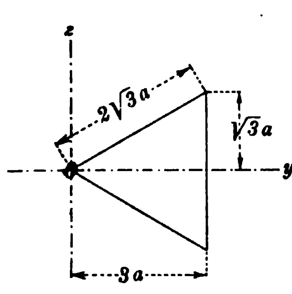
ist. Ferner wird nach (270) $u = 0$ für die drei Geraden

(270b) $$y = 3a \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{y}{\sqrt{3}}$$

und so folgt, daß (270) den Durchfluß durch ein enges Prisma angibt, dessen Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge $2\sqrt{3}a$ bildet. Durch einen Streifen $z\,dy$ fließt

$$\int_{-y:\sqrt{3}}^{y:\sqrt{3}} u\,dz = -\Big[3az^3 - yz^3 + y^3 z - 3ay^2 z\Big]_{z=-y:\sqrt{3}}^{z=y:\sqrt{3}} = \frac{4ay^3}{\sqrt{3}} - \frac{4y^4}{3\sqrt{3}}$$

und daher durch den ganzen Querschnitt



$$\int_0^{3a}\left(\frac{4ay^3}{\sqrt{3}} - \frac{4y^4}{3\sqrt{3}}\right)dy = \frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{ay^4}{4} - \frac{y^5}{15}\right]_0^{3a} = \frac{81a^5}{5\sqrt{3}}.$$

Wird nun der Querschnitt $3\sqrt{3}a^2$ mit A bezeichnet, so folgt für die mittlere Geschwindigkeit im Röhrchen

$$U = \frac{81a^5}{5\sqrt{3}} : 3\sqrt{3}a^2 = \frac{9a^3}{5} = \frac{3aA}{5\sqrt{3}}$$

oder[1])

(270c) $$U = \frac{1}{20\sqrt{3}}\frac{A\gamma J}{\eta} = 0{,}028\,87\frac{A\gamma J}{\eta}.$$

Da nach (14f und g) bei kreisförmigem Querschnitt von der Größe A

(270d) $$U = \frac{1}{8\pi}\frac{A\gamma J}{\eta} = 0{,}039\,79\frac{A\gamma J}{\eta}$$

ist, steigt bei Verwandlung des Dreieckes in eine gleichgroße Kreisfläche die Geschwindigkeit um ungefähr 38 Prozent.

Die Benutzbarkeit von (270c) gewinnt dadurch, daß *J. Boussinesq*[2]) für verschiedene Querschnittsformen gezeigt hat, daß geringe Verdrückung der Querschnitte, sofern man deren Größe beibehält, U nicht wesentlich ändert.

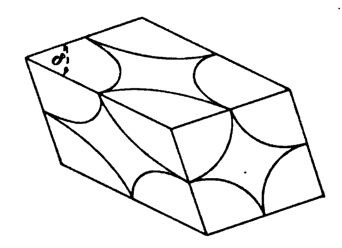
C. S. Slichter hat dann auch von ihr ausgehend den Durchfluß durch ein Kugelhaufwerk abgeleitet. Derselbe[3]) denkt sich acht Kugeln vom Durchmesser d

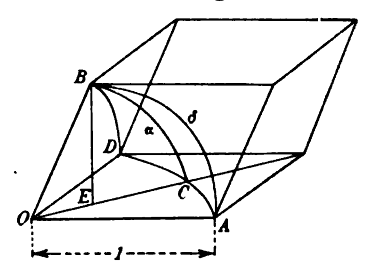
1) *J. Boussinesq*, Journ. de math. (2) 13 (1868), S. 424. *H. Lamb*, Hydrodynamics, Cambridge 1895, S. 96, 523. *Lamb-Friedel*, S. 104, 675.

2) Journ. de math. (2) 13 (1868), S. 388.

3) Annual Report of the United States Geological Survey 19[2] (1899), S. 311.

derart angeordnet, daß ihre Mittelpunkte die Ecken eines Rhomboeders bilden, dessen Oberfläche aus Rhomben von der Seitenlänge d und den Winkeln δ bzw. $180^\circ - \delta$ bestehen. Um den Inhalt eines solchen Rhomboeders zu finden, bedenke man, daß bei einer Seitenlänge 1 seine Grundfläche $\sin\delta$ beträgt, während seine





Höhe BE aus dem gleichzeitigen sphärischen Dreieck ABD von den Seitenlängen δ, dessen sphärische Höhe α ist, sich zu

$$\sin\alpha = \frac{\sin\delta\sqrt{1+2\cos\delta}}{1+\cos\delta}$$

ergibt. Bei einer Seitenlänge d der Rhomben beträgt daher der Rhomboederinhalt

$$\frac{\sin\delta\sqrt{1+2\cos\delta}}{1+\cos\delta}\cdot\sin\delta\cdot d^3 = d^3(1-\cos\delta)\sqrt{1+2\cos\delta}. \tag{271}$$

Von diesem Inhalt füllen die acht sich berührenden Kugelausschnitte stets den Teil $\frac{1}{6}\pi d^3$ aus, während das Innere hohl bleibt, so daß das Verhältnis des Hohlraumes zum ganzen Körper durch

$$\mu = 1 - \frac{\pi}{6(1-\cos\delta)\sqrt{1+2\cos\delta}} \tag{272}$$

ausgedrückt wird. Seine Grenzwerte erreicht μ für $\delta = 60^\circ$, in welchem Falle jede Kugel an 12 Stellen Nachbarkugeln berührt, und für $\delta = 90^\circ$, in welchem Falle dies nur an sechs Stellen geschieht. Zwischen den Grenzwerten, welche 0,2595 und 0,4764 betragen, bewegt sich μ wie folgt:

$\mu =$	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46
$\delta =$	60°2′	61°18′	62°36′	64°8′	65°37′	67°21′	69°17′	71°28′	74°30′	77°10′	81°25′

Die schräge Entfernung der auf den beiden Rhomboedergrundflächen befindlichen Porenenden ist

$$\frac{1+\cos\delta}{\sin\delta\sqrt{1+2\cos\delta}} \text{ mal} \tag{272a}$$

größer als die Rhomboederhöhe und der gekrümmte Weg des Wassers etwa

$$1 + \frac{0{,}065\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}{\frac{\pi}{6}} = \text{im Mittel } 1{,}042 \text{ mal} \tag{272b}$$

so lang wie die schräge Entfernung. Den von drei Bögen begrenzten Porenquerschnitt denkt *Slichter* durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt und er schätzt dessen Querschnitt an der engsten Stelle zu $0{,}037\,d^2$ und im Mittel zu $0{,}053\,d^2$, also um 43 Prozent größer. Er ersetzt nun letzteren Porenquerschnitt durch einen

runden von der Größe $0{,}037\,d^2$, wodurch er den Durchfluß einerseits vermindert und andererseits gemäß (270d) um 38 Prozent erhöht, so daß seiner nicht näher begründeten Ansicht nach im ganzen eine Abnahme um 5,5 vom Hundert herauskäme. Das gleicht er zum größten Teile wieder dadurch aus, daß er die Porenlänge nach einer schrägen Geraden statt in der Kurve mißt. Die engsten Stellen befinden sich an den Grundflächen des Rhomboeders, wo zwei mehr oder weniger zusammenhängende Poren senkrecht münden und auf jede derselben eine Fläche

$$A = \frac{1}{2}(\text{Rhombus} - \text{Kreis}) = \frac{\left(\sin\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\,d^2$$

entfällt, und dieses A betrachtet *Slichter* nunmehr als Porenquerschnitt, während er als Porenlänge bei einer Filterdicke h nach dem Gesagten

$$l = \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{1 + 2\cos\vartheta}}\,h \tag{272c}$$

betrachtet. Ist das in gewöhnlicher Weise gemessene Filtergefälle (das ist der Quotient Druckhöhenunterschied durch Filterdicke) $= J$, so ist das Porengefälle dann $hJ : l$ und daher folgt für die Porengeschwindigkeit nach (270d)

$$U = \frac{1}{8\varkappa} \cdot \frac{\left(\sin\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)d^2}{2} \cdot \frac{\sin\vartheta\sqrt{1 + 2\cos\vartheta}}{1 + \cos\vartheta} \cdot \frac{\gamma J}{\eta}.$$

Hier kann man den Wert von $1 - \mu$ aus Gl. (272) einführen und hat

$$U = \frac{d^2}{96}\,\frac{\sin\vartheta - \frac{\pi}{4}}{\sin\vartheta}\,\frac{1}{1-\mu}\,\frac{\gamma J}{\eta}. \tag{272d}$$

Die Multiplikation dieses U mit den beiden Querschnitten A ergibt als Ausfluß aus einer Rhomboedergrundfläche $d^2 \sin\vartheta$

$$2AU = \frac{d^4}{96}\,\frac{\left(\sin\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)^2}{\sin\vartheta}\,\frac{1}{1-\mu}\,\frac{\gamma J}{\eta}$$

oder als Durchfluß durch die Flächeneinheit, also als Filtergeschwindigkeit

$$u = \frac{2AU}{d^2\sin\vartheta} = \frac{d^2}{96}\left(\frac{\sin\vartheta - \frac{\pi}{4}}{\sin\vartheta}\right)^2 \frac{1}{1-\mu}\,\frac{\gamma J}{\eta} \tag{273}$$

oder, weil $\gamma = 1\,\text{g cm}^{-3}$ und η nach *Poiseulle* bei $10°\,\text{C} = 0{,}000\,013\,35\,\text{g sec cm}^{-2}$ ist, bei Wasser von 10° C

$$u = 771\,\frac{d^2 J}{\varkappa}\,\text{cm sec}^{-1}, \tag{273a}$$

worin, weil das Porenverhältnis μ vom Rhombuswinkel ϑ abhängt, die unbenannte Größe $\varkappa$ als Funktion von μ angesehen werden kann. Für sie berechnet *Slichter* nachstehende Werte [1])

1) Ebenda S. 326.

μ = 0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46
$\varkappa$ = 84,3	65,9	52,5	42,4	34,7	28,8	24,1	20,3	17,3	14,8	12,8

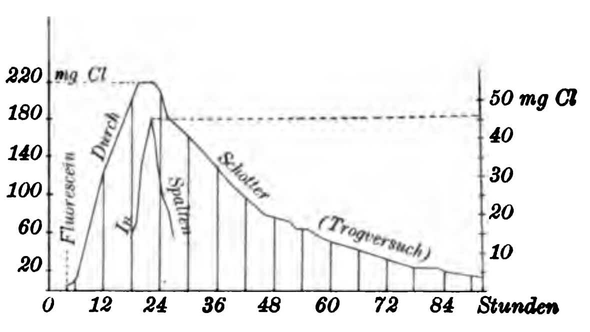
Der Wert der Betrachtungen *Slichters* wird, wie *L. Darapsky*[1]) zeigt, dadurch sehr herabgesetzt, daß auch bei Kugeln von gleichem μ recht verschiedene Anordnungen vorkommen können.

118. Die scheinbare Turbulenz. Versuche von *F. H. King*[2]), der seinen Sand leise stampfte, haben dargetan, daß die Formel (273a) anwendbar bleibt, wenn man es statt mit Kugeln mit natürlichem, durch Sieben auf einheitliches Korn gebrachten reinen Sand zu tun hat, während sie zu etwas kleinerem u führt, als die Beobachtungen von *Seelheim* usw. bei Sand von ungleichem Korn ergaben, indem für mittlere Beschaffenheit, d. i. $\mu = 0{,}36$, $\varkappa = 28{,}8$, die Gl. (273a) eine Durchlässigkeit $k = 27\,d^2$ statt $k =$ etwa $40\,d^2$ liefert. Noch größer ist die Abweichung für die losen Schüttungen *Hazens*. Für Feinsand von 0,05 bis 0,08 cm Korn nahm die Durchlässigkeit mit dem Gefälle etwas zu, während sie für $d \gtreqless 0{,}11$ cm bei wachsendem Gefälle abnahm, so als ob Turbulenz begänne. Bei dem Sand von 0,11 cm Korn war aber[3]) das Porenverhältnis $\mu = 0{,}3988$, das geringste angewendete Gefälle 1 : 30, die Filtergeschwindigkeit hierbei $u = 0{,}0216$ cm sec^{-1}, und die mittlere Geschwindigkeit in den gewundenen Poren etwa 0,065 cm sec^{-1}, die Temperatur 17,6° C. Bei dieser Temperatur würde nach *Reynolds* Formel (34) bei Haarröhrchen von der Weite D m für die Geschwindigkeit U_{krit} m sec^{-1}, bei welcher die Proportionalität von Geschwindigkeit und Gefälle aufhört, $D\,U_{krit} = 0{,}0137$ gelten; $U_{krit} = 0{,}065$ cm sec^{-1} würde hiernach einen Porendurchmesser D von nicht weniger als 20 m erfordern. Man kann nun nicht annehmen, daß in den unregelmäßigen Sandporen die Bewegung so sehr viel leichter turbulent wird, als in regelmäßigen Hohlgängen, obwohl freilich Divergenz der Wandung nach *Reynolds*[4]) den Übergang zur Turbulenz außerordentlich befördert und die gegenteilige Erscheinung in konvergierenden Düsen beobachtet worden ist, und obwohl *Gibson*[5]), wie in § 67 erwähnt, fand, daß die kritische Geschwindigkeit, bei welcher sein turbulent eintretendes Wasser sich in Düsen beruhigte, die untere kritische Geschwindigkeit von *Reynolds* mindestens 15mal übertraf. Dieser Erklärung wäre nämlich entgegenzuhalten, daß

1) Zeitsch. Math. Phys. 60 (1912), S. 170.
2) Annual Report U. S. Geol. Survey 19², S. 242.
3) Ebenda S. 225, 228, 235.
4) Proc. of the Roy. Institution of Great Britain 1884 = Papers 2, S. 158.
5) London, Proc. Roy. Soc. 83 (1910), S. 376. Nach *J. Eustice*, ebenda 85 (1911), S. 119, scheint nach Austritt aus einem Bogen in eine Gerade das Wasser in dieser schon bei geringer Geschwindigkeit turbulent zu werden.

für divergierende Düsen bisher zwar, wie es scheint, nur eine einzige Messung von *W. Hampel*[1]) vorliegt, daß nach dieser aber in einer hyperbolisch begrenzten Düse von 46 mm Eintrittsdurchmesser die Wirbelung bei etwa 0,05 m sec^{-1} Eintrittsgeschwindigkeit, also nicht sehr früh, begann. Der wahre Grund liegt also wohl im Wasserstoß auf die Sandteilchen, welche alle auf der der Strömung entgegengerichteten Seite stärker als auf der abgewendeten gedrückt werden.

Selbst wenn die Bewegung in grobem Schotter vor sich geht, so bleibt sie doch im wesentlichen laminar. Das zeigt sich, wenn man eine Salzlösung strömendem Grundwasser zugießt und stromab von Zeit zu Zeit Proben entnimmt. Da die mittleren Stromfäden in den Poren rasch voraneilen, während die seitlichen langsam nachfolgen, steigt an der Entnahmestelle der Proben der Salzgehalt rasch an und sinkt dann immer langsamer herab. Herrscht, wie z. B. in offenen Felsspalten, turbulente Bewegung, so fällt hingegen der Salzgehalt ebenso rasch, wie er früher stieg. Im ersten Falle ist also, wie *Ph. Forchheimer*[2]) bemerkt, die Kurve, welche die Zeit zu Abszissen, den Salzgehalt zu Ordinaten hat, unsymmetrisch, im zweiten symmetrisch gebaut.



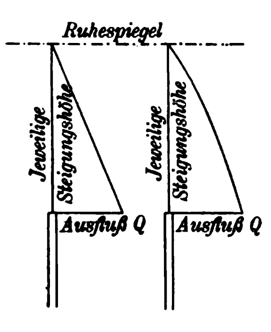
119. Artesische Brunnen. Einzelschachtbrunnen. Dem Vorgang des Filterns entsprechen die artesischen Brunnen, das sind Bohrlöcher, die eine Deckschicht durchdringen, unter der Wasser unter solchem Druck steht, daß es nach deren Durchbohrung über die Erdoberfläche tritt. Als artesisch im weiteren Sinn kann man auch solche Brunnen bezeichnen, bei denen der Ruhespiegel in der Deckschicht selbst liegt. Ist die Durchlässigkeit k der durchtränkten Erde unveränderlich und die Reibung im Futterrohr des Bohrloches vernachlässigbar, so muß, wie *H. Darcy*[3]) an Messungen, die in der Bohrung von Grenelle gemacht worden waren, erläutert, der Ausfluß Q proportional mit dem Druck-

1) Technische Blätter 40 (1908), S. 30.

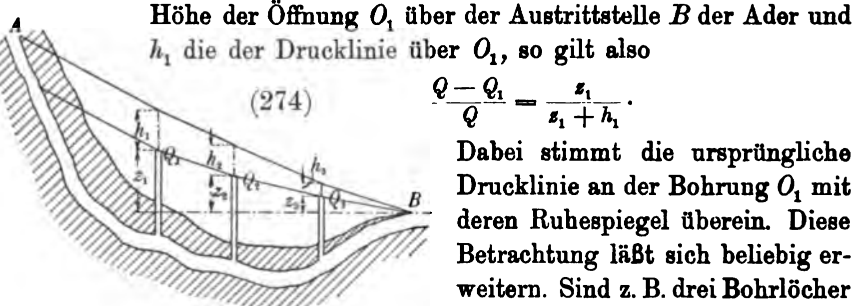
2) Z. d. öst. I. u. A.V. 58 (1906), S. 201. Von *A. Thiem* erhobene Salzgehaltkurven: Z. d. V. deutsch. Ing. 31 (1887), S. 1138.

3) Les fontaines publiques de la Ville de Dijon 1856, S. 156.

verlust wachsen, das ist mit der Tiefe der Ausflußöffnung unter dem Ruhespiegel, bis zu dem das Wasser ansteigt, wenn man das Bohrrohr so hoch führt, daß überhaupt nichts ausfließt. Denkt man sich von jedem Steigrohrende den Ausfluß Q wagrecht aufgetragen, so erhält man also im allgemeinen eine Gerade und nur, wenn der Teil des Druckverlustes, der wie die zweite Potenz der Geschwindigkeit wächst, nicht vernachlässigbar ist, eine Parabel. Da der Druckverlust zum geringsten Teil im Steigrohr stattfindet und die Bohrung die Versickerung des Wassers in die speisende Erdschicht, also die Zulaufgeschwindigkeit in der Erde nicht verändern kann, ist, wie *Darcy* bemerkt und durch Anführung von Beobachtungen belegt, die Bohrlochweite von geringem Einfluß auf die Ergiebigkeit. Diese kann dagegen, wie die Erfahrung[1]) zeigt, durch benachbarte artesische Brunnen stark leiden. *J. Dupuit*[2]) stellt hierüber eine Betrachtung unter der Voraussetzung an, daß mehrere Bohrlöcher von derselben engen Ader gespeist werden. Da die Zusickerung Q zur Ader, also deren Wasserführung unveränderlich ist, bewirkt eine Entnahme Q_1 durch einen artesischen Brunnen mit der Ausflußöffnung O_1, daß stromauf die Standrohrspiegellinie oder Drucklinie, die früher höher als O_1 lag, parallel niedersinkt, bis sie durch O_1 geht. Sie bewirkt ferner stromab, daß das Gefälle der Drucklinie sich im Verhältnis des neuen Durchflusses $Q - Q_1$ zum alten Durchfluß Q verringert. Bedeutet z_1 die Höhe der Öffnung O_1 über der Austrittstelle B der Ader und h_1 die der Drucklinie über O_1, so gilt also



$$\frac{Q - Q_1}{Q} = \frac{z_1}{z_1 + h_1}. \tag{274}$$



Dabei stimmt die ursprüngliche Drucklinie an der Bohrung O_1 mit deren Ruhespiegel überein. Diese Betrachtung läßt sich beliebig erweitern. Sind z. B. drei Bohrlöcher vorhanden und bezeichnet

z_1, z_2, z_3 die Höhe der Öffnungen über B,

h_1, h_2, h_3 die Druckhöhen an den Öffnungen,

1) Ebenda S. 170, 171.

2) Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux, 2. éd., Paris 1863, S. 267. — Einige Betrachtungen: *G. J. Richert,* Grundwasser, Münch.-Berl. 1911, S. 196. — Druck infolge Überlagerung mit Sand und Ton: *A. Tornquist,* Journ. f. Gasb. u. Wass. 54 (1911), S. 9.

wenn diese verschlossen wären und alles Wasser in B ausflösse,

Q_1, Q_2, Q_3 die Ausflüsse an den Öffnungen O_1, O_2, O_3,

so hat man entsprechend Gl. (274) für die Strecke BO_3 bzw. O_3O_2 und O_2O_1

(274a)
$$\begin{cases} \dfrac{Q-Q_1-Q_2-Q_3}{Q} = \dfrac{z_3}{z_3+h_3}, \\ \dfrac{Q-Q_1-Q_2}{Q} = \dfrac{z_2-z_3}{(z_2+h_2)-(z_3+h_3)}, \\ \dfrac{Q-Q_1}{Q} = \dfrac{z_1-z_2}{(z_1+h_1)-(z_2+h_2)}, \end{cases}$$

und kann also, wenn alle sonstigen Größen bekannt, die Ergiebigkeiten Q_1, Q_2 und Q_3 berechnen. *Dupuit* berührte[1]) auch die Frage, wie eine Bohrung auf eine benachbarte wirkt, wenn statt der schmalen Ader ein breiter Grundwasserstrom vorhanden ist. Er fand ferner, freilich nicht auf strenge Weise, man dürfe bei einer Strombreite $2l$ bei Vorhandensein einer einzigen Bohrung vom Halbmesser r, deren Ergiebigkeit

(274b)
$$Q_1 = \frac{Q}{\log\text{nat}\, l - \log\text{nat}\, r} \cdot \frac{h_1}{h_1+z_1}$$

setzen, wobei h_1 und z_1 die alte Bedeutung haben.

Würde ein artesischer Brunnen von der Ergiebigkeit Q gleichmäßig von allen Seiten gespeist werden, so wäre in der Entfernung R von ihm bei einer Dicke e der wasserführenden Schicht die Filtergeschwindigkeit

$$Q : 2\pi Re$$

und daher bei der Durchlässigkeit k der Druckhöhenverlust auf der Strecke dR

(275)
$$dz = \frac{Q}{2\pi ke}\frac{dR}{R},$$

wobei z die Druckhöhe über einer beliebigen festen Gleichenebene bedeutet. Da am Brunnen z zur Höhe — sie heiße h — der oberen Bohrrohröffnung über der Gleiche und R zum Lochhalbmesser r wird, zeigt die Integration (275), daß der Druck vom Bohrloch ab ringsum nach der Gleichung[2])

(275a)
$$z - h = \frac{Q}{2\pi ke}\log\text{nat}\frac{R}{r}$$

zunimmt. In größerer Entfernung vom Bohrloch verliert Gl. (275a) natürlich ihre Gültigkeit, da die wasserführende Schicht niemals gleich-

1) Ebenda S. 272.

2) Ebenda S. 261.

mäßig nach allen Seiten gespeist wird. Auch aus diesem Ausdruck geht die geringe Bedeutung der Lochweite für die Ergiebigkeit hervor.

J. Dupuit[1]) hat bereits, von der Auffassung einer porösen Masse als verzweigtes Haarröhrchen ausgehend, ausgesprochen, daß bei schwach geneigten Stromfäden die Geschwindigkeit in der Tiefe mit der an der Oberfläche übereinstimme und nur vom Oberflächengefälle abhänge. Später hat *Ph. Forchheimer*[2]) dies durch die Bemerkung näher begründet, daß Druckverluste nur in der Stömungsrichtung stattfinden, während senkrecht hierzu der Druck sich ohne Verlust nur nach Maßgabe der Tiefenlage ändert. Bei nahezu wagrechten Stromfäden, gebe es also in lotrechter Richtung keinen nennenswerten Druckverlust und stimme daher der Verlust längs der Längeneinheit des obersten Fadens — das ist das Oberflächengefälle — mit den Druckverlusten in der Tiefe fast überein. Zudem dürfe man hier die wahre Fadenlänge mit ihrer Grundrißlänge vertauschen.

Wenn nun durchlässiger Boden auf einer wagrechten dichten Unterlage ruht, aber keine dichte Decke vorhanden ist, und ein runder Schachtbrunnen mit durchlässiger Wandung bis zu der Unterlage hinabreicht, so hat man[3]) nach dem oben Gesagten statt Gl. (275)

$$dz = \frac{Q}{2\pi k z}\,\frac{dR}{R} \tag{276}$$

und daher statt (275a)

$$z^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k}\log\text{nat}\,\frac{R}{r}\,. \tag{276a}$$

Obwohl nun dieser Ausdruck, ebenso wie es (275a) tat, in größerer Entfernung R seine Gültigkeit verliert, den unwahrscheinlichen Fall ausgenommen, daß der Brunnen in der Mitte einer runden Insel liege, und obwohl er in der Nähe eines Brunnens im allgemeinen nicht zutrifft, weil die angenommene Bauweise kaum vorkommt, lassen sich doch aus Gl. (276a) viele nützliche Schlüsse ziehen. *A. Thiem*[4]), der zuerst die Entstehung von Spiegeln nach (276a) in der Natur beobachtete, hat denn auch diesen Ausdruck vielfach bei seinen Entwürfen benutzt.

1) Ebenda S. 230.

2) Z. d. öst. I. u. A.V. 50 (1898), S. 629.

3) *J. Depuit*, Études théoriques et pratiques, 2. éd. 1863, S. 254.

4) Journ. f. Gasb. u. Wass. 13 (1870), S. 450; 19 (1876), S. 707; 22 (1879), S. 518; 23 (1880), S. 156, 196, 227, 596. *A. Thiem*, Die Wasserversorgung der Stadt Nürnberg, Leipz. 1879, S. 26. — Siehe auch *N. Cucu St.*, Nouele ape alimentare ale orașului Bucuresci, Bucuresci 1897, S. 28; *Ders.*, Alimentarea cu apa orașului Bacău, Bucuresci 1898, S. 27. *L. Brouhon*, Ann. d. travaux publ. de Belgique, 5 (1900).

Aus Gl. (276a) geht hervor[1]), daß bei gleichzeitiger Beobachtung zweier Punkte

$$z_2^2 - z_1^2 = \frac{Q}{\pi k}(\log \operatorname{nat} R_1 - \log \operatorname{nat} R_2) \tag{276b}$$

sein muß, worin Q, R_1, R_2 und der Höhenunterschied $z_2 - z_1$ leicht meßbar, also falls man auch die Durchlässigkeit k kennt,

$$z_1 + z_2 = \frac{Q}{\pi k} \frac{\log \operatorname{nat} R_1 - \log \operatorname{nat} R_2}{z_1 - z_2} \tag{276c}$$

bestimmbar ist. Aus der errechneten Summe $z_1 + z_2$ und dem gemessenen Unterschied $z_1 - z_2$ geht dann weiter z_1 sowie z_2, also die Lage der undurchlässigen Schicht hervor.

Führt man für das Spiegelgefälle das Zeichen J ein, so nimmt (276) die Form

$$Q = 2\pi k J R z \tag{276d}$$

an, aus der für zwei gleichzeitig beobachtete Punkte

$$J_1 R_1 z_1 = J_2 R_2 z_2 \tag{276e}$$

folgt. Mißt man die Oberflächengefälle J_1, J_2 und die Abstände $R_1 R_2$ von der Brunnenachse, sowie die Höhenunterschiede $z_1 - z_2$, so kann man also bei gleichförmigem Boden und Unabhängigkeit der Durchlässigkeit k von der Geschwindigkeit die Lage der undurchlässigen Schicht, nämlich z_1 oder z_2, durch Aufnahme des Senkungstrichters bestimmen und dann bei bekannter Entnahme Q sogar die Durchlässigkeit k gemäß (276c) berechnen. Die Ausdehnung der Untersuchung auf mehr als zwei Punkte kann sogar Schlüsse auf die Veränderlichkeit der Durchlässigkeit oder der Tiefenlage der undurchlässigen Schicht ermöglichen.

Nicht immer durchführbar ist es, zwei Pumpversuche mit verschiedener Entnahme genügend lange durchzuführen, um in beiden Fällen mit Sicherheit einen stationären Zustand zu erlangen. Ist dies aber möglich, so hat man für denselben in den zwei Fällen, die durch die Kennziffern unterschieden werden mögen,

$$J_1 = \frac{Q_1}{2\pi k h_1 R}, \quad J_2 = \frac{Q_2}{2\pi k h_2 R},$$

daher

$$h_1 - h_2 = \frac{Q_1}{2\pi k R J_1} - \frac{Q_2}{2\pi k R J_2}$$

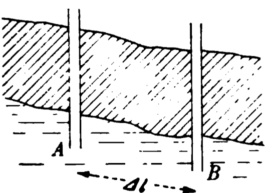
und

$$k = \left(\frac{Q_1}{J_1} - \frac{Q_2}{J_2}\right) : 2\pi R(h_1 - h_2). \tag{276f}$$

1) *G. Thiem*, Hydrologische Methoden, Leipzig 1906, S. 9; Journ. f. Gasb. u. Wass. 56 (1913), S. 228.

Da alle auf der rechten Seite vorkommenden Größen gut meßbar sind, ist es bei Anwendung dieser Formel leicht, die Durchlässigkeit k ohne Kenntnis der Tiefenlage der undurchlässigen Schicht und dann die Tiefenlage selbst zu berechnen.

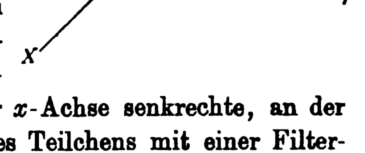
120. Differentialgleichung der stationären Grundwasserbewegung bei räumlicher Behandlung. Wird in ruhendes Grundwasser ein Paar Standröhren bis zu zwei Punkten A und B versenkt, so stellt sich in beiden Standröhren das Wasser gleich hoch ein. Das geschieht nicht, wenn Wasser von A nach B strömt, weil in diesem Falle in der Stromrichtung ein Druckverlust eintritt, für den nach dem Vorhergehenden in nicht zu grobporigem Boden Gl. (264)



$$u = k J$$

gilt. Dabei bedeutet u die Filtergeschwindigkeit oder Wassermenge pro Flächeneinheit in der Zeiteinheit, k die unveränderliche Durchlässigkeit, J das Gefälle oder bei einem Höhenunterschied Δh der Standrohrspiegel den Quotienten $\Delta h : \overline{AB}$. Es kommt eben wie bei der Strömung in Röhren nicht auf die Drücke, sondern auf die Druck*verluste* an. Nach Gl. (264) gilt für die Grundwasserbewegung dasselbe Gesetz wie für die reibungslosen Flüssigkeiten. Wird nämlich ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt, ein Punkt x, y, z angenommen, um ihn herum ein Bodenteilchen von der Ausdehnung dx, dy, dz abgegrenzt, so läßt sich die Ein- und Ausströmung im Parallelepiped berechnen. Im Punkte x, y, z besitzt gemäß (264) das Wasser folgende Filtergeschwindigkeit in der Richtung der drei Achsen

$$u = -k\frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -k\frac{\partial h}{\partial y}, \quad w = -k\frac{\partial h}{\partial z},$$



worin h die Höhe des Spiegels über einer unveränderlichen Gleichenebene bedeutet, den das Wasser in einem Standrohr annehmen würde, wenn man ein solches bis zum jeweilig betrachteten Punkt eintriebe. Dementsprechend tritt das Wasser in die zur x-Achse senkrechte, an der Stelle $x - \frac{1}{2}dx$ gelegenen Seitenfläche des Teilchens mit einer Filtergeschwindigkeit

$$u - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} = k\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{2}\right)$$

ein, während es an der gegenüberliegenden Seitenfläche mit einer Filtergeschwindigkeit

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} = k\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{2}\right)$$

austritt. Da beide Seitenflächen die Größe $dy\,dz$ haben, beträgt der positive oder negative Überschuß des Austrittes über den Eintritt für sie, wie die Subtraktion lehrt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right)(dy\,dz) = k\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Ähnlich bestimmt sich der Überschuß des Austritts über den Eintritt für die beiden anderen Seitenflächenpaare zu

$$k\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\,dx\,dy\,dz \quad \text{und} \quad k\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Da nun der Wasserinhalt des betrachteten Bodenteilchens weder wachsen noch abnehmen kann, muß die Überschußsumme Null ein. Jede Grundwasserbewegung geht also so vor sich, daß stets

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \tag{277}$$

bleibt. Diese Gleichung stimmt, wenn man h als Potentialfunktion betrachtet, mit der Gl. (10) der Bewegung reibungsloser Flüssigkeiten völlig überein. Wenn die Grenzflächen gegeben sind, bewegt sich demnach in feinporigem Boden *Grundwasser in denselben Kurven, die eine reibungslose Flüssigkeit befolgen würde*, senkrecht zu den Flächen, für die h konstant ist. Dabei beträgt, wenn n senkrecht zu den Flächen gleichen Standrohrspiegels gemessen wird, die Filtergeschwindigkeit

$$V = -k\frac{\partial h}{\partial n}\,. \tag{277a}$$

Da bei ihrer Sickerung durch ein Flächenelement dF die Wassermenge $v\,dF$ auf der Wegstrecke ds eine Arbeit $\frac{\gamma}{k}\,v\,ds$ zur Überwindung der Reibung verrichtet, wird die Gesamtheit durch das Raumintegral

$$\frac{\gamma}{k}\iiint v^2\,dF\,ds$$

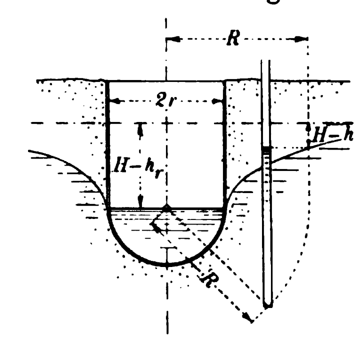
ausgedrückt und ist daher dem Integral der lebendigen Kraft proportional. Aus der eben hervorgehobenen Übereinstimmung der Bewegungskurven von Grundwasser und reibungslosen Flüssigkeiten folgt daher entsprechend dem für letztere von *Lord Kelvin* bewiesenen Gesetze (s. oben S. 20), daß, wenn die Grenzflächen gegeben sind, sich Grundwasser von den Quellen zu den Senken derart bewegt, daß die *Reibungsarbeit ein Minimum* ist. Es folgt weiter, daß auch, wenn man die geringfügige lebendige Kraft fließenden Grundwassers berücksichtigen

wollte, dies bei gegebenen Grenzflächen keine Änderung der berechneten Strömungskurven zur Folge hätte.

121. Einzelbrunnen verschiedener Bauweise. Eine der einfachsten Lösungen von (277) und (277a) stellt der Ausdruck

$$H - h = \frac{Q}{2\pi k R} = \frac{Q}{2\pi k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{278}$$

dar, in der R den Abstand vom Ursprung bedeutet. Hiervon kann man sich leicht überzeugen, indem man die zweiten Differentialquotienten nach den drei Achsenrichtungen bildet und nachsieht, ob deren Summe wirklich Null gibt. Nach (278) sind die Flächen gleichen Standrohrspiegels Kugeln um den Ursprung als Mittelpunkt und strömt das Wasser ihm strahlenförmig zu. Denkt man sich einen Brunnen mit halbkugelförmiger Sohle, so ist der Brunnen das gemeinschaftliche Standrohr sämtlicher Sohlenpunkte, die also alle das gleiche h besitzen. Praktisch läßt sich demnach (278) als die mathematische Darstellung der Zuströmung in einen Brunnen von halbkugelförmiger Sohle deuten, dessen Wandung durch dichtes Gebirge genau bis zur wagrechten Unterfläche der dichten Schicht reicht und dem das Wasser aus unendlichem, gleichförmigem, durchlässigem Untergrund zufließt. Im Unendlichen ist die Geschwindigkeit Null und bleibt der Spiegel nach Beginn des Brunnenbetriebes wie zuvor, während im Brunnen bei einem Brunnenhalbmesser r die Spiegelsenkung



$$H - h_r = \frac{Q}{2\pi k r} \tag{278a}$$

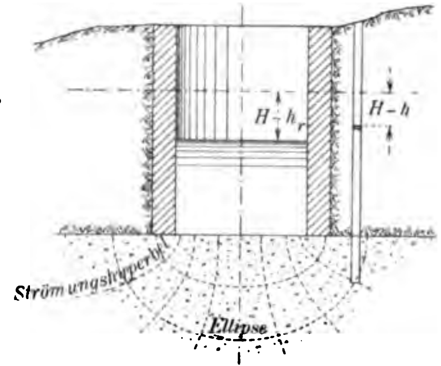
wird. Es bezeichnet H die Höhe des Ruhespiegels über der beliebig gewählten Gleichenebene. Nach (277a) beträgt die Geschwindigkeit

$$-k\frac{\partial h}{\partial R} = \frac{Q}{2\pi R^2} \tag{278b}$$

und da die Halbkugel vom Halbmesser R die Fläche $2\pi R^2$ besitzt, ist Q die in der Zeiteinheit in den Brunnen sickernde Menge oder mit anderen Worten die Menge, die man ihm in der Zeiteinheit entnimmt.

Wenn die Sohle flach statt hohl ist, so muß sich das Wasser durch kleinere Querschnitte drängen, so daß die gleiche Entnahme wie früher einen größeren Druckverlust verursacht. Auch wird die Geschwindigkeit an der Sohle ungleich, in der Mitte am geringsten und am Rande, wo sich die Stromfäden zusammendrängen, theoretisch unendlich groß. Die

Strömungslinien werden hier nämlich wie solche, die bei reibungslosem Austritt durch eine kreisförmige Öffnung entstehen. Diese bilden, wie die betreffenden Untersuchungen[1]) lehren, Hyperbeln, die ihre imaginären Achsen in der Brunnenachse und ihre Brennpunkte auf dem Brunnenrand haben, und ebenda liegen auch die Brennpunkte der Flächen mit gemeinschaftlichem Standrohrspiegel, die sich aus den früheren Kugelflächen in Umdrehungsellipsoide verwandeln. Es zeigt[2]) sich, daß für jedes Ellipsoid der Druckhöhenverlust



$$H - h = \frac{Q}{2\pi k r}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\,\frac{b}{r}\right) \tag{279}$$

beträgt, worin b die lotrechte Halbachse bezeichnet, und hiernach, daß der gesamte Druckverlust

$$H - h_r = \frac{Q}{4kr} \tag{279a}$$

wird. Die durch Gl. (279a) ausgesprochene Proportionalität von Umfang und Ergiebigkeit steht mit Versuchen von *Thévenet*[3]) im Einklang, der aber keine Durchlässigkeitsbestimmung gemacht hatte; Versuche von *Ph. Forchheimer*[4]) bestätigten die Formeln überhaupt.

Reicht die dichte Decke nicht, wie in (278) bis (279) angenommen wurde, bis zum unteren Brunnenrand hinab, oder ist überhaupt keine dichte Decke vorhanden, sondern aller Boden durchlässig, so wird die Zuströmung in den Brunnen etwas erleichtert und daher

$$H - h_r < \frac{Q}{2\pi k r} \quad \text{bzw.} \quad < \frac{Q}{4kr} \tag{279b}$$

sein, aber nicht so sehr, daß die Gleichungen unbenützbar würden. Eine entgegengesetzte Wirkung hat es, wenn die durchlässige Bodenart nicht bis ins Unendliche hinabreicht, sondern auf undurchlässigem Untergrund ruht; aber auch diese Änderung bleibt geringfügig, falls der Abstand der Brunnenschneide vom dichten Untergrund ein Vielfaches des Brunnendurchmessers beträgt.

Führt man statt der lotrechten Halbachse b die wagrechten Halbachsen a der Meridianellipsen ein, so geht (279) in

1) *H. Lamb*, Hydrodynamics, 1895, S. 160; *Lamb*, deutsch von *Friedel*, S. 177.
2) *Ph. Forchheimer*, Z. d. öst. I. u. A.V. 57 (1905), S. 587.
3) Ann. d. ponts et chauss. (6) 7 (1884[1]), S. 200.
4) Z. d. öst. I. u. A.V. 50 (1898), S. 648; 57 (1905), S. 588.

$$H-h=\frac{Q}{2\pi kr}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{r}\right)$$

oder

$$\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{r}=\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi kr}{Q}(H-h)\right)$$

oder

$$\frac{r}{a}=\sin\frac{2\pi kr}{Q}(H-h)$$

oder

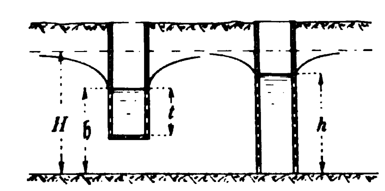
(280) $$H-h=\frac{Q}{2\pi kr}\arcsin\frac{r}{a}$$

über, woraus ersichtlich ist, wie hoch das Wasser in Standröhren steigen würde, die man im Abstande a von der Brunnenachse bis zur Tiefe der Sohlenebene eintreibt. Bei halbkugeliger Sohle wäre nach (278) statt dessen

(280a) $$H-h=\frac{Q}{2\pi kr}\cdot\frac{r}{a},$$

also für kleine Werte von $\frac{r}{a}$ nur wenig verschieden von (280). Das zeigt, daß schon in geringer Entfernung vom Brunnen der Standrohrspiegel von der Sohlenaushöhlung nur mehr wenig abhängt. Der Standrohrspiegel bleibt zugleich, wie schon bemerkt, fast derselbe, wenn die dichte Decke entfällt und er dadurch zum freien Grundwasserspiegel wird.

Für die Erscheinungen in größerer Entfernung von einem Brunnen ist offenbar nur seine Lage und die Entnahme aus ihm von Belang, seine Bauweise aber ohne Einfluß. Wohl aber muß sie in seiner Nachbarschaft ihre Wirkung äußern. Man kann sich demnach bei freiem Grundwasserspiegel und wagrechter undurchlässiger Schicht jede Senkung aus zwei Teilen zusammengesetzt denken, jener, die eintreten würde, wenn der Brunnenschacht mit durchlässigen Wänden auf der undurchlässigen Schicht stände, und der zusätzlichen Senkung, die hinzukommt, wenn der Brunnen nicht so tief reicht. Letztere muß mit ersterer wachsen und zwar fand *Ph. Forchheimer*[1]) durch Versuche für einen nicht bis zur undurchlässigen Schicht reichenden Brunnen mit durchlassender Wandung, aber verschlossener Sohle



(281) $$\frac{H^2-\mathfrak{h}^2}{H^2-h^2}=\sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{t}}\sqrt[4]{\frac{\mathfrak{h}}{2\mathfrak{h}-t}}.$$

Hierin bedeutet H die Höhe des ungesenkten Spiegels, $\mathfrak{h}$ die des gesenkten Spiegels im *seichten* Brunnen, h die des gesenkten Spiegels im

1) Ebenda 50 (1898), S. 645.

hinzugedachten Vergleichsbrunnen, t die Tauchtiefe oder den Wasserstand im Brunnen selbst. Bei offener Sohle hat man bei einem Brunnendurchmesser $2r$ statt dessen

$$\text{(281a)} \qquad \frac{H^2-\mathfrak{h}^2}{H^2-h^2} = \sqrt{\frac{\mathfrak{h}}{t+0{,}5r}}\sqrt[4]{\frac{\mathfrak{h}}{2\mathfrak{h}-t}}.$$

Übrigens müssen die beiden Formeln, die man meist in

$$\text{(281b)} \qquad \frac{H-\mathfrak{h}}{H-h} = \sqrt{\frac{h}{t}}\sqrt[4]{\frac{h}{2h-t}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{h}{t+0{,}5r}}\sqrt[4]{\frac{h}{2h-t}}$$

verwandeln darf, offenbar noch anwendbar bleiben, wenn der durchlässige Teil der Wandung zwar die Höhe t besitzt, aber nicht zu oberst, sondern an beliebiger Stelle des im übrigen dichten Brunnens angeordnet ist.

Taucht eine gelochte Röhre, die als unendlich *dünn* betrachtet werde, t tief in *unendlich tiefes* Grundwasser[1]), dessen Spiegel auch beim Betrieb als wagrecht betrachtet werden dürfe, so werden, wie sich zeigen läßt, die Strömungslinien wieder Hyperbeln, die aber zum Unterschied von jenen des Brunnens mit flacher Sohle ihre Scheitel auf der Brunnenachse und ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt im Spiegel haben. Bezeichnet x den Abstand von der Achse, z die Tiefe unter dem Spiegel, b die reelle Halbachse einer Hyperbel, φ den Winkel zwischen deren Asymptote und der Achse, so lautet die Gleichung der betreffenden Hyperbel

$$\text{(281c)} \qquad -\frac{x^2}{t^2-b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

und gilt zugleich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{t^2-b^2}}{b} \quad \text{oder} \quad \cos\varphi = \frac{b}{t}.$$

Aus einer vom Hyperbelmittelpunkt aus beschriebenen Kugel von unendlich großem Radius R schneidet der Asymptotenkegel vom Winkel φ eine Haube vom Flächeninhalt

$$\text{(281d)} \qquad F = 2\pi R^2(1-\cos\varphi) = 2\pi R^2\left(1-\frac{b}{t}\right)$$

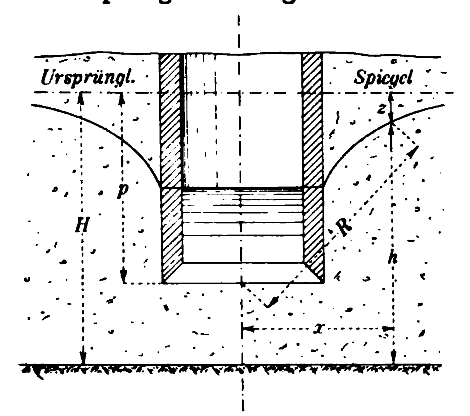
heraus. Das aus dieser Haube stammende Wasser fließt zwischen den Punkten t und b in die Lochröhre. Bei Änderung von F zeigt sich

$$\text{(281e)} \qquad dF = -\frac{2\pi R^2}{t}\,db.$$

Da hiernach auf gleiche Röhrenstücke db gleiche Speiseflächen dF im Unendlichen entfallen, erfolgt die Zusickerung *gleichmäßig* längs der Röhre.

1) Bisher unveröffentlicht.

122. Durchlässigkeitsbestimmung durch Betriebseinstellung: Sümpfung der Baugruben. Es wurde oben zu Gl. (279b) bemerkt, daß schon in geringer Entfernung von einem dichtwandigen Brunnen die Spiegel etwaiger Standrohre nahezu der Gl. (278a) gehorchen, auch wenn keine dichte Decke vorhanden ist, wenn also ein freier zusammenhängender Spiegel alle Standrohre ersetzt. Hat man durch andauernden Betrieb einen stationären Zustand erreicht, so kann man in diesem Falle daher, wenn man unter z die Tiefenlagen der Spiegelpunkte, unter p die Tiefenlage der Brunnenschneide unter dem Ruhespiegel bei Entnahme von Q versteht, nach (278)



$$H - h = z = \frac{Q}{2\pi k\sqrt{x^2 + (p-z)^2}} \tag{282}$$

als die Meridiangleichung des Senkungstrichters ansehen. Es folgt hieraus

$$x^2 + (p-z)^2 = \frac{Q^2}{4\pi^2 k^2 z^2}$$

und für den Inhalt $\int \pi x^2 dz$ des Senkungstrichters der Ausdruck

$$\int \left[\frac{Q^2}{4\pi k^2 z^2} - \pi(p-z)^2\right] dz = -\frac{Q^2}{4\pi k^2 z} - \frac{\pi}{3}(p-z)^3 + \text{konst.}$$

Bei plötzlicher Betriebseinstellung wird dieser Trichter dadurch gefüllt, daß unter der Wirkung des Spiegelgefälles ihm zunächst die frühere Menge Q weiter zufließt, allerdings, wie sich bei späteren Betrachtungen zeigen wird, nur, wenn die undurchlässige Schicht nicht allzutief liegt. Steht daher zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 der Brunnenspiegel z_1 bzw. z_2 über der Schneide, hat die Bodenart das Porenverhältnis μ und beträgt der Schachtaußendurchmesser D, der Innendurchmesser d, so gilt, weil sich auch der Schacht innerhalb des Mauerwerkes füllt,

$$Q(t_2 - t_1) = \frac{\mu Q}{4\pi k^2}\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}\right) - \frac{\mu\pi}{3}\left[(p-z_2)^3 - (p-z_1)^3\right] + \frac{\pi}{4}(d^2 - \mu D^2)(z_1 - z_2), \tag{282a}$$

wonach sich k berechnen läßt[1]).

Bei tief reichenden, nur an der Sohle offenen Röhren, bei welchen die umgebende Spiegelfläche vom Druck an der Brunnensohle kaum

1) *Ph. Forchheimer,* ebenda 57 (1905), S. 590.

mehr abhängt und nicht mehr als Standrohrspiegel der tiefliegenden Wasserfäden aufgefaßt werden kann, verliert der Ausdruck (282a) seine Gültigkeit. Hier hat man, sofern durch den Bau die Bodenbeschaffenheit nicht zu sehr geändert wurde, nach (279a) die Spiegelsenkung im Brunnen

$$H - h_r = \frac{Q}{4kr} \tag{282b}$$

und bei plötzlichem Einstellen kurzdauernden Pumpens, weil das Drangwasser fast gänzlich vom Schacht selbst aufgenommen wird, in der Zeit dt

$$Q\,dt = \pi r^2 dh_r$$

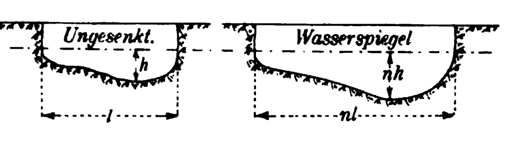
und, wenn man Q nach (282b) ausdrückt,

$$dt = \frac{\pi r}{4k} \frac{dh_r}{H - h_r}.$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn zur Zeit t_1 die Senkung $H - h_1$ und zur Zeit t_2 die Senkung $H - h_2$ beträgt, die Durchlässigkeit

$$k = \frac{\pi r}{4(t_2 - t_1)} \log\text{nat} \frac{H - h_1}{H - h_2}. \tag{283}$$

Eine Betrachtung allgemeiner Natur ist die folgende[1]). Denkt man sich eine kleine Baugrube 1 und eine zweite $n$mal so große Baugrube 2 (wobei nur die Räume unterhalb des ungesenkten Grundwasserspiegels zu beachten sind) und ähnliche Wasserbewegung in beiden Fällen, so entsprechen einander gleiche Gefälle und daher gleiche Geschwindigkeiten. Die Eintrittsflächen von Grube 2 sind nun n^2-mal so groß wie die von Grube 1; es dringt also n^2-mal mehr Wasser in Grube 2 als in 1 ein, wobei aber der Ähnlichkeit wegen auch die Spiegelsenkung in 2 das n-fache von jener in 1 beträgt. Wenn nun aber in der großen Grube nicht die n-fache, sondern die gleiche Senkung h wie in der kleinen herrschen soll, so braucht man aus ihr nur ein n-tel von der eben betrachteten Menge zu schöpfen und sogar noch etwas weniger, wenn zudem die große Baugrube nicht n-mal so tief als die kleine, sondern nur ebenso tief ausgehoben worden ist. Hiernach wächst bei Vergrößerung der Fläche einer Baugrube unter Beibehaltung derselben Form der Wasserzudrang nicht stärker als die Längen. Bei dieser Betrachtung wurde angenommen, daß ein Dauerzustand eingetreten sei, daß man nämlich gerade soviel schöpft, wie hinzufließt. Geht man nun auf



1) *Ph. Forchheimer*, ebenda 57 (1905), S. 591.

den Fall vollkommener Ähnlichkeit, also den einer Senkung nh in Baugrube 2, zurück, so nimmt, weil die Geschwindigkeiten entsprechender Punkte einander gleich werden, während entsprechende Längen im Verhältnis n zueinander stehen, der Spiegel im Gelände 2 erst nach Ablauf einer vom Beginn des Pumpens an gemessenen Zeit nt die Gestalt an, die er im Gelände 1 schon nach der Zeit t besaß. Zur Erreichung einer ähnlichen Form des gesenkten Spiegels ist also in 2 während der n-fachen Zeit fortdauernd n^2-mal soviel Wasser, also ingesamt n^3-mal soviel zu pumpen wie in 1. Bezeichnet man die bis zur Sümpfung der Baugrube 1 insgesamt gehobene Wassermenge mit Q und den Zeitaufwand mit T, so wird die (n-fach tiefere) Baugrube 2 erst nach der Zeit nT und der Wältigung einer Menge $n^3 Q$ bis zur Tiefe nh trocken liegen. Nun sinkt erfahrungsgemäß bei gleichmäßigem Pumpenbetrieb der Spiegel erst schnell und dann immer langsamer. Begnügt man sich daher in der Grube 2 mit einer Senkung h statt nh, so erfordert dies nicht die Hebung von insgesamt $n^3 Q : n = n^2 Q$, sondern weniger (und daher, wenn man trotzdem die Pumpen in der Zeit T die Menge $n^2 Q$ heben läßt, nicht die Zeit $n^2 T$, sondern weniger Zeit). Der frühere Ausspruch muß daher so erweitert werden: um in *ähnlichen Baugruben* die Spiegel unter im übrigen ähnlichen Umständen *in ähnlichen Zeiten gleich* stark zu senken, ist die Hebung von Wassermengen erforderlich, deren *Verhältnis zwischen dem der Längen und dem der Flächen liegt. Nach Eintritt des Dauerzustandes verhalten sich die Zuflüsse wie die Längen.*

123. Die stationäre Parallelströmung. Nimmt man mit *J. Dupuit* an, daß die Filtergeschwindigkeit v nur vom Oberflächengefälle und zwar von der Tangente statt vom Sinus des Neigungswinkels abhänge, so gilt für Grundwasser[1]), das sich nach der y-Richtung über wagrechten, dichten Untergrund bewegt, wenn z die Höhe des Spiegels über diesem und q_0 die Sickermenge in der Zeiteinheit unter einem Geländestreifen von der Breite „Eins" bedeutet,

$$v = k\frac{dz}{dy}, \tag{284}$$

$$q_0 = vz = k\frac{z\,dz}{dy} = \frac{k}{2}\frac{d(z^2)}{dy}. \tag{284a}$$

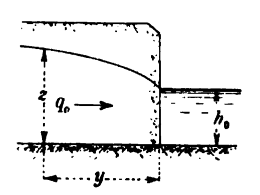
Die Integration liefert, falls an der Stelle $y = 0$ die Tiefe $z = h_0$ werden soll, sofort

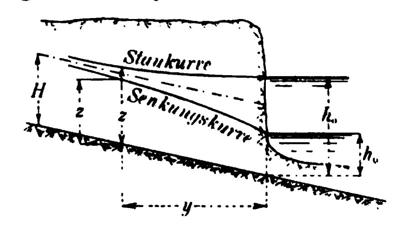
$$z^2 - h_0^2 = \frac{2q_0}{k}y. \tag{285}$$

Dieser Ausdruck stellt den Zulauf eines Grundwasserstromes in ein

1) *J. Dupuit,* Études, 2. éd. 1863, S. 236. Versuche: *J. M. N. Pennink,* Journ. f. Gasb. u. Wass. 50 (1907), S. 69 nach De Ingenieur 1905, Nr. 30.

offenes Gewässer dar, das bis zur undurchlässigen Schicht hinabreicht. Ist das Bett nicht so stark eingetieft, so verläuft allerdings das Gefälle $\frac{dz}{dy}$ in Ufernähe etwas steiler als nach (285), während in einiger Entfernung vom Ufer (285) mit entsprechend größerem h_0 noch anwendbar bleibt.





Ist der Untergrund unter i geneigt statt wagrecht und werden die z von ihm aus gemessen, so hat man an Stelle von Gl. (284)

$$v = k\left(i + \frac{dz}{dy}\right) \tag{286}$$

und daher

$$q_0 = k\left(iz + \frac{z\,dz}{dy}\right)$$

oder

$$i\,dy = \frac{kiz\,dz}{q_0 - kiz} = \frac{q_0\,dz}{q_0 - kiz} - dz$$

oder nach Integration

$$iy = -\frac{q_0}{ki}\log\text{nat}\,(q_0 - kiz) - z + \text{konst.}$$

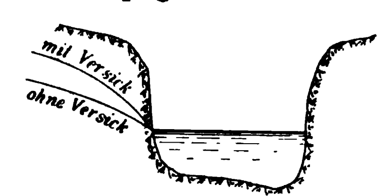
Man kann hier die Höhen h_0 und H an der Mündung ($y = 0$) des Grundwasserstromes und an seinem Ursprung im Unendlichen ($y = \infty$) als gegeben betrachten und erhält dann für die Stau- oder Senkungskurve (entsprechend jenen der offenen Läufe), weil

$$H = \frac{q_0}{ki} \tag{287}$$

sein muß,

$$iy = H\log\text{nat}\frac{H - h_0}{H - z} - (z - h_0). \tag{287a}$$

Außer dem Zufluß kann eine *Versickerung* von der Erdoberfläche her stattfinden, wobei oberhalb des Grundwasserspiegels das Sickerwasser ohne Druck wie in unzähligen offenen Läufen fließt, während unterhalb des Spiegels alle Poren voll sind, also Druck wie in Röhren herrscht. Beträgt an der Stelle $y = 0$ der Zulauf unter den Geländestreifen von der Breite „Eins“ q_0



und versickern von der Flächeneinheit Gelände in der Zeiteinheit q_s, so

vermehrt sich der Durchfluß q auf der Strecke dy um $q_s dy$ und gilt daher bei wagrechter undurchlässiger Schicht

$$dq = d\left(k z \frac{dz}{dy}\right) = q_s dy$$

oder

$$\frac{k}{2} \frac{d^2(z^2)}{dy^2} = q_s$$

oder

(288) $$z^2 = \frac{q_s}{k} y^2 + c_1 y + c_2.$$

Es hat keine Schwierigkeit, wenn z. B. von irgendeiner Stelle y_1 die Wassertiefe z_1 und an einer anderen (oder derselben) y_2 der Durchfluß q_2 gegeben ist, die Konstanten c_1 und c_2 zu berechnen, denn dann gilt

(288a) $$z_1^2 = \frac{q_s}{k} y_1^2 + c_1 y_1 + c_2$$

und zugleich, weil

$$q = \frac{k}{2} \frac{d(z^2)}{dy} = \frac{k}{2}\left(\frac{2 q_s}{k} y + c_1\right)$$

ist,

(288b) $$q_2 = q_s y_2 + \frac{k}{2} c_1.$$

Wenn der *Querschnitt veränderlich* ist, die Strömung also eigentlich nicht mehr in parallelen Lotebenen erfolgt, so können doch meistens die Grundgleichungen

(289) $$v = kJ, \quad Q = vF,$$

worin J das Oberflächengefälle, Q den Durchfluß, F den durchflossenen Querschnitt bezeichnet, noch beibehalten werden. Für eine unter i geneigte scharfkantige Furche in undurchlässigem Untergrund hat man z. B.

(290) $$Q = k\left(i + \frac{dz}{dy}\right) \alpha z^2,$$

worin z die Höhe des Spiegels über dem tiefsten Punkt des betreffenden Querschnittes und α eine von der Neigung der Furchenseiten abhängige unbenannte Zahl bedeutet. Es folgt aus (290)

$$i\,dy = \frac{k i \alpha z^2}{Q - k\alpha i z^2} dz = \frac{Q\,dz}{Q - k\alpha i z^2} - dz,$$

(290a) $$iy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{k\alpha i}} \log\mathrm{nat} \frac{1 + \sqrt{\frac{k\alpha i}{Q}}\, z}{1 - \sqrt{\frac{k\alpha i}{Q}}\, z} - z + \mathrm{konst.}$$

Für eine wagrechte Furche oder $i = 0$ läßt sich übrigens Gl. (290) noch einfacher integrieren.

Den Umstand, daß sich Grundwasser in denselben Kurven wie eine reibungslose Flüssigkeit bewegt, kann man zur Lösung von Aufgaben benutzen, bei welchen das Wasser in parallelen lotrechten Ebenen kongruente Wege zurücklegt. Sind jene Ebenen parallel zur x-Achse, so vereinfacht sich Gl. (277) zu

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0, \tag{291}$$

und so stellt jede Funktion von y und z, welche dieser Differentialgleichung entspricht, eine Grundwasserbewegung der betrachteten Art dar.

Aus der Übereinstimmung mit der reibungslosen Bewegung folgt ferner, weil die Strömung senkrecht zu den Kurven gleichen Standrohrspiegels ($h =$ konst.) vor sich geht, daß diese Kurven und die Strömungslinien ihre Ebene in lauter unendlich kleine Rechtecke zerlegen. Bezeichnet man die Seiten eines solchen Rechtecks längs der Strömung mit dn und quer zu ihr mit ds, so beträgt das Gefälle $\frac{dh}{dn}$ und daher bei der Durchlässigkeit k der Durchfluß durch ein Parallelepiped, welches das Rechteck zur Basis und die Längeneinheit zur (wagrechten) Höhe hat,

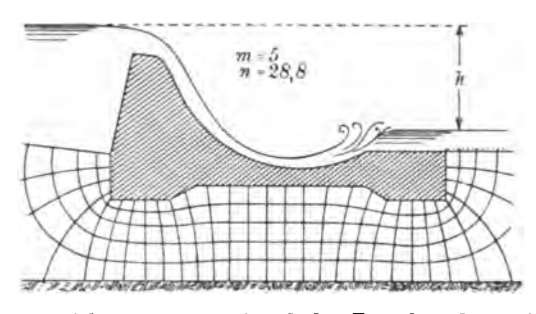
$$dq = k\frac{dh}{dn}ds. \tag{292}$$

Zieht man nur jene Strömungslinien, zwischen welchen gleiche Mengen durchfließen, und nur jene Standrohrlinien, zwischen denen die h gleich groß sind, so ist zufolge Gl. (292), weil auch k konstant ist, für alle Rechtecke das Verhältnis $ds : dn$ dasselbe. Wählt man also dq und dh derart, daß *ein* Rechteck zum Quadrat wird, so geschieht das nämliche mit allen Rechtecken.

Diese Eigenschaft des Kurvennetzes ermöglicht es, das von *Ph. Forchheimer* für Überfälle angegebene Verfahren auch auf Grundwasserfragen zu übertragen[1]). Zur Erläuterung sei ermittelt, wieviel Wasser zwischen einer Felsfläche und einer Wehrgrundmauer, die nicht bis zum Felsen reicht, durchtritt. Man beginnt damit, die Grundmauer, deren Begrenzung eine Strömungslinie bilden muß, mit einer Linie zu umziehen und den Streifen zwischen dieser und der Mauerbegrenzung in (angenäherte) Quadrate zu zerlegen, die demnach untereinander nicht gleiche Seitenlänge besitzen. Nun ist hiermit auch die nächstfolgende Reihe angenäherter Quadrate gegeben, durch die man wieder eine Strömungslinie erhält; wenn man so fortfährt, gelangt man schließlich zu einer Kurve,

1) Geschah durch *Ph. Forchheimer* bei Erstattung eines Gutachtens an das K. Bayerische Staatsministerium für Verkehrsangelegenheiten 1911.

welche im allgemeinen die Felslinie schneiden wird, statt mit ihr zusammenzufallen. Man ändert nun die *allererste* Kurve so lange, bis die *letzte* mit der Felslinie übereinstimmt und kennt nunmehr die Strömung.



Sind nämlich nach der Zeichnung zwischen Wehrsohle und Fels m Strömungsstreifen vorhanden und zwischen der Flußsohle im Ober- und Unterwasser n Quadrate, so beträgt bei einem Höhenunterschied h vom Ober- und Unterwasserspiegel der Druckverlust *eines* Quadrates $h : n$, also bei einer Seitenlänge s eines bestimmten Quadrates das Gefälle daselbst

$$h : ns,$$

wonach durch dieses Quadrat pro senkrecht zur Zeichnung gemessene Längeneinheit in der Zeiteinheit

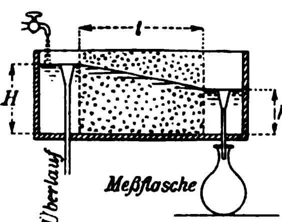
$$k \cdot s \cdot h : ns = kh : n$$

durchfließt. Da nun zwischen Wehr und Fels m Quadrate liegen, beträgt der Gesamtdurchfluß unter der Längeneinheit Wehr das m-fache oder

$$q = mkh : n. \tag{293}$$

Die einfache Abzählung der Quadrate läßt also den Durchfluß erkennen.

Beispiel. Behufs Bestimmung der Durchlässigkeit k hat man eine Bodenprobe zwischen zwei lotrechte Metallgewebe eingefüllt[1] und den Durchfluß tQ in der Zeit t gemessen. Man hat dann nach Gl. (285) bei der Bezeichnungsweise beistehender Figur und der Trogbreite b



$$k = \frac{2l \cdot tQ}{b\,(H + h)(H - h)t}$$

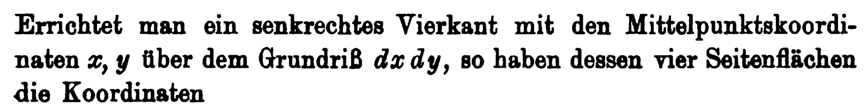
z. B. für $t\;Q = 2000\ \mathrm{cm}^3$, $l = 80$ cm, $b = 40$ cm, $H = 35{,}5$ cm, $h = 31{,}5$ cm, $t = 175$ sec, $k = (2 \cdot 80 \cdot 2000) : (40 \cdot 67 \cdot 4 \cdot 175) = 0{,}171\ \mathrm{cm\ sec}^{-1}$.

124. Differentialgleichung der Höhenkurvenpläne bei stationärer Bewegung. Darf wegen nahezu wagrechtem Verlauf der Stromfäden die Filtergeschwindigkeit $= kJ$ gesetzt werden, wobei k die Durchlässigkeit und J die Tangente des Neigungswinkels des Grundwasserspiegels bezeichnet, so läßt bei wagrechter Lage der undurchlässigen Schicht ein Höhenkurvenplan des Spiegels die Strömung erkennen, weil er sowohl

1) Einen nicht unähnlichen Trog verwendete *Fossa-Mancini*, Ann. d. ponts et chauss. (8) 19 (1890[1]), S. 847.

die Mächtigkeit des durchströmten Bodens als auch das Gefälle angibt. Denkt man sich einen solchen Plan hergestellt und bezieht man ihn auf ein Achsenkreuz, so hat man für die Strömung durch einen senkrechten Streifen von der Breite dy und der mittleren Ordinate z den Ausdruck

$$kJ \cdot z\,dy = k\frac{\partial(z^2)}{\partial x}\,\frac{dy}{2}. \tag{294}$$



Errichtet man ein senkrechtes Vierkant mit den Mittelpunktskoordinaten x, y über dem Grundriß $dx\,dy$, so haben dessen vier Seitenflächen die Koordinaten

$$x - \frac{dx}{2}, \quad x + \frac{dx}{2}, \quad y - \frac{dy}{2} \text{ und } y + \frac{dy}{2}.$$

Durch die erstgenannte Seitenfläche tritt zufolge (294) in der Zeiteinheit die Menge

$$\frac{k}{2}\,dy\left[\frac{\partial(z^2)}{\partial x} - \frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2}\,\frac{dx}{2}\right]$$

aus dem kleinen Vierkant, während durch die zweitgenannte Seitenfläche

$$\frac{k}{2}\,dy\left[\frac{\partial(z^2)}{\partial x} + \frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2}\,\frac{dx}{2}\right]$$

in dasselbe fließt. Der Überschuß des Austritts durch die eine dy-Fläche über dem Eintritt durch die andere beträgt also

$$\frac{k}{2}\,dy\left[\frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2}\,dx\right] = \frac{k}{2}\,\frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2}\,dx\,dy. \tag{294a}$$

Ebenso gilt für den Überschuß der beiden anderen Seitenflächen, wie man bemerkt, wenn man in (294a) x mit y gegenseitig vertauscht,

$$\frac{k}{2}\,\frac{\partial^2(x^2)}{\partial x^2}\,dy\,dx. \tag{294b}$$

Tatsächlich darf aber bei stationärer Strömung der Inhalt des Vierkants sich nicht ändern, muß also der eine Überschuß negativ sein und, wie die Addition von (294a) und (294b) zeigt, die von *Ph. Forchheimer*[1]) abgeleitete *partielle Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(z^2)}{\partial y^2} = 0 \tag{295}$$

gelten.

Sickert außerdem durch die Flächeneinheit der Oberfläche die Menge q_s in der Zeiteinheit hinzu, so empfängt das Vierkant in der Zeiteinheit die Menge

$$q_s\,dx\,dy \tag{295a}$$

1) Zeitschr. d. Archit.- u. Ingen.-Ver. zu Hannover 32 (1886), Sp. 545. — Die Auftragung von z^2 führt auf isothermische Kurvenscharen (s. oben S. 16).

von oben und muß bei stationärem Zustand die Summe der Ausdrücke (294a und b) und (295a) Null oder

(296) $$\frac{k}{2}\frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2(z^2)}{\partial y^2} + q_s = 0$$

sein.

Aus der partiellen Differentialgleichung (295) folgt, daß wenn mehrere Flächen

(297) $$z^2 = f_1(x, y), \quad z^2 = f_2(x, y), \quad z^2 = f_3(x, y), \ldots$$

sie erfüllen, auch die Fläche

(298) $$z^2 = f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) + \cdots$$

dies tut, so daß es leicht ist, für wagrechten Untergrund aus bekannten Grundwasserspiegeln neue abzuleiten. Als solche sind bereits der des einzelnen Schachtbrunnens

(276a) $$z^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} \log\text{nat} \frac{R}{r}$$

und der der einfachen Strömung

(285) $$z^2 - h_0{}^2 = \frac{2q_0}{k} y$$

gegeben worden, die beide, wie man sich durch Differentiation überzeugen kann, der Differentialgleichung (295) genügen.

125. Grundwasserspiegel bei Brunnengruppen. Für Entnahme der Wassermenge Q aus einer Gruppe von n Brunnen, die mit durchlässigen Wänden bis zur undurchlässigen Schicht hinabreichen, folgt bei *gleichmäßiger* Verteilung der Menge Q sofort aus (276a), wenn man die Brunnen durch Kennziffern unterscheidet, also z. B. unter $R_1, R_2, \ldots$ die Abstände eines Punktes von den verschiedenen Brunnenmitten bezeichnet[1]),

(299) $$z^2 - h^2 = \frac{Q}{n\pi k}\left(\log\text{nat} \frac{R_1}{r_1} + \log\text{nat}\frac{R_2}{r_2} + \cdots\right).$$

Für einen Punkt, dessen Abstand R von der beiläufigen Mitte der Brunnengruppe sehr groß ist, geht, weil die Logarithmen großer Zahlen sich viel weniger unterscheiden als diese selbst, Gl. (299) in

(299a) $$z^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} \log\text{nat} \frac{R}{r}$$

über, wobei

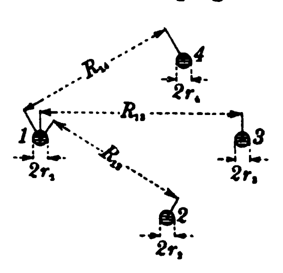
$$n \log\text{nat}\, r = \log\text{nat}\, r_1 + \log\text{nat}\, r_2 + \cdots$$

oder

(299b) $$r = \sqrt[n]{r_1 r_2 r_3 \ldots}$$

1) *Ph. Forchheimer,* ebenda Sp. 547. — Spiegel zwischen Haupt- und Nebenfluß: *C. Cranz,* Journ. f. Gasb. u. Wass. 33 (1890), S. 559.

gesetzt ist. Hieraus geht die Bedeutung von h in Gl. (299) hervor: es ist die Höhe, die der Spiegel in einem Einzelbrunnen vom Halbmesser r annehmen würde, falls man einen solchen statt der Gruppe zur Entnahme von Q benutzen wollte. Im Unendlichen fallen eben die Spiegel (299) und (299a) zusammen. Ist h bekannt, so kann man aus (299) berechnen, welche Höhenlage $h_1, h_2, h_3, \ldots$ der Spiegel in jedem Brunnen annimmt, denn bei durchlässiger Wandung muß sie mit der Höhenlage an den Wandungspunkten übereinstimmen. Für die Wandung des Brunnens 1 ist nun, wenn dessen Abstände von den übrigen $R_{12}, R_{13}, \ldots$ betragen,



$$R_1 = r_1, \quad \text{ferner ungefähr} \quad R_2 = R_{12}, \quad R_3 = R_{13}, \ldots$$

und daher ist genügend genau

$$\text{(299c)} \qquad h_1^2 - h^2 = \frac{Q}{n\pi k}\left(\log\text{nat}\frac{R_{12}}{r_2} + \log\text{nat}\frac{R_{13}}{r_3} + \cdots\right)$$
$$= \frac{Q}{n\pi k}\log\text{nat}\frac{R_{12}R_{13}R_{14}\cdots}{r_2 r_3 r_4\cdots}.$$

Hat man n Brunnen, aus denen man gleich viel pumpt, und zwei Beobachtungsrohre in den Abständen R_{a1}, R_{a2} bzw. $R_{b1}, R_{b2}, \ldots$ von ihnen, so gilt für den Wasserstand im einen Beobachtungsrohr

$$z_a^2 - h^2 = \frac{Q}{n\pi k}[\log\text{nat}(R_{a1}R_{a2}\ldots R_{an}) - \log\text{nat}(r_1 r_2 \ldots r_n)]$$

und eine ähnliche Gleichung für den Wasserstand z_b im anderen, daher weiter[1])

$$\text{(300)} \quad z_a^2 - z_b^2 = \frac{Q}{n\pi k}[\log\text{nat}(R_{a1}R_{a2}\ldots R_{an}) - \log\text{nat}(R_{b1}R_{b2}\ldots R_{bn})].$$

Wenn die Entnahmen aus den Brunnen *nicht* übereinstimmen, sondern sich wie $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 \ldots$ verhalten, denkt sich *Ph. Forchheimer*[2]) die Einzelachsen durch ν_1 bzw. ν_2 bzw. ν_3 usw. Achsen ersetzt und hat

$$z^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k}\frac{\log\text{nat}R_1^{\nu_1}R_2^{\nu_2}R_3^{\nu_3}\cdots - \log\text{nat}r_1^{\nu_1}r_2^{\nu_2}r_3^{\nu_3}\cdots}{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\cdots},$$

daher für den Brunnen 1

$$\text{(301)} \qquad h_1^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k}\frac{\log\text{nat}R_2^{\nu_2}R_3^{\nu_3}\cdots - \log\text{nat}r_2^{\nu_2}r_3^{\nu_3}\cdots}{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\cdots}$$

und für die anderen Brunnen ähnliche Ausdrücke. Sind die Brunnen ge-

1) *W. Kyrieleis*, Über Grundwasserabsenkung bei Fundierungsarbeiten, Diss., Berlin 1911, S. 51. *Ders.*, Grundwasserabsenkung bei Fundierungsarbeiten, Berlin 1913, S. 63.

2) Zeitschr. d. Archit.- u. Ingen.-Ver. zu Hannover 32 (1886), Sp. 551.

kuppelt, nämlich durch Stränge verbunden, so muß $h_1 = h_2 = h_3$ usw. und daher

$$r_1^{\nu_1} R_{12}^{\nu_2} R_{13}^{\nu_3} \cdots = R_{12}^{\nu_1} r_2^{\nu_2} R_{23}^{\nu_3} \cdots = R_{13}^{\nu_1} R_{23}^{\nu_2} r_3^{\nu_3} \cdots$$

sein. Man hat also $n-1$ Gleichungen zur Berechnung von $n-1$ Exponenten ν, nachdem man einen derselben frei gewählt hat, und kann angeben, wieviel Wasser jeder Brunnen liefert und wie sich die gemeinschaftliche Spiegelhöhe einstellt.

Beispiele: 1. Welchen Durchmesser $2R$ müßte man einem Einzelbrunnen von durchlässiger Wandung geben, damit er bei gleicher Gesamtentnahme Q dieselbe Senkung, also denselben Wasserstand h_1 aufweise, wie sechs Röhrenbrunnen vom Halbmesser r_1, die in gleichen Abständen auf einem Kreis vom Durchmesser D liegen? — Für $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots$ wird nach (299) auch $r = r_1$ und daher (299c) zu

$$(1) \quad h_1^2 - h^2 = \frac{Q}{n\pi k} \log\text{nat} \frac{R_{12} R_{13} \cdots}{r^{n-1}},$$

worin h den Wasserstand bedeutet, der in einem Einzelschacht vom Halbmesser r bei der Entnahme Q entstände. Von diesem Schacht stiege der Grundwasserspiegel ringsum nach der Gleichung $z^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} \log\text{nat} \frac{R}{r} = \frac{Q}{n\pi k} \log\text{nat} \frac{R^n}{r^n}$ auf. In einem Einzelschacht vom Halbmesser R hätte man demnach den Wasserstand z und daher gilt, weil $z = h_1$ sein soll,

$$(2) \quad h_1^2 - h^2 = \frac{Q}{n\pi k} \log\text{nat} \frac{R^n}{r^n}.$$

Die Vereinigung von (1) mit (2) liefert $R^n = r R_{12} R_{13} \cdots R_{1n}$ oder

$$R^6 = r D^5 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} r D^5,$$

daher $R = 0{,}757 D \sqrt[6]{r : D}$, also z. B. für $r = 0{,}01 D$, $R = 0{,}351 D$.

2. *W. Kyrieleis*[1]) hatte bei 26 Brunnen, die zur Grundwasserabsenkung bei dem Bau der Schleuse Plötzensee dienten, $Q = 0{,}2\ \text{m}^3\,\text{sec}^{-1}$, die dichte Schicht bei $+16{,}4$, ferner unter anderem für zwei Beobachtungsrohre in metrischem Maß

Stand	z	z^2	$R_1 R_2 \cdots R_n$	$\frac{1}{n} \log R_1 R_2 \cdots R_n$
$+25{,}06$	8,66	75,0	$1{,}535 \cdot 10^{39}$	1,506
$+27{,}08$	10,68	114,0	$1{,}58 \cdot 10^{49}$	1,892

daher, weil $\log\text{nat} = 2{,}302 \log$ ist, nach Gl. (300) auf Grund dieser Beobachtung

$$k = \frac{0{,}2}{\pi} \frac{1{,}892 - 1{,}506}{114{,}0 - 75{,}0} 2{,}302 = 0{,}00145\ \text{m sec}^{-1}.$$

Er verwendete im ganzen zehn Beobachtungsstellen, die er in verschiedener Weise kombinierte und ermittelte für k 27 Werte, von denen er sechs als unbrauchbar ausschaltete; die übriggebliebenen schwankten zwischen 0,0012 und 0,00190 und gaben im Mittel 0,00147.

---

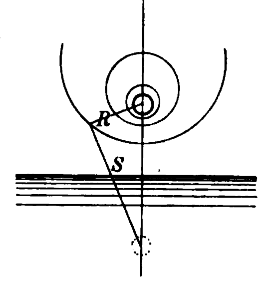
1) Über Grundwasserabsenkung bei Fundierungsarbeiten, S. 93. Weitere Beispiele ebenda und in *W. Kyrieleis*, Grundwasserabsenkung b. Fund., Berlin 1913.

3. Man habe einen Brunnen I von 3 m Weite, aus welchem die Pumpen schöpfen, und zwei mit ihm durch Heber verbundene II und III von je 2 m Durchmesser. Es ist $R_{12} = 35$ m, $R_{13} = 40$ m, $R_{23} = 60$ m. Wie verhalten sich die Wassermengen? Für $\nu_1 = 1$ erhält man $\log 1{,}5 + \nu_2 \log 35 + \nu_3 \log 40 = \log 35 + \nu_2 \log 1 + \nu_3 \log 60 = \log 40 + \nu_2 \log 60 + \nu_3 \log 1$ oder $0{,}176 + 1{,}544\,\nu_2 + 1{,}602\,\nu_3 = 1{,}544 + 1{,}778\,\nu_3 = 1{,}602 + 1{,}778\,\nu_2$ oder $\nu_1 = 1{,}00$, $\nu_2 = 1{,}00$, $\nu_3 = 1{,}03$. Die Brunnen haben also fast gleiche Ergiebigkeit[1]).

Die bisherigen Formeln für die Spiegel eines Einzelschachtes oder einer Gruppe gestatten uns deren gegenseitigen Vergleich, ermöglichen aber nicht die Bestimmung der absoluten Höhen, wenn nur die Anlage und die Entnahme gegeben sind. Erst wenn der Grundwasserspiegel örtlich an eine bestimmte Höhe gebannt erscheint, kann die Einwirkung einer Entnahme selbständig errechnet werden. Das trifft z. B. zu, wenn das Gebiet an einem Fluß liegt. Zur Betrachtung dieses Falles[2]) denke man sich neben einem Brunnen gewöhnlicher Art, der Q liefere, einen solchen von der negativen Entnahme $- Q$, also eine Versitzgrube. So wie der Spiegel sich unweit der Entnahmestelle trichterförmig senkt, erhebt er sich rings um die Versitzgrube, während er an allen Punkten, welche gleichweit von beiden Stellen abstehen, die nämliche Höhe aufweist. Man kann sich dann diese Linie als Uferlinie und auf der Seite, auf der die Versitzgrube lag, einen Fluß statt des trockenen Landes denken. Die nach der Bildungsregel (298) aus (276a) entspringende Gleichung

$$(302) \qquad h_0^2 - z^2 = \frac{Q}{\pi k} \log \operatorname{nat} \frac{S}{R},$$

in welcher R und S die Entfernungen von Brunnen und Versitzgrube bedeuten, entspricht, wie man sich überzeugen kann, dem betrachteten Falle. Sie gibt nämlich kreisförmige Höhenkurven, und zwar rücken die Kreismittelpunkte bei abnehmendem Halbmesser immer näher an die Brunnenachse. Der Senkungstrichter hat am Brunnen eine solche Neigung, daß Q in ihn fließt. Endlich liegt die Symmetrielinie, für die $R = S$ ist, wagrecht und zwar in der Höhe h_0 über der undurchlässigen Schicht, womit h_0 zugleich die Höhe des Flußspiegels über der undurchlässigen Schicht bedeutet.



Reicht das Flußbett nicht bis zu letzterer hinab, so ist allerdings — entsprechend der ähnlichen Abweichung vom Ausdruck (285) — der Spiegel in Ufernähe etwas stärker geneigt als nach Gl. (302).

1) *Ph. Forchheimer*, Zeitschr. d. Archit.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 32, Sp. 552.

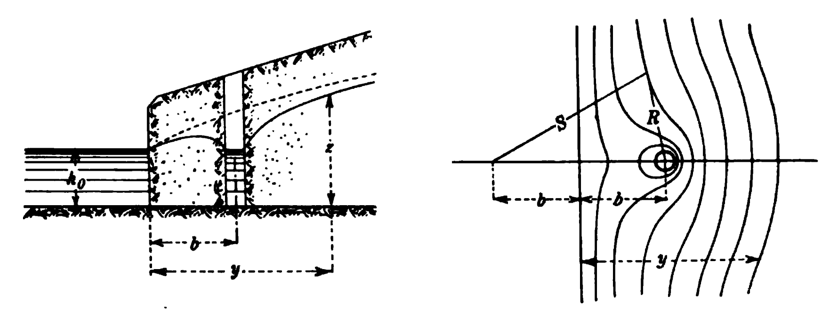
2) *Ph. Forchheimer* im Musterbuch der Friedrich-Wilhelms-Hütte zu Mülheim a. d. Ruhr 1889, S. 71.

Die Zusammenfügung mit (285) verwandelt (302) in

$$z^2 - h_0^2 = \frac{2q_0}{k} y - \frac{Q}{\pi k} \log \operatorname{nat} \frac{S}{R} \tag{303}$$

und hiermit in den Ausdruck für einen Brunnen, dem man Q entnimmt, und der in der Nähe eines Flusses liegt, dessen Längeneinheit ursprünglich einen Binnenzufluß q_0 erhielt. Hat, wenn nicht geschöpft wird, das Grundwasser die Höhe H im Brunnen, das sei in der Entfernung b vom Ufer, so gilt

$$H^2 - h_0^2 = \frac{2q_0 b}{k}, \tag{303a}$$



während zur Betriebszeit bei einem Brunnenhalbmesser r, weil für die Wandungspunkte $R = r$ und $S =$ ungefähr $2b$ ist, für die Brunnenspiegelhöhe h die Beziehung

$$h^2 - h_0^2 = \frac{2q_0 b}{k} - \frac{Q}{\pi k} \log \operatorname{nat} \frac{2b}{r} \tag{303b}$$

zutrifft. Aus H und h geht gegebenenfalls die durch den Betrieb verursachte Senkung $H - h$ hervor.

Nach (303) schneidet eine durch die Brunnenachse senkrecht zum Ufer geführte Ebene den Grundwasserspiegel in der Kurve

$$z^2 - h_0^2 = \frac{2q_0}{k} y - \frac{Q}{\pi k} \log \operatorname{nat} \frac{b+y}{b-y},$$

deren Neigung am Ufer, also für $y = 0$, wie die Differentiation lehrt,

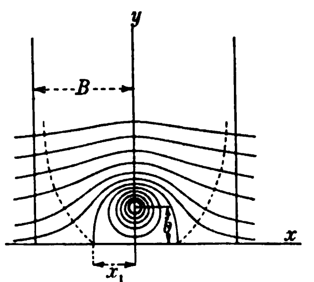
$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=0} = \left(\frac{2q_0}{k} - \frac{Q}{\pi k} \cdot \frac{2}{b}\right) : 2h_0 \tag{303c}$$

beträgt. Nur für

$$Q \lesseqgtr \pi b q_0$$

bleibt $\frac{dz}{dy}$ am ganzen Ufer positiv, während für größere Entnahme Q der Spiegel stellenweise binnenwärts fällt, also Wasser aus dem Fluß sickert und man neben Binnenwasser auch Flußwasser schöpft. Besitzt dann der den Brunnen speisende Streifen im Unendlichen die Breite $2B$,

so bezieht man ein Gemenge aus $2Bq_0$ Binnenwasser und $Q - 2Bq_0$ Flußwasser, und ist, wie *Ph. Forchheimer*[1]) gezeigt hat,



(304)
$$2B = 2\sqrt{b\left(\frac{Q}{\pi q_0} - b\right)} + 2\frac{Q}{\pi q_0}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{\sqrt{b\left(\frac{Q}{\pi q_0} - b\right)}}.$$

Liegt der Brunnen in großer Entfernung vom Fluß, so kann man zu einem Näherungsausdruck gelangen, indem man annimmt, daß die Parabel der Gleichung (285) bis an die Stelle fortlaufe, an der ihre Ordinate Null wird, daß also $h_0 = 0$ sei. Damit setzt man bei einer ursprünglichen Neigung J und Höhe H des Spiegels an der Brunnenstelle den Parabeleigenschaften zufolge

(305)
$$b = \frac{H}{2J}.$$

Zugleich muß die Ergiebigkeit des Grundwasserstromes

$$q_0 = kJH$$

sein. Für die Brunnenwand wird nun in Gl. (303) $z = h$, $h_0 = 0$, $y = b$, $R = r$ und $S = 2b$, so daß sie in

$$h^2 = \frac{2q_0 b}{k} - \frac{Q}{\pi k}\log\operatorname{nat}\frac{2b}{r}$$

oder in

(305a)
$$H^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k}\log\operatorname{nat}\frac{H}{Jr} = \frac{Q}{\pi k}\log\operatorname{nat}\frac{kH^2}{q_0 r}$$

oder, wenn die Senkung $H - h$ gegenüber der ursprünglichen Tiefe H recht klein ist, in

(305b)
$$H - h = \frac{Q}{2\pi k H}\log\operatorname{nat}\frac{kH^2}{q_0 r}$$

übergeht.

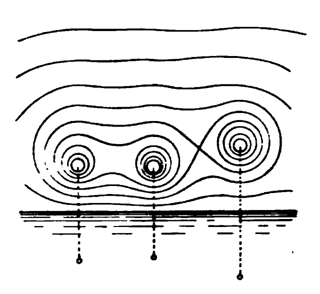
Es ist anzunehmen, daß die Ausdrücke (305a und b) auch noch brauchbar bleiben, wenn an der Brunnenstelle die undurchlässige Schicht nicht wagrecht verläuft, daß sie also allgemein näherungsweise für eine Strömung vom Spiegelgefälle J gelten, falls kein Fluß und keine Schwelle den Spiegel örtlich in bestimmter Höhe festhalten[2]).

Hat man mit *mehreren Brunnen in der Nähe eines Flusses* zu tun, so ist zu jedem derselben ein zweiter negativer hinzuzudenken, der bezüglich des Ufers symmetrisch zu ihm liegt. Bezeichnet man die Ent-

1) Wien, Ber. 117[2a] (1908), S. 1125. Für $Q = \pi b q_0$ wird $B = \pi b$.

2) *Ph. Forchheimer*, Z. d. öst. I. u. A.V. 50 (1898), S. 633.

nahmen mit $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, die Abstände eines Punktes von den Brunnen mit $R_1, R_2, R_3, \ldots$, die von den hinzugedachten Versitzgruben mit S_1, $S_2, S_3, \ldots$ und den Uferabstand mit y, so folgt für den Grundwasserspiegel, wenn sich außerdem eine Binnenströmung mit der Ergiebigkeit q_0 der Längeneinheit ursprünglich senkrecht zum Fluß in ihn ergoß, wie sich einsehen läßt,



$$\pi k(z^2 - h_0^2) = 2\pi q_0 y - Q_1 \log\text{nat}\frac{S_1}{R_1} - Q_2 \log\text{nat}\frac{S_2}{R_2} - \cdots. \tag{306}$$

Auch hier bedeutet z die Erhebung eines beliebigen Spiegelpunktes, h_0 die des Flußspiegels über den dichten wagrechten Untergrund. Für den Wasserstand im Brunnen 1 gibt (306) z. B., weil dieser Wasserstand mit dem betreffenden Wandungspunkte übereinstimmen muß,

$$\pi k(z^2 - h_0^2) = 2\pi q_0 y_1 - Q_1 \log\text{nat}\frac{2y_1}{r_1} - Q_2 \log\text{nat}\frac{S_{12}}{R_{12}} - Q \log\text{nat}\frac{S_{13}}{R_{13}} - \cdots, \tag{306a}$$

wobei y_1 den Abstand des ersten Brunnens vom Ufer, r_1 seinen Halbmesser, $R_{12}, S_{12}, R_{13}, S_{13}, \ldots$ seine Abstände von den übrigen Brunnen und Versitzschächten bedeutet.

126. Grundwasserspiegel bei einer unendlichen Brunnenreihe. Auf eine unendliche Reihe von Brunnen, die im Abstande b von einem Flußufer liegt, führt bei unveränderter Bedeutung aller Zeichen, der Ansatz[1])

$$z^2 - h_0^2 = \frac{Q}{2\pi k}\log\text{nat}\frac{\mathfrak{Cof}\frac{\pi(y-b)}{a} - \cos\frac{\pi x}{a}}{\mathfrak{Cof}\frac{\pi(y+b)}{a} - \cos\frac{\pi x}{a}} + \frac{2q_0}{k}y. \tag{307}$$

In der Tat erfüllen die Logarithmen des Zählers und des Nenners des variablen Bruches sowie $\frac{2q_0}{k}y$ die partielle Differentialgleichung (295), wovon man sich überzeugen kann, indem man zuerst an Stelle des Zählerlogarithmus, dann an Stelle des Nennerlogarithmus

$$\zeta = \log\text{nat}(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\xi)$$

setzt, denn dann hat man

---

1) *Ph. Forchheimer,* Wien, Ber. 117[2a] (1908), S. 1117; Journ. f. Gasb. u. Wass. 53 (1910), S. 1067.

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \frac{\sin\xi}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\xi}, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2} = \frac{\cos\xi\,\mathfrak{Cof}\,\eta - 1}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\xi)^2},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\xi}, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2} = \frac{1 - \cos\xi\,\mathfrak{Cof}\,\eta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\xi)^2},$$

also, wie verlangt,

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2} = 0.$$

Ferner kehren für Werte von x, die sich um $2a$, $4a$ usw. unterscheiden, die gleichen Spiegelhöhen z wieder und wird für x nahezu $= 0$ und y nahezu $= b$ näherungsweise

$$\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi(y-b)}{a} - \cos\frac{\pi x}{a} = 1 + \frac{\pi^2(y-b)^2}{2a^2} - 1 + \frac{\pi^2x^2}{2a^2} = \frac{\pi^2[x^2 + (y-b)^2]}{2a^2}.$$

Bezeichnet man also den kleinen Abstand $\sqrt{x^2 + (y-b)^2}$ mit r, so zeigt sich für die Brunnennachbarschaft

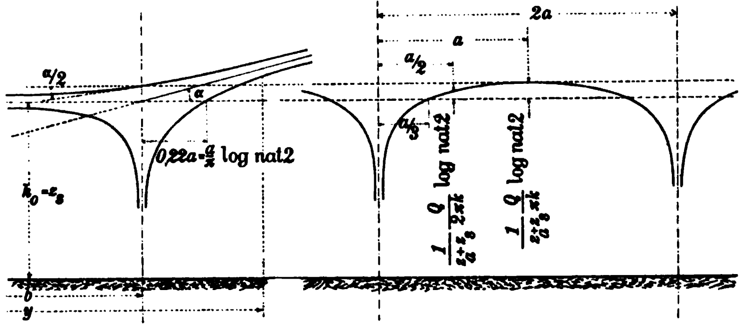
$$z^2 - h^2 = \frac{Q}{2\pi k}\log\text{nat}\frac{\pi^2r^2}{2a^2\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi b}{a} - 1\right)}$$

und

$$2z\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{Q}{\pi k}\frac{1}{r},$$

wonach der Spiegel um die Achse $x = 0$, $y = b$ einen Trichter bildet, unter dem die Menge

$$k \cdot 2\pi r \cdot z\frac{\partial z}{\partial r} = Q$$



zur Achse strömt, welcher Vorgang bei $y = b$ für $x = 2a$, $4a$ usw. wiederkehrt. Hiermit ist es klar, daß wie behauptet die Gl. (307) den durch eine unendliche Brunnenreihe hervorgerufenen Spiegel angibt. Die Grundwasserfäden treffen das Ufer rechtwinklig mit der Neigung $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dabei ist nach (307)

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{Q}{2ka}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi(y-b)}{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi(y-b)}{a} - \cos\frac{\pi x}{a}} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi(y+b)}{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi(y+b)}{a} - \cos\frac{\pi x}{a}}\right] + \frac{2q_0}{k}$$

oder für $x = y = 0$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{ka}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi b}{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi b}{a} - 1} + \frac{2q_0}{k}.$$

Wenn selbst hier an der der Brunnenachse ($x = 0$, $y = b$) nächsten Stelle des Ufers der Spiegel binnenwärts ansteigt, wenn also

$$\text{(307a)} \qquad 2aq_0 > Q\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi b}{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi b}{a} - 1} \quad \text{oder} \quad > Q\,\mathfrak{Tang}\,\frac{\pi b}{2a}$$

ist, empfängt der Brunnen nur Binnenwasser. Für einen lotrechten Schnitt $y = b$ durch die Reihe verwandelt sich (307) in

$$\text{(307b)} \qquad z^2 - h_0^2 = \frac{Q}{2\pi k}\log\text{nat}\,\frac{1 - \cos\frac{\pi x}{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi b}{a} - \cos\frac{\pi x}{a}} + \frac{2q_0 b}{k}$$

und hieraus folgt, daß wenn $b \gtreqless a$ ist und x eine kurze Strecke r bildet, $z^2 - h_0^2$ angenähert zu

$$z_r^2 - h_0^2 = \frac{Q}{2\pi k}\log\text{nat}\,\frac{\frac{\pi^2 r^2}{2a^2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi b}{a}}} + \frac{2q_0 b}{k}$$

oder zu

$$\text{(307c)} \qquad z_r^2 - h_0^2 = -\frac{Q}{\pi k}\left(\frac{\pi b}{a} + \log\text{nat}\,\frac{a}{\pi r}\right) + \frac{2q_0 b}{k}$$

wird, während man für $x = a$, also in der Mitte zweier Brunnen, wo $z = z_a$ sein möge,

$$z_a^2 - h_0^2 = \frac{Q}{2\pi k}\log\text{nat}\,\frac{2}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi b}{a} + 1} + \frac{2q_0 b}{k}$$

oder angenähert

$$\text{(307d)} \qquad z_a^2 - h_0^2 = -\frac{Q}{\pi k}\left(\frac{\pi b}{a} - \log\text{nat}\,2\right) + \frac{2q_0 b}{k}$$

hat. Wenn man statt durch die Brunnenreihe durch einen Schlitz dieselbe Menge beziehen würde, so müßte man der Längeneinheit Schlitz $Q : 2a$ entnehmen, und dann würde für die Spiegelhöhe z_s im Schlitz, weil $q_0 - \frac{Q}{2a}$ vom Schlitz zum Fluß läuft, nach Gl. (285)

$$\text{(307e)} \qquad h_0^2 - z_s^2 = \frac{1}{k}\,\frac{Qb}{a} - \frac{2q_0 b}{k}$$

gelten. Aus (307c bis e) folgt sofort, daß durch die Auflösung des Schlitzes in Einzelbrunnen seine ursprünglich wagrechte Spiegellinie

in den Brunnen vom Halbmesser r gesenkt und in den Streckenmitten gehoben wird und daß für den Schlitzspiegel

$$(308)\quad \begin{cases} \text{die Senkung in den Brunnen } z_s - z_r = \dfrac{1}{z_r + z_s}\dfrac{Q}{\pi k}\log\text{nat}\dfrac{a}{\pi r} \\ \text{die Hebung in den Mitten } \quad z_a - z_s = \dfrac{1}{z_a + z_s}\dfrac{Q}{\pi k}\log\text{nat}\,2 \end{cases}$$

beträgt, während ungefähr in den Abständen $\frac{a}{3}$ von den Brunnenachsen, wie sich zeigen läßt, z_s als Höhe bleibt. Falls genau der Binnenzufluß geschöpft wird (siehe die Figur auf S. 457), wird $z_s = h_0$.

Hierzu sei noch bemerkt, daß allgemein bei Wassergewinnung aus einem als unendlich lang betrachteten Schlitz die Höhe z_s seines Spiegels *nur von der Wassermenge abhängt, die von ihm weiterläuft, und von den Boden- und Wasserverhältnissen stromab vom Schlitz*, ferner, daß die Ausdrücke (308) für die Spiegelveränderung auch anwendbar sind, wenn der Schlitz nicht in der Nähe eines Flusses liegt.

Beispiel. In 15 m tiefes Grundwasser will man in je 45 m Abstand und in 200 m Entfernung von einem Fluß eine lange Reihe Brunnen von 0,4 m Durchmesser ($r = 0{,}2$) eintreiben, die an der Sohle und längs 4,6 m ihrer Höhe durchlässig sein sollen. Die Durchlässigkeit betrage 0,3 cm sec^{-1} = 0,003 m sec^{-1}, das Spiegelgefälle des Grundwassers zwischen der Brunnenlinie und dem Ufer 0,002, die in Aussicht genommene Entnahme Q aus jedem Brunnen 3,1 l sec^{-1} = 0,0031 m^3 sec^{-1}. Welche Senkung wird der Spiegel in den Brunnen erfahren? — Nach diesen Daten liegt der Flußspiegel 0,4 m unter dem Grundwasserspiegel der Reihenlinie und beträgt der Durchfluß unter 1 m Geländestreifen 0,003 · 0,002 · 15 = 0,000 09 m^3 sec^{-1}. Hiervon will man 0,0031 : 45 = 0,000 069 m^3 sec^{-1} entnehmen, so daß nur 0,000 021 m^3 sec^{-1} weiterfließen. Bei 15 m Tiefe erfordert dies ein Gefälle von 0,000 021 : (0,003 · 15) = 0,000 47. Später wird daher der Spiegel vom Ufer zum „Schlitz" nur um 0,000 47 · 200 = 0,09 m ansteigen, die Senkung im Schlitz also 0,40 — 0,09 = 0,31 m und dessen Wasserstand 15 — 0,31 = 14,69 m betragen. Bei Auflösung des Schlitzes in Einzelbrunnen kommt nach (308), weil z_r kaum von z_s abweicht, eine Senkung

$$\frac{1}{2 \cdot 14{,}69}\,\frac{0{,}0031}{\pi \cdot 0{,}003}\log\text{nat}\frac{22{,}5}{\pi \cdot 0{,}2} = 0{,}0112 \log\text{nat}\,35{,}8 = 0{,}040\text{ m}$$

hinzu. Gingen die Brunnen mit durchlässiger Wandung bis zum dichten Untergrund, so wäre die Senkung in ihnen also 0,31 + 0,04 = 0,35 m, ihr Wasserstand 15 — 0,35 = 14,65 m.

Würde nur *ein* Brunnen mit bis zum dichten Untergrund reichender durchlässiger Wandung vorhanden sein, aus dem man 0,0031 m^3 sec^{-1} schöpft, so würde für seinen Wasserstand z_1 nach Gl. (303b)

$$z_1^2 - h_0^2 = \frac{2 q_0 b}{k} - \frac{Q}{\pi k}\log\text{nat}\frac{2b}{r}$$

oder für die Senkung

$$H - z_1 = \frac{1}{H + z_1}\,\frac{Q}{\pi k}\log\text{nat}\frac{2b}{r}$$

gelten oder im vorliegenden Fall genau genug

$$H - z_1 = \frac{1}{30} \cdot \frac{0{,}0031}{\pi \cdot 0{,}003} \log \text{nat} \frac{400}{0{,}2} = 0{,}083 \text{ m}.$$

Von den 0,35 m Senkung eines Brunnens der Reihe entfallen also 0,083 m auf die Wirkung der Entnahme aus ihm selbst und 0,27 m auf die der Entnahme aus den übrigen Brunnen. Letztere 0,27 m bleiben ungeändert, wie auch der betrachtete Brunnen gebaut sein mag, die 0,083 m aber wachsen, wenn man die durchlässige Höhe von ungefähr 15 — 0,27 = 14,73 m auf $t = 4{,}6$ m beschränkt. Nach Formel (281 b) hat man dann mit H nunmehr = 14,73

$$\frac{14{,}73 - \mathfrak{h}}{0{,}083} = \sqrt{\frac{14{,}65}{4{,}7}} \sqrt[4]{\frac{14{,}65}{30 - 4{,}6}} \quad \text{oder} \quad 14{,}73 - \mathfrak{h} = 0{,}131.$$

Durch die Seichtheit des Brunnens nimmt also die Senkung um 0,13 — 0,08 = 0,05 m zu, so daß sich die *Gesamtsenkung* = 0,35 + 0,05 = 0,40 m findet.

127. Grundwasserspiegel bei einem Schlitz. Bisher war nur von Höhenkurvenplänen die Rede, die auf Entnahme durch Brunnen führten. Als Beispiel[1]) einer Gleichung, welche die Entnahme durch einen Schlitz darstellt, sei in Kürze

$$(309) \qquad z^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} \log \text{nat} \frac{r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - f^2}}{4r}$$

genannt. In ihr bedeutet z die Spiegelhöhe eines beliebigen Punktes über der wagrechten undurchlässigen Schicht, Q die Entnahme, f die Schlitzlänge, r_1 und r_2 die Abstände des Punktes von den Schlitzenden, h den Wasserstand, den die Entnahme Q in einem Einzelbrunnen vom Halbmesser r hervorrufen würde. Der Ausdruck (309) setzt also wieder eine gleichmäßige Speisung ringsum oder eigentlich eine runde Insel voraus. Alle Höhenkurven sind nach (309) Ellipsen mit ihren gemeinschaftlichen Brennpunkten an den Schlitzenden und die Strömungslinien sind Hyperbeln, die ebenda ihre Brennpunkte haben. Der Schlitz selbst ist auch eine Höhenkurve mit der Spiegelhöhe z_s und

$$(309\text{a}) \qquad z_s^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} \log \text{nat} \frac{f}{4r},$$

und dies lehrt, daß der Schlitz von der Länge f bei gleicher Senkung soviel liefert, wie ein Brunnen vom Durchmesser $\frac{1}{2}f$.

Erstreckt sich ein Entwässergraben fast ohne Gefälle von $x = 0$, $y = 0$ nach der positiven x-Richtung unendlich weit, und sickert das Wasser von der Oberfläche zu, so entsteht[2]), wie hier ohne Beweis gesagt sei, gemäß Gl. (296) ein Grundwasserspiegel

$$(309\text{b}) \qquad z^2 - h^2 = \frac{1}{k} \left(2 q_1 \sqrt{r + y} - q_2 y^2\right),$$

wobei h die Spiegelhöhe im Graben, r den Abstand vom Ursprung und q_1 den Zulauf zwischen $x = 0$ und $x = 1$ bedeutet und die Dimension (Länge)$^{5/2}$ (Zeit)$^{-1}$ besitzt.

1) *Ph. Forchheimer,* Zeitsch. d. Arch.- u. Ingen.-Ver. zu Hannover 32 (1886), Sp. 553.

2) Bisher unveröffentlicht.

128. Mit der Zeit veränderliche Parallelströmung. Wieder sei unter Parallelströmung eine in parallelen lotrechten Ebenen übereinstimmend vor sich gehende Bewegung verstanden. Bezeichnet q die Sickerung zwischen zweien dieser Lotebenen, die im Abstande 1 voneinander stehen, so ist, wenn die Tangente der Spiegelneigung als maßgebend für die Geschwindigkeiten betrachtet werden darf, also bei geringer Sohlenneigung i und Spiegelneigung $i - \frac{\partial z}{\partial x}$,

$$q = kz\left(i - \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

worin z die Mächtigkeit des Grundwasserstromes bezeichnet. Ist die Bewegung nicht stationär, so erfährt auf der Strecke dx der Durchfluß q bei gleichförmiger Bodenbeschaffenheit eine Änderung

$$dq = k\left[i\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]dx. \tag{310}$$

Dieser Unterschied dq muß eine Änderung des Wasserinhaltes der Säule von der Grundfläche $1 \cdot dx$ bewirken und da dieser bei einem Porenverhältnis μ in der Zeiteinheit $\mu\frac{\partial z}{\partial t}$ beträgt, folgt, daß

$$\mu\frac{\partial z}{\partial t} = -k\left[i\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] \tag{310a}$$

ist. Wenn nun das Spiegelgefälle gegenüber dem Sohlengefälle vernachlässigbar ist und sich zugleich z wenig von einem Mittelwert H entfernt, kann statt dessen

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{k}{\mu}\left[i\frac{\partial z}{\partial x} - H\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] \tag{310b}$$

geschrieben werden. Eine der vielen möglichen Lösungen[1]) dieser Differentialgleichung lautet, wie man sich durch Differentiation überzeugen kann,

$$z = -M^{-\frac{k}{\mu}\frac{4\pi^2}{S^2}Ht}\cos\frac{2\pi}{S}\left(x - \frac{ki}{\mu}t - N\right), \tag{310c}$$

worin M, N und S konstante Größen sind. Für $x = 0$ wird bei dieser Lösung

$$z = -M^{-\frac{k}{\mu}\frac{4\pi^2}{S^2}Ht}\cos\frac{2\pi}{S}\left(\frac{ki}{\mu}t + N\right), \tag{310d}$$

wonach der Spiegel an der Stelle $x = 0$ in den Zeiträumen $\frac{\mu S}{ik}$ auf- und abschwingt. Diese Schwingungen wandern mit der Schnelligkeit $\frac{ki}{\mu}$ unter fortgesetzter Verflachung vorwärts, derart, daß zu beliebiger Zeit der

1) *J. Boussinesq*, Eaux courantes, S. 258.

Spiegel Wellungen von der Länge S bildet. Wenn also der Wasserstand in einem offenen Gewässer Schwankungen nach der Gl. (310d) vollzieht, pflanzen sich diese unterirdisch nach dem Ausdruck (310c) fort.

Ist bei geringer Tiefe die Sohle wagrecht, also $i = 0$, ferner wieder k und μ unveränderlich, so vereinfacht sich Gl. (310a) zu

$$\mu \frac{\partial z}{\partial t} = k\left[(z')^2 + z\frac{\partial z'}{\partial x}\right] = k\frac{\partial (z z')}{\partial x}. \tag{311}$$

Dort, wo die angenommene wagrechte Sohle die Erdoberfläche schneidet, tritt das Grundwasser als Quelle zu Tage und *J. Boussinesq* hat sich die Frage vorgelegt, unter welchen Umständen diese Quelle ein *régime* besitzt. Das ist der Fall, wenn die Ergiebigkeitskurven aller Trockenzeiten zusammenfallen, so daß man bei Kenntnis der Ergiebigkeit in einem bestimmten Zeitpunkte voraussagen kann, wieviel die Quelle nach einer beliebigen Frist noch liefern wird, wenn sie inzwischen keine neuen Zuflüsse erhält. *E. Maillet*[1]) hat auf die praktische Bedeutung des régimes aufmerksam gemacht und auch für einige bestehende Quellen die einheitlichen Ergiebigkeitskurven ermittelt.

Boussinesq verlangt nun, daß, nachdem die Zusickerungen aufgehört haben, sich alle Tiefen z des Ausdruckes (311) proportional ändern, also jedes z das Produkt aus einer Funktion des Ortes und einer Funktion der Zeit sei, so daß

$$-\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha z$$

(worin α für alle Punkte gleich groß) und hiernach

$$-\mu\alpha z = k\frac{\partial (z z')}{\partial x}$$

oder

$$-\mu\alpha z^2\, dz = k\frac{\partial (z z')}{\partial x} z\, dz = k \cdot z z' \cdot d(z z') \tag{312}$$

gelte. Die Integration von (312) liefert, wenn für $x = L$ der Spiegel seine Scheitellinie, also $z' = 0$ hat, wie das der Fall ist, wenn in der Entfernung L von der Quellinie (für die $x = 0$) kein Wasser zufließt:

$$\frac{1}{3}\mu\alpha(z_{max}^3 - z^3) = \frac{k}{2}(z z')^2$$

und

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{\mu\alpha}}\int_0^z \frac{z\, dz}{\sqrt{z_{max}^3 - z^3}}$$

1) Paris, C. R. 134 (1902), S. 1103; *E. Maillet*, Essais d'hydraulique souterraine et fluviale, Paris 1903, S. 21 f.

oder

$$L = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k z_{max}}{\mu\alpha}} \int_0^1 \frac{\frac{z}{z_{max}}\, d\frac{z}{z_{max}}}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{z_{max}}\right)^3}},$$

welche Beziehung *nur* zutrifft, falls[1]), wie *Boussinesq* zeigt,

$$\sqrt{\frac{2\mu\alpha L^2}{3k z_{max}}} = 0{,}862 \tag{312a}$$

ist. Für einen entsprechenden Zeitanfang wird dann

$$z_{max} = 0{,}896 \frac{\mu L^2}{kt}$$

und nimmt die Ergiebigkeit der Quellen proportional $\frac{1}{t^2}$ ab. Der Genannte beweist weiter, daß die Schar der der Zeit nach aufeinanderfolgenden Spiegellinien, für welche (312a) zutrifft, sehr ausharrt, daß nämlich, wenn (z. B. durch Regen) eine Kurve entsteht, die von einer Kurve der Schar etwas abweicht, die Abweichungen sich proportional t^{-15} verändern, also rasch verschwinden[2]).

Er wiederholt seine Betrachtungen für *gekrümmte Sohlenlinien*, deren Höhen (oder auch Tiefen) über (bezw. unter) einer durch die Quelle gelegten wagrechten Gleichenebene, den z der Spiegelkurve proportional sind, und findet, daß sich hier die Spiegelordinaten im Laufe der Zeit proportional

$$\frac{\varkappa e^{-\varkappa t}}{\varkappa - e^{-\varkappa t}} \tag{313}$$

ändern, wobei die Zahl $\varkappa$ die Stärke der Einbauchung zum Ausdruck bringt, ferner, daß Abweichungen von einer Scharkurve bei konkaver Sohle mit $e^{-12\varkappa t}$ verschwinden, daß endlich Quellen proportional mit

$$\left(\frac{\varkappa}{1-e^{-\varkappa t}}\right)^2 \cdot e^{-\varkappa t}$$

versiegen[3]).

Umständliche Betrachtungen über das Versiegen stellte *E. Maillet*[4]) an und fand beispielsweise, daß über einer parabolischen Sohle mit den nach oben positiven Ordinaten

$$z_0 = a + bx - cx^2 \tag{314}$$

---

1) Journ. de math. (5) 10 (1904), S. 25.

2) Ebenda S. 38. 3) Ebenda S. 10, 46, 61.

4) Essais d'hydraulique, S. 49. Einige Versiegekurven ermittelte *E. Fischer*, Studio delle sorgenti di Serino, Napoli 1918.

während der trockenen Jahreszeit die Spiegelordinaten

$$(314a) \qquad z = a + bx - cx^2 + Ae^{-2\frac{k}{\mu}ct}$$

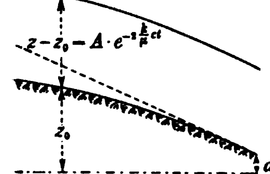
seien und daher die Strömungsmenge der Breiteneinheit Grundwasserstrom

$$(315) \qquad q = k(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x} = Ak(b - 2cx)e^{-2\frac{k}{\mu}ct}$$

betrage, wobei a, b, c und A konstante Werte haben. Die Richtigkeit der Ansätze geht ohne weiteres daraus hervor, daß sie die Forderung der Kontinuität

$$(315a) \qquad \mu\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}\left(= -2Akce^{-2\frac{k}{\mu}ct}\right)$$

erfüllen. Nach (314a) vermindern sich alle z beim Versiegen in jedem Zeitteilchen um gleiche Stücke



$$2\frac{Akc}{\mu}e^{-2\frac{k}{\mu}ct}dt$$

und daher tun sie es auch in endlichen Zeitintervallen. Da ferner gleichförmig zusickernde Regenwässer alle z gleich viel vergrößern, bestehen alle Änderungen des Spiegels in seiner Hebung oder Senkung.

Steigt die Sohle von der Austrittstelle stark an und ist der Grundwasserstrom seicht, so weicht dessen Spiegelgefälle wenig von $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ ab, so daß

$$(316) \qquad q = k(z - z_0)\frac{\partial z_0}{\partial x}$$

und näherungsweise die Kontinuitätsforderung (315a) zu

$$\mu\frac{\partial z}{\partial t} = k(z - z_0)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2},$$

daher nach (316)

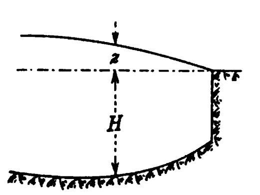
$$(316a) \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = k\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{k^2}{\mu}(z - z_0)\frac{\partial z_0}{\partial x}\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}$$

wird. Hiernach vermehrt oder vermindert sich q überall, also auch, wo das Wasser zutage tritt, je nachdem $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \gtrless 0$, das heißt die Sohle konkav oder konvex ist[1]). Gleichmäßig versickernder Niederschlag ändert in (316) nur die Wassertiefen $z - z_0$, nicht aber die Gefälle $\frac{\partial z}{\partial x}$, und verursacht daher eine plötzliche Zunahme des Ausflusses, der hierauf je nach der Sohlenform weiter wächst oder sofort abnimmt[2]). Ist die Sohle

1) Ebenda S 76. 2) Ebenda S. 83.

im oberen Teil konvex, im unteren konkav, so nimmt der Ausfluß erst zu, dann, weil die Speisung von oben nicht ausreicht, wieder ab[1]). Der Wert dieser Untersuchungen wird dadurch beeinträchtigt, daß sie eine überall gleiche Breite des Grundwasserstromes voraussetzen.

129. Mit der Zeit veränderliche Bewegung im Raume. Die Betrachtung, die zur Gl. (310) der veränderlichen Parallelströmung führte, kann ohne Schwierigkeit in allgemeiner Fassung wiederholt werden. Angenommen sei eine gekrümmte Sohle in den Tiefen H unter einer Gleichenebene, über welche der Spiegel sich mit den Höhen z erhebe, eine wechselnde Durchlässigkeit k und geringe Spiegel- und Sohlenneigung, so daß die Geschwindigkeiten, welche nahezu wagrecht sein sollen, nur von der Tangente des Neigungswinkels des Spiegels abhängen. Die Kontinuitätsforderung liefert dann bei einem Porenverhältnis μ die Beziehung[2])



$$\mu \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(H+z)\frac{\partial z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(H+z)\frac{\partial z}{\partial y}\right]. \tag{317}$$

Dieser Ausdruck läßt sich, wenn die Erhebungen z gegenüber den Tiefen sehr klein bleiben, zu

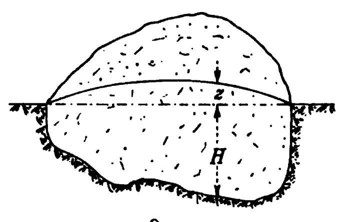
$$\mu \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[kH\frac{\partial z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[kH\frac{\partial z}{\partial y}\right] \tag{318}$$

vereinfachen, wonach die Veränderung der Spiegelhöhe um so langsamer erfolgt, je kleiner das Spiegelgefälle ist.

Die Beziehung (318) kann man auf Grundwasser anwenden, das in der Gleiche $z = 0$ durch Quellen überläuft. Man kann sie nämlich zu

$$\mu \frac{\partial z}{\partial t} = kH\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial(kH)}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial(kH)}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} \tag{318a}$$

entwickeln, und hier sind kH, $\frac{\partial(kH)}{\partial x}$, $\frac{\partial(kH)}{\partial y}$ zwar vom Ort, nicht aber von der Zeit abhängig. Wenn sich also alle z einer Oberfläche proportional verändern, so ändern sich auch die $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ im gleichen Verhältnis und demnach, wie (318a) zeigt, auch die $\mu\frac{\partial z}{\partial t}$. Man hat also $\mu\frac{\partial z}{\partial t}$ proportional z und das ist mit den Konstanten c_1 und c_2 für



$$z = c_1 e^{\pm c_2 t} \tag{318b}$$

1) Ebenda S. 87.

2) *J. Boussinesq,* Journ. de math. (5) 10 (1904), S. 14.

der Fall. Mit den Höhen ε sind aber die Gefälle, mit diesen die Geschwindigkeiten, mit letzteren an den Quellpunkten die Ausflüsse proportional, so daß die Ergiebigkeiten der Quellen, wenn sie nicht durch neue Niederschläge gespeist werden, nach dem Gesetze[1])

$$Q = Ae^{-\alpha t} \tag{319}$$

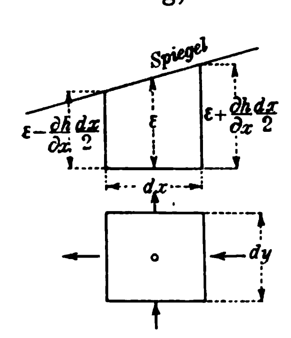
abnehmen, worin A und α Konstante bedeuten.

Wenn jedoch zu den Zeiten t_1, t_2 usw. Regenfälle den Spiegel um η_1, η_2 usw. heben, so nähert sich der Abfluß asymptotisch der Größe

$$Q = Ae^{-\alpha t} + B(\eta_1^{-\alpha(t-t_1)} + \eta_2^{-\alpha(t-t_2)} + \cdots), \tag{319a}$$

worin B wieder eine Konstante bedeutet[2]).

Die Gleichung (317) bezog sich auf nahezu wagrechte Geschwindigkeiten, wie sie bei geringer Spiegel- und Sohlenneigung auftreten, wenn die Bewegung nur wenig von der stationären abweicht. Hat man zwar geringe Spiegel- und Sohlenneigungen, und daher geringe Spiegelkrümmung, aber doch steilere Bewegungen, wie das z. B. geschehen könnte, wenn eine das Grundwasser abschließende Decke plötzlich durchlässig würde, oder wenn man plötzlich bei sehr großer Tiefe den Betrieb von Brunnen einstellen ließe, so führt dagegen die Betrachtung eines an den Spiegel reichenden Säulenelementes von der kleinen mittleren Höhe ε und der Grundfläche $dx\,dy$ zu einer anderen Beziehung.



Wenn h die Spiegelhöhe und φ die Standrohrspiegelhöhe über einer Gleiche bedeutet, beträgt die Geschwindigkeit in der x-Richtung der absoluten Größe nach $k\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Da nun die senkrecht zur x-Richtung stehenden Seitenflächen des Elementes $\varepsilon \pm \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{2}$ hoch sind, beträgt der Überschuß des Einlaufes in der x-Richtung über den Auslauf

$$\frac{\partial h}{\partial x} dx\,dy \cdot k\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

während man senkrecht zur x-Richtung den Überschuß

$$\frac{\partial h}{\partial y} dx\,dy \cdot k\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

1) *Ders.*, Paris, C. R. 137 (1903), S. 5; Journ. de math. (5) 10 (1904), S. 17.

2) *Ders.*, Journ. de math. (5) 10 (1904), S. 20. *E. Fischer* schloß aus den Versiegekurven der Quellen von Serino, Studio (1913), S. 30f., welcher Teil des Ausflusses nach Regenfällen aus dem Vorrat stammt, und ermittelte so den Zusammenhang zwischen Regen und Abfluß.

hat. In der z-Richtung kann nur von unten Wasser zu- oder abfließen und zwar, wenn man die z von unten nach oben mißt, in der Menge

$$- dx\,dy \cdot k \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Da nun das aufwärts wachsende Element in der Zeit bei einem Porenverhältnis μ seinen Wasserinhalt um $\mu \frac{\partial h}{\partial t} dx\,dy$ vermehrt, folgt aus der Raumbedingung

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = k\left(- \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \tag{320}$$

welcher Ausdruck für flache Neigungen $\frac{\partial h}{\partial x}$ und $\frac{\partial h}{\partial y}$ und geringe wagrechte Geschwindigkeitskomponenten $k\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $k\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sich zu

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = -k \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

abkürzt. Hierfür kann an der Oberfläche, weil sie zugleich den Standrohrspiegel ihrer Punkte bildet,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{321}$$

geschrieben werden, wonach für die Oberfläche

$$\varphi = F\left(x, y, z - \frac{k}{\mu} t\right) \tag{321a}$$

gilt, nämlich φ eine Funktion von x, y und $z - \frac{k}{\mu} t$ ist. Die Oberflächenpunkte, die zur Zeit Null

$$\varphi = h = F(x, y, z)$$

hatten, rücken also mit der Schnelligkeit $k : \mu$ aufwärts. *Boussinesq*[1]) führt nun aus, daß in unendlich tiefem Grundwasser letztere Beziehung auch für die übrige Masse gilt und daß die Bewegung dadurch aufhört, daß die Oberflächenteilchen die Ebene des Ruhespiegels erreichen[2]).

XVI. Einwirkung des Wassers auf das Flußbett oder den Meeresgrund.

130. Die Geschiebeabnutzung. Bisher wurde nur die mannigfache Bewegungsweise des Wassers der Betrachtung unterzogen, das Gefäß oder Bett, welche diese Bewegung veranlaßt, aber als gegeben angesehen, nunmehr soll im Gegenteil die Untersuchung auf die mechanische[3]) Wirkung ausgedehnt werden, welche das Wasser unter Umständen auf

1) Journ. de math. (5) 10 (1904), S. 368.
2) Ebenda S. 390. Durch ein Versehen steht daselbst $\mu : k$ statt $k : \mu$.
3) Die chemische Wirkung wird also nicht in Betracht gezogen.

seine Wandung ausübt. Es handelt sich hierbei um jene natürlichen Wasserläufe, welche nicht in feste Fels- oder Tonbetten eingezwängt sind, sondern ein bewegliches Bett besitzen, dessen mehr oder weniger losen Bestandteile sie selbst bei ihrem Laufe aufhöhen, abtragen und verändern. Diese losen Bestandteile können in zwei Klassen gesondert werden, in harte Körner, wie Sand, Kiesel, Blöcke, welche mit dem einheitlichen Namen Geschiebe[1]) bezeichnet werden, und in weiche, mehr zusammenhängende lehmige Massen, die den Namen Schlick, Schlamm oder Silt[2]) führen.

Die Geschiebe stammen aus dem Felsgebirge des Flußgebietes, sei es unmittelbar, sei es, nachdem sie vorher noch in Schichten abgelagert wurden, über deren Entstehung die Geologie Auskunft gibt. Wie dem auch im besonderen Falle sei, so ist den Geschieben *eine* Eigenschaft gemeinsam: sie werden im großen ganzen von den Quellen nach den Mündungen hin kleiner. Diese Erscheinung ist vielfach durch die andere Erscheinung erklärt worden, daß das Flußgefälle stromab abzunehmen pflegt, so daß die Strömung nicht imstande sei, die größeren Geschiebe so weit fortzuschaffen wie die feineren. Für die Ursache der Gefällabnahme bleiben aber die Anhänger dieser Theorie die Antwort schuldig. Der Erklärung kann daher nicht zugestimmt werden: Ursache und Wirkung erscheinen bei ihr vertauscht. Nicht die Gefällsabnahme, sondern die Größenabnahme der Geschiebe ist die primäre Erscheinung und erstere — wie sich noch zeigen wird — eine Folge der letzteren. Die Geschiebeabnahme aber erklärt sich ungezwungen durch den Abrieb, welchen die Geschiebe auf ihrem Wege erdulden und der sich auch darin äußert, daß die Geschiebe um so runder werden, je weiter sie gewandert sind[3]). Selbst die petrographische Beschaffenheit bietet für die Tatsächlichkeit des Abriebes einen Beleg, indem — wenn keine neuen anderweitigen Zufuhren stattfinden — das Geschiebegemenge auf seinem Wege immer quarzreicher wird. Neben dem Abrieb findet unter Umständen auch ein Zerschlagen der Steine statt, wie man dies z. B. an schieferigen Bruchstücken am Rhein in Vorarlberg beobachten kann, aber dieses Zerschlagen ist im langsam fließenden Strome eine Ausnahme. Anders in den Gebirgswässern, so daß z. B. *E. Fugger* und *K. Kastner* auf Grund umfassender Geschiebe-

1) *R. Hoernes* empfiehlt in den Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt 1911, S. 267 das Wort Geschiebe nur auf die Steine in Wasserläufen, das Wort Geröllе nur auf die des Meeres anzuwenden.

2) Letzteren in England gebräuchlichen Namen bevorzugt *E. Sueß*, Boden der Stadt Wien, Wien 1862, S. 86.

3) Wo die kleinsten Sandkörner eckiger als die größeren sind, kommt das nach *Hübbe*, Z. f. Bauw. 11 (1861), Sp. 25 daher, daß sie schwebend, letztere aber rollend gefördert wurden.

untersuchungen erklären konnten, daß die Verkleinerung der Schottersteine beim Transporte von den Quellen der Salzach und ihrer Nebenflüsse bis hinaus in die Ebene weniger durch Abreiben als durch Zertrümmerung der Rollsteine geschehe[1]). Während so die Körner immer kleiner werden, bewirkt das abgeriebene Gestein selbst nur eine Trübung des Wassers, denn aus ihm und den tonigen Stoffen des Geländes bildet sich erwähnter Schlick, der an ruhigen Stellen, auf dem Grunde der Binnenseen und namentlich im Unterlauf und an den Mündungen im Meer zur Ablagerung gelangt. Wie im einzelnen der Abrieb erfolgt, ist nicht leicht zu sagen; denn die Steine werden kaum auf ihrer Unterlage geschoben[2]); wie später geschildert werden wird, kann ihre Bewegung eher ein Rollen oder Hüpfen sein. Ja, sie legen bei Hochwasser oft größere Strecken schwebend im Wasser zurück. Dabei schlagen sie aber aneinander und bei starker Strömung sogar mit Heftigkeit. So geschieht es bei Verwendung von Woltmannflügeln zur Feststellung von Hochwasserdurchflüssen, wobei freilich die Vorrichtung durch ein Seil gehalten wird, häufig, daß die Schraubenflügel durch auftreffende Steine verbogen werden. Es ist offenbar schwer, für die angedeuteten verschiedenen Abnützungsweisen den richtigen mathematischen Ausdruck zu finden; immerhin erscheint es statthaft, die Arbeit, die zur Fortschaffung eines Geschiebestückes nötig ist, einerseits dem Produkte aus seinem Gewichte und seinem Wege, andererseits seiner Abnutzung proportional anzunehmen und hiermit der Auffassung *H. Sternbergs* beizupflichten.

Derselbe[3]) nimmt nämlich an, daß wenn ein Geschiebstück stromab getrieben wird, der Wasserstoß den Reibungswiderstand φP nur unbedeutend übertrifft und dieser dem Gewichte P des Geschiebestückes proportional ist, ferner, daß Proportionalität zwischen der Verkleinerung des Stückes und dem Produkt aus dem Reibungswiderstande und der Wegelänge herrscht. Das Korngewicht P verringere sich also fortwährend, wenn die Flußlänge x stromauf gemessen wird, nach dem Gesetze

$$(322) \qquad dP = c_1 \varphi P\, dx \quad \text{oder} \quad P = P_0 e^{c_1 \varphi x},$$

---

1) Beilage zu Mitteilungen der k. k. geografisch. Gesellsch. 38 (1895) = Donau-Studien, 3. Abhandl., S. 143.

2) *E. Sueß* nimmt im „Boden der Stadt Wien", S. 65 an, daß der Belvedere-Schotter seine keilförmige Zuschärfung der einen Seite durch das Schieben erhalten habe. Die wesentliche Ursache ist aber wohl in der petrographischen Beschaffenheit zu suchen.

3) Z. f. Bauw. 25 (1875), Sp. 483 u. f. Der von *Sternberg* geteilten Auffassung hat bereits, jedoch ohne Rechnung *D. Guglielmini* (lebte 1655—1710) Ausdruck gegeben: Raccolta d'autori italiani 2 (Bologna 1822), S. 342: della linea cadente dei fiumi che corrono in ghiara, opusculo inedito.

worin c_1 eine Konstante und P_0 das Geschiebegewicht an der Stelle $x = 0$ bedeutet. Eine gewisse Kontrolle, wie weit diese Formel Zutrauen verdient, gestatten Messungen, die *F. von Hochenburger* an der Mur vornahm. Das Geschiebe nahm daselbst auf 120 km Länge von Graz nach Mauth-Eichdorf regelmäßig an Größe ab, und die Abnahmekurve zeigt, wie *W. Heyne*[1]) fand, eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit Gl. (322), so wie nachstehende Zusammenstellung der gemessenen Größen der mittleren Geschiebe[2]) mit den von *Heyne* unter Annahme eines günstigen Wertes von c_1 berechneten Größen zeigt:

	km:	0	10	26	56	71	83	101	120
cm^3	gemessen:	224	184	132	81	60	50	33	21
	berechnet:	224	183,4	133,2	73,2	55,0	42,7	29,8	20,4

Für den Exponenten $c_1\varphi$ gilt für die Strecke Graz-Untermauthdorf nach diesen Zahlen (also für x in km und $P : P_0$ als Verhältnis)

$$c_1\varphi = \frac{1}{x}\log\text{nat}\frac{P}{P_0} = \frac{\log\text{nat}\,(224:21)}{120} = 0{,}0181\ \text{km}^{-1}.$$

Nimmt man statt der mittleren Stücke die größten, die *von Hochenburger* auffand, so hat man statt dessen

$$c_1\varphi = \frac{\log\text{nat}\,(2300:50)}{120} = 0{,}0319\ \text{km}^{-1}.$$

Am Rhein fand *H. Sternberg*[3]), auf Grund der im Kubikfuß enthaltenen Stückzahl, je nachdem er diese Zahlen kombinierte, für $c_1\varphi$ Werte, die zwischen 0,008 und 0,025 km^{-1} lagen.

Es ist von Interesse, diese Abnahmen mit den Abnutzungen zu vergleichen, die Steine in mechanischen Verrichtungen[4]) erleiden. *G. A. Daubrée* ließ eckige Bruchstücke in einer Trommel umlaufen; zunächst nutzten sich dieselben sehr rasch ab, indem die Kanten abgeschliffen wurden, so daß die Granitbrocken 40 Prozent ihres Gewichtes verloren, nachdem sie 25 km zurückgelegt hatten, später aber nach erlangter Rundung büßten sie nur mehr 0,1 bis 0,4 Prozent ihres Gewichtes auf einem km ein, $c_1\varphi$ war also 0,001 bis 0,004 km^{-1}. Er fand ferner bei

	Eckig. Feldspat	Rundem Feldspat	Obsidian	Serpentin	Feuerstein
$c_1\varphi =$	0,003	0,002	0,003	0,003	0,0002 km^{-1}

E. Erdmann ließ Fragmente in einem gepflasterten Trog schaukeln und fand für eckige bzw. runde Stücke bei 6,88 km bzw. weiteren 13,54 km Weg für

1) Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 11 (1886), S. 251.

2) *F. v. Hochenburger,* Über Geschiebebewegung und Eintiefung fließender Gewässer 55, Leipzig 1886, S. 162.

3) Z. f. Bauw. 1875, Sp. 495. *Sternbergs* λ ist $= c_1\varphi : 3000$.

4) *A. Penck,* Morphologie der Erdoberfläche, 1. Teil, Stuttgart 1894, S. 293.

	Granit	Orthoceras-Kalkstein	Körnigen Kalkstein	Kambrischen Sandstein	Rhätischen Sandstein	Tonschiefer
$c_1\varphi =$	0,003	0,0129	0,0092	0,0072	0,00585	0,00159 km^{-1}
$c_1\varphi =$	0,0042	0,0183	0,0143	0,0075	0,00738	0,00316 km^{-1}

Daß hier die eckigen Stücke sich weniger als die runden abnutzen, läßt vermuten, daß sie sich sanfter bewegten, und macht es begreiflich, daß *Erdmanns* Zahlen sowie übrigens auch die *Daubrées* kleiner als die in Flüssen erhobenen sind.

E. Fugger und *K. Kastner*[1]) ermittelten durch ausgedehnte Messungen, daß das Verhältnis der Verluste der verschiedenen Steingruppen zu dem Verlust der Kalkstücke auf der 36,5 km langen Salzachstrecke Laufen-Ach das folgende ist:

Granit, Gneis, Weißstein, Feldspat, Amphibolit, Serpentin, Augit, Diorit, Magnetit, Granat, Hornstein	0,4
Glimmerschiefer, Grünschiefer, Amphibolschiefer, Chloritschiefer, Werfener Sandstein	0,5
Quarze, Werfener Schiefer	0,7
Mergel und Sandsteine des Flysch, Neocomsandstein	0,8
Urkalk, mesozoische Kalke	1
Phyllite	1,7
Mesozoische Dolomite, Silurkalk	2,5

Sie überzeugten sich auch, daß die Gesteine im fließenden Wasser, sei es durch Löslichkeit, sei es durch seinen Stoß, an Gewicht verlieren und schätzten den Gewichtsverlust des Schotters auf mehr als 0,0001 für je 1000 m³ fließendes Wassers[2]).

131. Beziehung zwischen Geschiebegröße und Geschwindigkeit. Es ist oben (s. Gl. (242)) angegeben worden, daß der Widerstand einer Kugel vom Halbmesser a gegen ihre Verschiebung durch strömendes Wasser von der Geschwindigkeit v seit *Newton* durch $\zeta\pi\gamma a^2 \frac{v^2}{2g}$ ausgedrückt wird, wobei *J. A. Eytelwein* $\zeta = 0{,}79$ bestimmte. Denkt man sich den Widerstand durch die Reibung auf der Unterfläche geleistet, so hat man bei einem Eigengewichte γ_1 der Kugel und einer Reibungsziffer φ, wenn u_s die Sohlengeschwindigkeit bezeichnet,

$$\varphi(\gamma_1 - \gamma)\frac{4}{3}\pi a^3 = \zeta\pi\gamma a^2 \frac{u_s^2}{2g},$$

womit sich

$$(323) \qquad u_s^2 = \frac{8g}{3}\frac{\varphi(\gamma_1-\gamma)}{\zeta\gamma}a \quad \left(\text{oder } = 33{,}1\frac{\gamma_1-\gamma}{\gamma}\varphi a \text{ mit } \zeta = 0{,}79\right)$$

ergibt. Auch für die ellipsoidischen Geschiebe muß die Sohlengeschwindigkeit, welche sie in Bewegung bringt, der Quadratwurzel ihrer Längendimensionen oder bei einem Geschiebegewichte P im Wasser der Größe

1) Donau-Studien, 3. Abh., 1895, S. 47, 136. 2) Ebenda S. 141.

$P^{1/6}$ proportional sein. Bei Einführung einer Konstante φ_1 würde also für einander ähnliches Gerölle

$$u_s = \varphi_1 P^{1/6} \tag{324}$$

gelten. Dies hat zuerst *A. Brahms*[1]) ausgesprochen, dann *W. Airy*[2]) wiederholt, und *H. Law*[3]) hat hierzu bemerkt, daß diese Proportionalität sich auch ergibt, wenn der Stein nicht geschoben, sondern gekippt oder gerollt wird. Ganz unveränderlich wird, wie *G. Y. Wisner*[4]) hervorhebt, in (324) φ_1 allerdings nicht sein, da die Ablenkung der Wasserfäden ein wenig vom Querschnitt des Wasserlaufes abhängt.

Betrachtet man mit *H. Sternberg*[5]) $2a$ als den Durchmesser des Mittelkreises der einander ähnlich gedachten Umdrehungsellipsoide, so kann man (324) auch in der Form

$$u_s = \zeta_1 \sqrt{2a} \tag{324a}$$

schreiben, in welchen u_s in $\mathrm{m\,sec^{-1}}$ und $2a$ in m ausgedrückt werden möge.

Die ersten einschlägigen Versuche nahm *L. G. du Buat*[6]) vor, welcher die Geschwindigkeiten zu ermitteln trachtete, bei welchen die verschiedenen Stoffe eben noch widerstanden. Er fand

u_s	Töpferton	Grober Sand	Kiesel aus der Seine: von Anisgröße	Kiesel aus der Seine: von Bohnengröße oder größer	Kiesel aus der Seine: von der Größe klein. Saubohnen	Meereskies von 2,7 cm Dmr. oder mehr	Eckige Feuersteine von Hühnereigröße
	Eigengewicht in $\mathrm{g\,cm^{-3}}$						
$\mathrm{cm\,sec^{-1}}$	2,64	3,36	2,545	2,545	2,545	2,614	2,250
120	Bewegung	Bewegung	Bewegung	Bewegung	Bewegung	Bewegung	Bewegung
75	"	"	"	"	"	"	Gleichgw.
65	"	"	"	"	"	Gleichgw.	Ruhe
47	"	"	"	"	"	Ruhe	"
32,5	"	"	"	"	Gleichgw.	"	"
21,6	"	Gleichgw.	"	"	Ruhe	"	"
18,9	"	Ruhe	"	Gleichgw.	"	"	"
15,6	Ablagerung des feinen Sandes	"	"	Ruhe	"	"	"
10,8		"	Gleichgw.	"	"	"	"
8,1	Gleichgw.	"	Ruhe	"	"	"	"

1) Anfangsgründe der Deich- u. Wasserbaukunst, Aurich 1753, S. 108.
2) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 23 (1834), S. 227; 82 (1885), S. 25.
3) Ebenda 82 (1885), S. 29.
4) Am. Soc. Civ. Eng. Trans. 36 (1897), S. 338.
5) Z. f. Bauw. 25 (1875), Sp. 485.
6) Principes d'hydraulique 2, Paris 1816, S. 94, 95.

Nach *Th. Telford*[1]) werden bei 0,203 m sec^{-1} Geschwindigkeit Körner von Feuersteingröße gehoben, bei 0,61 m sec^{-1} Geschiebe von 2,5 cm Dmr. fortgerollt und bei 0,91 m sec^{-1} eckige Steine von Hühnereigröße weggefegt. (Mit $u_s = 0{,}61$ und $2a = 0{,}025$ erhält man $\zeta_1 = 3{,}86$.)

Nach *F. A. Umpfenbach*[2]) enthält das Bett kleinerer Flüsse bei den Geschwindigkeiten u_0 an der Oberfläche (und entsprechend kleinerem u_s) folgende Stoffe (für welche *Sternberg* $2a$ schätzt und hiernach ζ_1 berechnet):

Korngröße	u_0 m sec^{-1}	Nach *Sternberg*	
		$2a$ (in m)	ζ_1 (in m$^{1/2}$ sec^{-1})
Kies von 0,026 m Durchmesser . . .	0,942	0,026	3,50
„ „ 0,052 „ „ . . .	1,569	0,052	4,08
Steine von 0,00515 m³ Inhalt . . .	2,197	0,170	3,20
„ „ 0,0309 „ „ . . .	3,138	0,309	3,39
„ „ 0,0618 „ „ . . .	4,708	0,390	4,52

Nach *Funk* ist für Granitgerölle von 0,048 bis 0,06 m Dicke die Oberflächengeschwindigkeit = 1,74 m sec^{-1}, wonach hier *Sternberg* $\zeta_1 = 4{,}75$ bis $4{,}24$ m$^{1/2}$sec^{-1} schätzt. Überhaupt aber kommt *Sternberg* zur Ansicht, daß im Mittel

$$u_s = 4\sqrt{2a} \tag{324b}$$

sei.

F. Redtenbacher[3]) sagt, es dürfe, damit das Grundbett nicht aufgewühlt werde, die Geschwindigkeit in m sec^{-1} am Grunde folgende Werte nicht überschreiten:

Aufgelöste Erde	Fetter Ton	Sand	Kiesel	Runde Kiesel
0,076	0,152	0,305	0,609	0,914

Eckige Kiesel	Konglomerat	Geschichteter Fels	Ungeschichteter Fels
1,22	1,52	1,83	3,05

Sainjon[4]) maß in der Loire sowohl die mittlere Geschwindigkeit U als auch jene u_s an der Sohle, bei welcher die Bewegung begann, und fand für die

Kieseldmr. cm	0,25	1	4	10	17	38	67
u_s cm sec^{-1}	25	50	100	150	200	300	400
U cm sec^{-1}	36	70	143	214	286	429	521

1) *J. Rickman*, Life of Thomas Telford, London 1838, S. 675.

2) Theorie des Neubaues, der Herstellung u. Unterhaltung der Kunststraße, Berlin 1830, S. 5.

3) Resultate f. d. Maschinenbau, 2. Aufl. 1852, S. 123.

4) Mitgeteilt von *Partiot* in Ann. d. ponts et chauss. (5) 1 (1871[1]), S. 261.

wonach, wenn man den Durchmesser als $2a$ auffaßt, $\zeta_1 = 4{,}7$ bis $5{,}0$ $m^{1/2} sec^{-1}$ herauskommt.

Nach *T. E. Blackwell*[1]), welcher Versuche in Hinblick auf die Spülung von Abwasserkanälen machte, verhalten sich Geschiebe wie in der Tabelle auf S. 475 angegeben ist.

Eine Nachrechnung zeigt, daß bei den *Blackwell*schen Versuchen mit Kalkstein, Feuerstein und Granit $u_s : \sqrt{2a}$ etwa von 4,6 bis zum kleinen Wert 2,7 sank, der sich durch die Glätte der Sohle erklärt.

Im Jahre 1874 maß *Suchier*[2]) im Oberrhein bei Alt-Breisach 5 cm über der Sohle die Geschwindigkeiten und beobachtete hierbei nachstehende Erscheinungen:

	Geschwindigkeit: m sec^{-1}
Sohle beschlickt; selbst bei Aufrühren wandern die kleinsten Kiesel nicht	0,694
Sohle beschlickt, nach Aufrühren wandern Geschiebe bis zu Erbsengröße	0,784
bis zu Bohnengröße	0,897
bis zu Haselnußgröße	0,923
bis zu Wallnußgröße	1,062
bis zu Taubeneigröße	1,123
Grenze des beschlickten Grundes; die kleinsten Kiesel bewegen sich freiwillig	1,180
Sohle blank mit vereinzelten beschlickten Steinen. Freiwillige Bewegung von Erbsen- bis Haselnußgröße	1,247
Knisterndes Geräusch durch gegenseitige Reibung	1,3
Es laufen Geschiebe bis zu Wallnußgröße und nach Aufrühren solche bis zu 250 g	1,476
Manche große Steine laufen	1,589
Sohle noch mit den großen beschlickten Steinen besät. Bewegung gut hörbar, im allgemeinen auf Geschiebe bis Taubeneigröße beschränkt	1,628
Noch liegen große beschlickte Steine von durchschnittlich 2 kg. Bewegung meist bis Hühnereigröße, doch ausnahmsweise bis zu 1,5 kg	1,717
Es liegen vereinzelte beschlickte Steine von 2,5 kg; solche unter 2,5 kg laufen bereits	1,800
Alles ist in Bewegung, starkes Geräusch	2,063

L. Franzius[3]) machte die Erfahrung, daß die mittleren Geschwindigkeiten U, welche merkliche Bewegungen veranlassen, sind bei

feinem Sand oder Schlamm	0,5 m sec^{-1}
Mauersand	1 „
gebundenem, tonigem oder sehr grobem Sand	1,5 „
grobem Kies oder festem Klai	2 „

Sonstige Angaben machten *J. D. Forbes*[4]), *B. Luini*[5]) u. a. m.

---

1) Zitiert v. *A. Penck,* Morphologie 1, Stuttgart 1894, S. 281 nach *Beardmore,* Manual of Hydrology, London 1872, S. 7.

2) Deutsche Bauztg. 17 (1883), S. 332.

3) Handbuch der Baukunde, Abt. 3, Heft 2, Wasserbau, Berlin 1890, S. 162.

4) Edinburgh, Proc. Roy. Soc. 3 (1856/7), S. 474.

5) Politecnico 41 (1893), S. 398.

Beschaffenheit	Gewicht	Volumen	Eigengewicht	Strömungsgeschwindigkeit in m sec^{-1} zwischen														
	g	cm^3	g cm^{-3}	0,38 0,46	0,46 0,53	0,53 0,61	0,61 0,69	0,69 0,76	0,76 0,84	0,84 0,91	0,91 0,99	0,99 1,07	1,07 1,14	1,14 1,22	1,22 1,30	1,30 1,37	1,37 1,45	1,45 1,52
				Geschwindigkeiten, mit denen sich die Geschiebe bewegten. Bg = Beginn der Bewegung														
Ziegel	616	303,2	2,05	—	—	—	—	—	—	Bg	0,29	0,35	0,38	0,40	—	0,65	0,70	—
"	448	222,9	2,03	—	—	—	Bg	—	—	0,35	—	—	0,46	—	—	—	0,70	—
"	252	120,1	2,12	—	—	—	Bg	0,21	0,25	—	0,37	—	—	—	0,57	0,61	0,80	—
"	168	78,0	2,18	—	—	—	—	Bg	—	—	0,13	—	0,37	—	0,61	0,65	—	—
"	84	42,5	2,00	—	—	Bg	—	—	0,30	—	—	0,46	—	—	—	—	—	—
Oolith-Bausteine .	616	289,7	2,15	—	—	—	—	—	—	Bg	0,30	0,35	0,38	0,44	—	—	—	—
" .	252	109,7	2,32	—	—	—	—	—	Bg	0,28	—	0,35	0,37	0,38	0,57	—	—	—
" .	84	39,2	2,17	—	—	—	Bg	—	—	—	—	0,41	0,44	0,57	—	—	0,68	—
Kreide	616	303,9	2,05	—	—	Bg	—	0,18	0,20	—	0,37	0,40	—	0,51	—	0,54	—	—
"	448	208,9	2,17	—	—	—	—	Bg	—	0,30	0,34	0,46	—	0,57	—	—	—	—
"	252	127,5	2,00	—	—	—	Bg	—	0,28	—	0,41	—	0,57	—	—	—	—	—
"	168	84,8	2,00	—	—	—	Bg	—	0,28	—	0,35	0,48	—	0,51	0,65	—	—	—
"	84	39,2	2,17	—	—	—	—	Bg	0,23	0,29	0,31	—	0,54	—	—	—	—	—
Feuersteine . . .	448	169,9	2,67	—	—	—	—	—	—	—	Bg	—	0,30	0,32	—	0,48	0,56	—
" . . .	252	99,1	2,57	—	—	—	Bg	0,21	—	—	—	0,40	0,46	—	—	—	—	—
" . . .	84	31,9	2,66	—	—	—	—	—	Bg	—	—	0,33	0,41	0,44	0,54	—	—	—
Kohle	616	468,4	1,33	—	Bg	—	—	—	0,28	—	—	0,46	0,54	0,57	—	—	—	—
"	84	67,3	1,26	Bg	0,14	—	—	0,34	—	—	0,57	0,61	—	—	—	—	—	—
Kalkstein	140	49,5	2,86	—	—	—	—	Bg	—	—	—	0,29	0,34	—	0,48	0,51	—	—
"	84	28,4	3,00	—	—	—	—	—	Bg	—	—	0,27	—	—	0,38	—	0,44	0,61
"	42	14,1	3,00	—	—	—	—	—	Bg	—	—	—	—	0,30	—	0,38	—	—
Schiefer	420	157,5	2,86	—	—	—	—	—	—	Bg	—	—	—	0,61	—	—	0,65	—
"	112	39,0	2,90	—	—	—	Bg	—	—	0,21	—	—	—	—	0,44	0,61	—	—
Granitbruchstücke	182	69,1	2,66	—	—	—	Bg	—	0,20	0,30	—	0,35	0,38	—	0,54	—	—	—
"	84	31,8	2,67	—	—	—	Bg	—	—	—	—	—	—	0,30	0,44	—	0,57	—
"	42	15,8	2,66	—	—	—	—	—	—	Bg	—	0,34	—	0,40	0,46	0,61	—	—
Geschiebe	333	—	—	—	—	Bg	—	0,33	—	0,40	—	—	—	—	0,47	—	—	—
"	165	—	—	—	—	—	—	Bg	0,34	—	—	0,51	—	—	0,65	—	—	—
"	93	—	—	—	—	—	—	—	Bg	—	0,46	—	0,61	—	0,70	—	—	—
Gerölle, 6 mm Dmr.	—	—	1,41	Bg	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
" 12,7 " "	—	—	1,46	—	—	—	—	Bg	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Endlich stellte *A. Schoklitsch* auf Grund von Versuchen[1]), die allerdings nur bis zu 8 cm Wassertiefe gingen, die Regel auf, daß ein Geschiebestück, das frei auf einer Sohle aus mit ihm gleichem Geschiebe ruht, eben in Bewegung kommt, wenn

$$\gamma h_0 J_0 = \sqrt{0{,}385\,\gamma_1(\gamma_1-\gamma)\,\lambda\,V} = \sqrt{0{,}201\,\gamma(\gamma_1-\gamma)\,\lambda\,(2a)^3} \tag{325}$$

ist. Hierin ist h_0 die Wassertiefe in m, J_0 das Spiegelgefälle, γ das Eigengewicht des Wassers, γ_1 jenes des Gesteines, V das Volumen eines Geschiebekornes in m^3, $2a$ dessen mittlerer Durchmesser in m, λ eine Formziffer, die für

Kugeln	Sand	Bruchstücke	Schieferblättchen
1	1,15 bis 1,35	3,1	4,4

beträgt. Ruht das Einzelkorn auf einer Sohle aus Körnern vom Volumen V_s, so nehme $h_0 J_0$ ab und es werde

$$\gamma h_0 J_0 = \frac{\sqrt{0{,}385\,\gamma_1(\gamma_1-\gamma)\,\lambda\,V}}{1+\sqrt[4]{10{,}5\left(\frac{V}{V_s}-1\right)}}. \tag{325a}$$

Letzteren Ausdruck hat der Genannte für Steinblöcke von 0,15 bis 0,3 m^3 im Mühlbach im Deffereggental, der Defferegger Ache, dem Schnalserbach und der Passer stimmend gefunden.

Nach (325) hängt die Größe des in Bewegung kommenden Geschiebes nur von $h_0 J_0$ ab. Da nun diese Größe mit der Sohlengeschwindigkeit in bestimmter Beziehung stehen muß, besagt (325), daß die Sohlengeschwindigkeit bei gegebener Geschiebegröße also gegebener Rauhigkeit n nur vom Produkte $h_0 J_0$ und nicht von seinen Einzelfaktoren h_0 und J_0 abhängt.

Gleichung (325) gibt zu folgender Erwägung[2]) Anlaß. Bezeichnet man mit $m, n, c_1, c_2, \ldots$ konstante Größen, so kann man für die Schwerekomponente und Sohlenreibung (allgemeiner als *Boussinesq*, der nach Gl. (61d) $hJ = Bu_s^2$ setzt)

$$h_0 J_0 = c_1 u_s^m \tag{325b}$$

annehmen. Desgleichen kann man recht allgemein den Strömungsdruck auf eine vereinzelt vorstehende Fläche eines Steines, bei dem die seinem Gewicht proportionale Reibung auf seiner Unterlage soeben überwunden wird,

$$c_2 a^2 u_s^n = c_3 a^3 \tag{325c}$$

1) Im hydrotechnischen Laboratorium d. technischen Hochschule in Graz. Bisher unveröffentlicht.

2) *Ph. Forchheimer*, bisher unveröffentlicht.

setzen. Man hat dann zunächst

$$u_s^m = \left(\frac{c_3}{c_2} a\right)^{\frac{m}{n}}$$

oder in Verbindung mit (325b)

$$h_0 J_0 = c_1 \left(\frac{c_3}{c_2}\right)^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}}. \tag{325d}$$

Nach der Erfahrungsgleichung (325) soll nun

$$h_0 J_0 = c_4 a^{3/2}$$

sein, wonach man

$$\frac{m}{n} = \frac{3}{2} \quad \text{oder} \quad n = \frac{2}{3} m \tag{325e}$$

erhält. Es ist zwar wahrscheinlich, daß in den Flüssen m den Wert 2 besitzt, aber in Hinblick auf die Reibung in Röhren, an Schiffsflächen usw. nicht ausgeschlossen, daß er etwa bis 1,8 sinken könne, so daß n zwischen $4/3$ und $6/5$ zu liegen käme. Das steht in Widerspruch mit Gl. (324a), in der $n = 2$ angegeben ist. In der Tat, so natürlich auch diese Gleichung zunächst erscheint, ruht sie doch auf unsicherer Grundlage, weil in ihr das Geschiebestück als freischwebende Kugel betrachtet wird, obwohl es sich an der Sohle befindet, wo die Schichtenströmung beginnt. Versuche von *A. Schoklitsch*[1]) zeigten denn auch, daß für Kugeln auf einer Gerinnesohle $P = \zeta(a\,U)^{1,71}$ sei.

Nach den Versuchen von *F. Kreuter* und *Ph. Krapf*[2]) ist das $h_0 J_0$, bei welchem Geschiebe in Bewegung kommt, 1,3 mal so groß als jenes, bei welchem es abgelagert wird.

Nach (322) müßte ein Stein, der mit dem Gewichte P_0 oder der Dicke $2a_0$ in den Fluß gerät, nach Zurücklegen des Weges x die Dicke $2a_0 e^{-\frac{1}{3}c_1 \varphi x}$ besitzen. Zusammen mit Gl. (325d) führt das auf eine Abnahme der „Grenzschleppkraft" $h_0 J_0$ (vgl. S. 480) stromab nach einem Gesetze von der Form

$$h_0 J_0 = c_5 e^{-c_6 x}. \tag{325f}$$

In der Tat wird $h_0 J_0$ stromab kleiner; so fand *F. Kreuter*[3]) an der Etsch, wo sich seitdem infolge von Regulierungen das Gerölle sehr vergröbert hat, in 0, 4, 7 und 11 km Abstand von der Marlinger Brücke $h_0 J_0 = 0{,}015$, 0,0049, 0,00265 und etwa 0,00265 m, am Inn an der Trisannamündung $h_0 J_0 = 0{,}008$ und bei Kufstein $= 0{,}0014$. Inwieweit die Gleichungsform

1) Bisher unveröffentlicht. — *F. W. Lanchester* (Aerodynamik, deutsch von *C.* u. *A. Runge*, 1909, S. 48) leitet ab, daß die Oberflächenreibung wie die anderthalbfache Potenz der Geschwindigkeit wachse.

2) Z. d. öst. I. u. A.V. 57 (1905), S. 169.

3) Z. f. Gewässerk. 1 (1898), S. 191.

(325f) zutrifft, ist aber nicht recht zu sagen, denn die Bestimmungen der Schleppkraft leiden an der Schwierigkeit, daß man schwer erkennt, bei welchem Wasserstand h_0 sich das Geschiebe abgelagert hat oder in Bewegung kommt.

Über das Niedersinken der Teilchen stellte *L. L. Vauthier*[1]) eine Untersuchung an, welche darin gipfelt, daß sie — ruhiges Wasser vorausgesetzt — sehr rasch ihre Endgeschwindigkeit erreichen. Der Genannte knüpft hierbei an *J. Dupuit*[2]) an, welcher Kugeln vom Eigengewicht γ_1, und dem Durchmesser $2a$, also dem Gewichte im Wasser $\frac{4\pi}{3}(\gamma_1 - \gamma)\, a^3$ betrachtet, bei ihrer Geschwindigkeit w den Widerstand nach (242) gleich

$$\frac{\gamma}{2} \cdot \pi a^2 \cdot \frac{w^2}{2g} = \frac{\pi \gamma}{4g} a^2 w^2$$

setzt und somit für die Beschleunigung mit der Zeit t in Sekunden

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\frac{4\pi}{3}(\gamma_1 - \gamma)\, a^3 - \frac{\pi}{4}\frac{\gamma}{g} a^2 w^2}{\frac{4\pi}{3}\frac{\gamma_1}{g} a^3} = g\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} - \frac{3\gamma w^2}{16\gamma_1 a} \tag{326}$$

hat. Mit den Zeichen

$$N = \sqrt{\frac{3}{4} g \frac{\gamma(\gamma_1 - \gamma)}{\gamma_1^2}\frac{1}{a}}, \quad w_1 = \sqrt{\frac{16}{3} g \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} a} \tag{326a}$$

folgt

$$\frac{dw}{dt} = \frac{N w_1}{2} - \frac{N w^2}{2 w_1}$$

oder nach Integration, weil für die Falldauer $t = 0$ auch die Geschwindigkeit $w = 0$ sein muß,

$$\log \operatorname{nat} \frac{w_1 + w}{w_1 - w} = Nt$$

oder

$$w = w_1 \frac{e^{Nt} - 1}{e^{Nt} + 1}. \tag{326b}$$

Hierin bedeutet w_1 die Endgeschwindigkeit, die das Stück nach unendlicher Zeit erlangt. Aus der Geschwindigkeit $w = \frac{dz}{dt}$ geht weiter für die Falltiefe

$$z = w_1 \left[\frac{2}{N} \log \operatorname{nat} \frac{1 + e^{Nt}}{2} - t\right] \tag{326c}$$

hervor. Aus den entwickelten Gleichungen berechnet *Vauthier* für Kugeln vom Eigengewicht $\gamma_1 = 2$ nachstehende Zahlen:

1) Association française pour l'avancement des sciences, Blois 13 (1884), Paris 1885, S. 93, abgekürzt in Ann. d. ponts et chauss. (6) 10 (1885), S. 1168.

2) *J. Dupuit*, Études, S. 220.

Dmr. D	W	Zeit zur Erlangung von $w = 0{,}99\,w_1$	Weg in der			
			1ten Sek.	2ten Sek.	3ten Sek.	4ten Sek.
m	m sec^{-1}	sec	m	m	m	m
0,0001	0,0316	0,039	0,0513	0,0516	—	—
0,001	0,1638	0,124	0,1596	0,1155	—	—
0,01	0,3164	0,398	0,4794	0,5164	—	—
0,1	1,6830	1,241	1,2661	1,6302	1,6830	1,683
1	3,1640	3,925	2,1849	4,5559	5,0644	5,1750

Bei kleinen Teilchen wird gemäß der *Stokes*schen Gleichung (242a) der Widerstand beim Sinken proportional der Zähigkeit η, und da diese bei steigender Temperatur abnimmt, müssen kleine Teilchen in warmem Wasser schneller als in kaltem sinken. *J. S. Owens*[1]) hat dies bei Feinsand beobachtet und zugleich gefunden, daß bei 2 mm Korndurchmesser der Temperatureinfluß rasch verschwindet.

132. Das Längenprofil gleichen Widerstandes. Wenn die Sohlengeschwindigkeit u_s in einem Flusse der Gl. (324) nicht entspricht, so findet gemäß *H. Sternberg* dort, wo $u_s > \varphi_1 P^{1/6}$ ist, eine Eintiefung statt und kann dort, wo $u_s < \varphi_1 P^{1/6}$ ist, eine Auflandung eintreten. Da ist der Fall denkbar, daß dieser Vorgang schließlich einen labilen Zustand herbeiführe, bei dem die Gl. (324)

$$u_s = \varphi_1 P^{1/6}$$

erfüllt ist. Dann hat weiter, weil die Sohlengeschwindigkeit u_s mit der mittleren Geschwindigkeit U bei geringem Tiefebwechsel in einem einigermaßen festen Verhältnisse steht, mit einer neuen Konstanten φ_2 die Beziehung

$$U = \varphi_2 P^{1/6} \tag{327}$$

statt. Aus der gesetzmäßigen Änderung (322)

$$P = P_0 e^{c_1 \varphi x}$$

des Gerölles längs dem Flußlaufe, folgt dann

$$U = \varphi_2 P_0^{\frac{1}{6}} e^{\frac{c_1 \varphi x}{6}}. \tag{327a}$$

Eine ähnliche Gleichung erhält man, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man in größerer Allgemeinheit u_s^n statt u_s^2 proportional mit den Geschiebeabmessungen oder $u_s = \varphi_1 P^{\frac{1}{3n}}$ sein läßt.

Sternberg macht nun weitere Annahmen, um von (327a) ausgehend zum Längenprofile des Flusses zu gelangen. Eine derselben ist die, daß

1) Engineering 94 (1912), S. 862, 863. Vgl. S. 400 u. 409.

die Breite B stromab proportional der Wassermenge wachse oder $Q:B=q$ konstant sei. Dann hat man bei einer mittleren Tiefe h

$$h=\frac{Q}{B}\frac{1}{U}=\frac{q}{U} \tag{327b}$$

und bei Einführung der Ordinate z

$$U=c\sqrt{hJ}=c\sqrt{\frac{q}{U}\frac{dz}{dx}} \tag{327c}$$

oder

$$\frac{dz}{dx}=\frac{U^2}{c^2 q}=\frac{\varphi_2{}^2 P_0{}^{\frac{1}{3}} e^{\frac{c_1\varphi x}{2}}}{c^2 q}, \tag{327d}$$

somit nach Integration als Gleichung des Flußlängenprofiles bei Einführung neuer Konstanten

$$z=\varphi_3(e^{\varphi_4 x}-1). \tag{328}$$

Mit diesem Ausdruck stimmt das Längenprofil des Mittelrheines, der Maas, der Mur und der Enns[1]). Übrigens kommt es weniger auf die mittleren Erhebungen z, als auf die Gefälle $\frac{dz}{dx}$ an, indem Wehre, Felsstrecken u. dgl. Stufen oder Steilrampen erzeugen können, ober- und unterhalb welcher aber trotzdem das richtige Gefälle der Gl. (327 d) zu herrschen hat.

133. Der Geschiebetrieb. *Sternbergs* Auffassung der im wesentlichen ruhigen Flußsohle trifft in der Natur nicht zu, denn wenn der Grund aus Geschiebe besteht, ist er stets bei höheren Wasserständen in Bewegung und, wenn er trotzdem seine Höhenlage behält, so ist dies nicht der Fall, weil die Steine ruhig bleiben, sondern weil Zufuhr und Abfuhr sich ausgleichen, oder mit anderen Worten die Menge des geförderten Geschiebes — der Geschiebetrieb — sich längs der Flußstrecke nicht ändert.

Zur Berechnung des Geschiebetriebes hat *P. du Boys*[2]) angenommen, daß die Sohle aus übereinander gleitenden Steinschichten bestehe. Auf der Oberflächeneinheit der obersten Schicht ruht ein Wasserkörper von der Höhe h, also dem Gewichte γh, dessen Teilkraft parallel zur Sohle bei einem Spiegel- und Sohlengefälle J die Größe γhJ hat. Diese Teilkraft oder *Schleppkraft* (force d'entraînement) wird durch die

1) *H. Sternberg,* Z. f. Bauw. 25 (1875), S. 498; *F. v. Hochenburger,* Über Geschiebebewegung und Eintiefung, Leipzig 1886; *W. Heyne,* Wochenschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 11 (1886), S. 253 nach Angaben Hochenburgers.

2) Ann. d. ponts et chauss. (5) 18 (1879²), S. 149.

Reibungen der Schichten aufgehoben. Besitzt jede Schicht die Stärke ε und samt ihrem Wasserinhalt das Raumgewicht γ_2 und bedeutet φ die Reibungsziffer, so bleibt die n^{te} Schicht liegen, wenn

$$\varphi n \varepsilon(\gamma_2 - \gamma) = \gamma h J \tag{329}$$

ist. Die Zwischenschichten sind aber dann in Bewegnng und zwar habe die $(n-1)^{te}$ Schicht die übrigens nicht bekannte Geschwindigkeit v; die nächstobere hat dann, da die Geschwindigkeitsunterschiede benachbarter Schichten gleich groß sein müssen, die Geschwindigkeit $2v$, die folgende $3v$ usw. bis zur Geschwindigkeit nv der obersten Schicht. Der ganze Geschiebetrieb in Raummaß über die Breiteneinheit der Sohle in der Zeiteinheit wird demnach

$$G = \varepsilon\,[v + 2v + \cdots + nv] = \varepsilon v \frac{n(n-1)}{2}. \tag{329a}$$

Wird die *Grenzschleppkraft*, bei welcher die Bewegung eben beginnt, oder $n = 1$ ist, mit S (in kg m^{-2}) bezeichnet, so daß S eine für jedes Geschiebe bestimmbare Zahl ist, so gilt nach (329) mit γ und γ_2 in kg m^{-3}

$$S = \varphi \varepsilon(\gamma_2 - \gamma), \tag{329b}$$

so daß sich

$$\gamma h J = n S \tag{330}$$

und

$$G = \frac{\varepsilon v}{2}\frac{\gamma h J}{S}\cdot\left(\frac{\gamma h J}{S} - 1\right) = \frac{\varepsilon v}{2 S^2}\gamma h J(\gamma h J - S) = \psi h J\left(h J - \frac{S}{\gamma}\right) \tag{330a}$$

zeigt, falls ψ eine wesentlich von der Dicke und dem Eigengewicht jeder Schicht abhängige, also eine das Geschiebe kennzeichnende Zahl bedeutet. Für das betreffende Flußgefälle J gibt sich S übrigens durch die Wassertiefe h_0 zu erkennen, bei der soeben die Bewegung beginnt und für welche

$$S = \gamma h_0 J \tag{330b}$$

sein muß. Mit Rücksicht hierauf kann man (330a) auch in der Form

$$G = \psi h (h - h_0) J^2 \tag{330c}$$

schreiben. Endlich kann man hJ auch durch die mittlere Geschwindigkeit, nämlich durch $U^2 : c^2$ ersetzen, also (330a) in

$$G = \psi \frac{U^2}{c^2}\left(\frac{U^2}{c^2} - \frac{S}{\gamma}\right) \tag{330d}$$

verwandeln. Dieser Ausdruck läßt erkennen, daß der Geschiebetrieb bei einer bestimmten Geschwindigkeit

$$U = c\sqrt{\frac{S}{\gamma}}$$

beginnt und dann rasch mit U wächst. Hierin legt das Zutreffende der Ableitung, denn die von *Du Boys* vorausgesetzte Bewegungsweise findet in der Tat nicht statt. Die Körner werden vielmehr gerollt oder so aufgewirbelt wie Staub im Winde und, wo die Schichten eine ehemalige Bewegung in größerer Tiefe verraten, hat, wie Versuche von *A. Schoklitsch*[1]) dargetan haben, eine absatzweise Abtragung und Wiederaufhöhung stattgefunden. Der größte Teil von $\gamma h J$ wird also zur Überwindung der Reibung des Wassers an den jeweiligen fest haftenden Steinen verbraucht. Trotzdem fand *Schoklitsch* die *Du Boys*sche Formel zutreffend und er war sogar imstande, den noch unbekannten Koeffizienten zu bestimmen und für *einheitliches* Geschiebe vom Eigengewichte γ_1 die Formel

$$G_1 = 0{,}54 \frac{\gamma^2}{\gamma_1 - \gamma} hJ(hJ - h_0 J_0) \tag{331}$$

zu geben, in der G_1 die Geschiebemenge in $m^3 sec^{-1}$ pro m Breite, also in $m^2 sec^{-1}$, γ und γ_1 in $kg\,m^{-3}$ und h in m ausgedrückt ist, ferner 0,54 die Dimension $m^3\,kg^{-1}\,sec^{-1}$ hat. Bemerkt sei noch, daß G_1 in Festmaß (wie Bauholz) und nicht in Raummaß (wie Brennholz) gedacht ist, und daß J_0 neben h_0 in die Formel gesetzt wurde, weil die Bestimmung der das Geschiebe soeben bewegenden Grenzschleppkraft S bei einem anderen Gefälle als J geschehen darf. Mit J_0 ändert sich eben h_0.

Die Einheitlichkeit verlangt gleiches Eigengewicht, annähernd gleiches Volumen und annähernd gleiche Gestalt der Stücke, mögen sie nun Kugeln, Körner, Bruchstücke oder Plättchen sein. Ist das Korn nicht einheitlich, so geraten die verschiedenen Körner bei verschiedenen Schleppkräften $\gamma J_0 h_0$ in Bewegung; auch findet bei anhaltend gleichförmigem Durchfluß zuletzt eine Aufbereitung (Sonderung) statt und so hängt der Geschiebetrieb von der jeweilig geförderten Korngröße ab. Festgestellt konnte nur werden, daß vom Gemenge mitunter selbst etwas *mehr* wandert, als nach (331) dem *feinsten* Sand des Gemenges entspräche.

Eine merkwürdige Erscheinung bei dem Forttrieb des Gemenges kann nicht unerwähnt bleiben, nämlich, daß wenn Steine von verschiedener Größe in Bewegung sind, die großen den kleinen voraneilen, allerdings bei Abnahme des Durchflusses früher liegen bleiben[2]). Dieses Voraneilen erklärt sich dadurch, daß sie in die Vertiefungen der Sohle weniger einsinken und vermöge ihrer lebendigen Kraft Hindernisse häufiger überschreiten. Die genannte Erscheinung ist übrigens eine der

1) Im hydrotechnischen Laboratorium der Grazer Hochschule. Bisher unveröffentlicht.

2) *A. Schoklitsch,* bisher unveröffentlicht.

wichtigsten Ursachen, die eine vollkommene Aufbereitung des Geschiebes verhindern.

Die Formel (331) entspricht einem Sättigungszustande des Wassers an Körnern. Schüttet man bei beliebigem Geschiebe in das gesättigte Wasser neues Geschiebe, so lagert sich eine *gleichwertige* Menge Geschiebe ab. Ist dieselbe von kleinerem bzw. gröberem Korn als die Schüttung, so ist nämlich die abgelagerte Menge aller Wahrscheinlichkeit nach größer bzw. geringer als die hinzugeschüttete. Die Sättigung hat zuerst *Sc. Gras*[1]) behauptet, die Gleichwertigkeit *A. Schoklitsch*[2]) hinzugefügt.

134. Das Wandern der Sandbänke. Die Bewegung der Gl. (331) findet häufig auf Sandbänken (Kiesbänken) statt und bewirkt dann ein langsames Vorrücken derselben. Jede Sandbank[3]) ist in der Stromrichtung bis zur Kopfkante weniger geneigt als der mittlere Flußspiegel; während sie von der Kopfkante bis zur Ichse an ihrem Fuße steil geböscht ist. Dadurch entsteht am Sandbankkopfe ein Wirbel mit wagrechter Achse. Die über die Bank laufenden größeren Körper rollen, wenn sie die Kopfkante überschritten haben, bis zur Ichse hinunter; die kleineren Körner werden aber durch den Wirbel zurückgehalten und bilden einen Körper mit sehr steiler Böschung, der endlich das Gleichgewicht verliert und abrutscht. Wenn der Geschiebetrieb in Gang ist, besteht also die Kopfböschung aus zwei Flächen verschiedener Neigung, einer oberen sehr steilen, einer unteren flacheren. Das Vorrücken einer Sandbank hängt demnach einerseits von ihrer Kopfhöhe, andererseits von der Zeitdauer und den Höhen der Wasserstände ab, die ein Treiben verursachen. Bei einer Massenberechnung wäre noch zu berücksichtigen, daß nach Messungen *F. von Hochenburgers*[4]) 1 Festmeter Geschiebe 1,5 Raummeter gibt.

An der Loire nahm *Sainjon*[5]) Messungen vor, auf Grund welcher er, so lange die Oberflächengeschwindigkeit $u_0 < 1{,}106\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$ bleibt, den Fortschritt der Sandbänke zu

$$(332)\qquad 0{,}00013\,(u_0^2 - 0{,}11)\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$$

bewertete. Aus dieser Formel leitete *Lechalas* für den Geschiebetrieb in Raummeter für 1 m Breite und 1 sec, also in $\mathrm{m^2\,sec^{-1}}$,

1) Ann. d. ponts et chauss. (3) 14 (1857²), S. 17.

2) Bisher unveröffentlicht.

3) *Du Buat,* Principes d'hydraulique I, § 72; *G. Hagen,* Handb. d. Wasserbaukunst, 2. Teil, 1. Bd., S. 158, 358 Sohlenriffelung bei Fluß und Wildbach: *H. Blasius,* Z. f. Bauw. 60 (1910), S. 465.

4) Über Geschiebebewegung und Eintiefung, Leipzig 1886, S. 166.

5) *Partiot,* Ann. d. ponts et chauss. (5) 1 (1871¹), S. 278, sowie S. 272, 387.

bei Rollen auf der Sohle $0{,}00037\,(u_s^2 - 0{,}06)$
„ Schweben im Wasser $0{,}00037\,u_s^2$

ab, worin u_s die Sohlengeschwindigkeit bezeichnet. Das Rollen beginne bei $u_s = 0{,}25\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$, das Schweben bei $u_s = 0{,}55\ \mathrm{m\,sec^{-1}}$. Sowohl *Sainjons* Formel, in welcher die Sandbankhöhe nicht vorkommt, als auch die *Lechalas*, der mit einer mittleren Sandbankhöhe von 0,77 m rechnete, obwohl die Höhen zwischen rund 0,3 und 1,2 m schwankten, erscheinen von sehr geringem Wert.

Schneller als in der Loire und bei hohem Wasser rascher als bei mittlerem wandern die Kiesbänke im Rhein[1]), nämlich rund 500 m im Jahr unterhalb Straßburg und rund 700 bei Rheinau; oberhalb Breisach nimmt der Jahresfortschritt allmählich ab. Das Verhalten dieser Bänke ist von besonderem Interesse. Ihre Zahl, 209 auf 200 km zwischen Basel und Sondernheim, bleibt unverändert, denn während sie sich bei Sondernheim auflösen, wo das Gefälle abnimmt und vielfach Lettenboden die Bildung von Kolken verhindert, schalten sich zwischen Basel und Markolsheim immer wieder neue ein, so daß die erwähnte Zunahme der Fortschrittsschnelligkeit bewirkt, daß die Entfernung benachbarter Kiesbänke stromab zunimmt und sich der Strom hier jährlich 5 bis 6 cm eintieft. — An der bei Niederwasser 60 m breiten Mur wandern seit langen Jahren unterhalb Graz alle 360 m Sandbänke abwechselnd am linken und rechten Ufer.

Wie sich die Sandbankbewegung bei Änderung der Oberflächengeschwindigkeit U_0 umgestaltet, beobachtete *G. F. Deacon*[2]) bei feinem Sand aus der Mersey-Mündung in einem Trog mit Glaswänden. Er fand (für U_0 in $\mathrm{m\,sec^{-1}}$) bei

$U_0 = 0{,}40$ Einzelne Körner bewegen sich; sie ordnen sich in Querbänken, welche Riffeln ähneln.
0,46 Riffeln gut ausgebildet, wandern in beschriebener Weise mit der Schnelligkeit $U_0 : 2100$.
0,53 Riffelschnelligkeit $U_0 : 1050$.
0,61 Riffelschnelligkeit $U_0 : 480$.
0,64 Einzelne Körner springen von einem Kopf zum nächsten.
0,65 Die Riffeln werden unregelmäßig.
0,76 Viele Körner überspringen den Kopf der Nachbarbank.
0,79 bis 0,85 Die Riffeln werden verwaschen.
0,88 Die Riffeln verschwinden, der Sand wird schwebend gefördert.

1) *R. Jasmund* im Handb. d. Ingenieurwissenschaften, 3. Wasserbau, 1. Bd., 4. Aufl. 1911, S. 351, 352, wo noch weitere Angaben. — Sandbänke in der Garonne: *Baumgarten*, Ann. d. ponts et chauss. (2) 16 (1848[2]). S. 1f. — Sandbänke in der Elbemündung: *Hübbe*, Z. f. Bauw. 11 (1861), Sp. 1, 183f.

2) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 118 (1894), S. 93.

Von der Ursache des Schwebens von Teilchen im Wasser wird unten bei Besprechung der Schlammförderung die Rede sein.

135. Das Längenprofil bei Geschiebetrieb. Oben (S. 480) wurde das Längenprofil des Flusses auf Grund der Gleichgewichtsannahme zwischen Wasserstoß und Reibung entwickelt. Der Geschiebetrieb muß dessen Ausbildung etwas ändern, denn schließlich kommt es für den unveränderlichen Bestand einer Flußstrecke darauf an, daß sie ebensoviele Geschiebe weitergebe, wie sie empfängt. Eine Berechnung des Längenprofiles auf dieser Grundlage hätte aber ihre großen Schwierigkeiten. Nun möge angenommen werden, daß ein Längenprofil bei einem bestimmten Wasserstande h_0 dem Gleichgewichte entspreche. Dann ist nach (327) bis (327c)

$$c\sqrt{h_0 J} = U = \varphi_2 P^{1/6} \text{ und } = \frac{q}{h_0},$$

daher

$$h_0 = \frac{q}{\varphi_2 P^{1/6}}, \quad J^2 = \frac{\varphi_2{}^6 P}{c^4 q^2}. \tag{333}$$

Wenn nun das Wasser steigt und den Stand h erreicht, findet nach (330c) ein Geschiebetrieb in Festmaß (statt Raummaß)

$$G_1 = \text{etwa } 0{,}7\, G = 0{,}7\, \psi h (h - h_0) J^2 = 0{,}7\, \psi h (h - h_0) \frac{\varphi_2{}^6 P}{c^4 q^2}$$

statt. Da ein Geschiebestück außerhalb des Wassers $\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma} P$ wiegt, beträgt zu dieser Zeit die Zahl der wandernden Geschiebestücke

$$0{,}7 \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} \frac{G}{P} = 0{,}7 \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} \frac{\psi \varphi_2{}^6}{c^4 q^2} h (h - h_0). \tag{333a}$$

Da die Brüche in diesem Ausdrucke längs dem Flusse so ziemlich konstant sind, findet bei dem angenommenen Längsprofil keine nennenswerte Aufhöhung oder Eintiefung statt. Der Geschiebetrieb wird also im allgemeinen keine große Abweichung vom *Sternberg* schen Längenprofil verursachen, womit nicht gesagt ist, daß nicht anderweitige Ursachen einen solchen veranlassen können. Vom Wachstum von $h(h - h_0)$ stromab wird es weiter abhängen, ob bei steigendem Wasserstand $G : P$ stromab zunimmt, in welchem Falle bei Hochwasser die Sandbänke verschwinden, um bei sinkendem Wasser sich neu zu bilden.

Welche Form auch das Längenprofil haben muß, so wäre nach dem Gesagten, das Gefälle als Funktion der Geschiebegröße und diese als Funktion des Geschiebeweges aufzufassen. Bei dieser Auffassung — welche freilich nicht berücksichtigt, daß die Wirkung derselben Geschiebegröße nicht an allen Flußpunkten dieselbe ist — ist das Längen-

profil eine *unveränderliche* Kurve, die, etwa im Oberlaufpunkte A, mit einem unveränderlichen Gefälle beginnt[1]). Wird der Fluß durch einen Durchstich um Δl gekürzt, so entfällt, sei der Durchstich wo er wolle, das Endstück der Kurve an der Flußmündung. War daselbst die Neigung J_2, so vermindert sich also der Höhenunterschied zwischen A und der Mündung um $J_2 \cdot \Delta l$, so daß — wenn die Mündung ihre Höhe über Meer behält — sich der ganze Fluß *oberhalb* des Durchstiches um

$$J_2 \cdot \Delta l \tag{334}$$

senkt. *Unterhalb* des Durchstiches rücken andererseits alle Punkte um Δl näher an A. War an einem Punkte das Gefälle J, so vermindert sich also sein Höhenabstand von A um $J \cdot \Delta l$. Seine Höhe über Meer erhöht sich also, da $J > J_2$ ist, um

$$\Delta l (J - J_2). \tag{334a}$$

Durchstiche bewirken also Eintiefung stromauf, Aufhöhung stromab. Dabei wird — wie schon auf S. 480 erwähnt — der Eintiefung durch feste Wehre, Felsschwellen u. dgl. ein Ziel gesetzt. Zugleich bewirken Wehre, weil sie die Wanderung der von oben kommenden Geschiebe hemmen, während unter ihnen die Förderung nicht aufhört, zumeist eine starke Eintiefung der unter ihnen liegenden Strecke.

Eine Bestätigung der vorgeführten Theorie lieferte der Rhein in Vorarlberg nach Ausführung des Fussacher Durchstiches, da bei ihm ungefähr die von *J. Wey* vorausberechnete Senkung von 2,4 m eintrat, der Lech bei Lechhausen, bei dem infolge einer 1852 begonnenen Regulierung ein Niedergang von 6,0 m zu erwarten war und der tatsächlich im Zeitabschnitt 1882/4 gegenüber 1847/51 um 5,1 bis 5,2 m niedergegangen ist[2]), die Aare, deren Sohle sich bei 3 m Eintiefung parallel verschob[1]), und besonders die Mur, welche seit 1876 in ein einheitliches Bett mit wenigen Krümmungen eingefaßt wurde und sich stark eintiefte. *A. Brunar* zeichnete, vom selben Punkt auf dem Zeichnungsblatt ausgehend die Aufrisse der Nullwasserlinien, die der Fluß 1876 und 1904 von Graz stromab bot. Aus den beiden Linien ergaben sich, wenn man sich sie in Naturgröße denkt, folgende Höhenunterschiede in Dezimetern der übereinander liegenden Punkte, welche Höhenunterschiede nicht mit den Eintiefungen zu verwechseln sind, da dieselbe Flußstelle auf dem

1) *A. v. Salis*, Das Schweizerische Wasserbauwesen, Bern 1883, S. 27, 69. — Hiernach Wirkung mehrerer Durchstiche: *M. Möller*, Grundriß des Wasserbaues, 2, Leipzig 1906, S. 119.

2) Nach eigener Berechnung und Wasserbau a. d. öff. Flüssen im Königreich Bayern, München 1888, Taf. 23.

Längenprofil von 1876 beträchtlich weiter entfernt von Graz erscheint, als auf dem von 1904:

km	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	22	24	22	22	29	22	24	25	27	30	32	35	38	40	44	44	44	47	44
	Eintiefung noch im Gange					Gefälle zu groß								Übereinstimmung					

19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
48	60	55	57	53	54	54			83	82	82	82	82	86	85	82	83
Stufe	Übereinstimmung						Fels		Übereinstimmung								

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
82	88	82	84	81	82	85	84	87	86	86	86	83	85	82	82	81	84	84	83	83
Übereinstimmung																				

Hier kehrte also in gleicher, längs des jeweiligen Flusses gemessenen Entfernung von der Quelle im allgemeinen dasselbe Gefälle wieder. Dann folgte eine Strecke, in der das Bett ehemals einen Rücken gebildet hatte und das Gefälle 1905 zu groß geblieben war.

Neben den Flüssen, deren Verhalten sich wie das der genannten der Theorie anpaßte, zeigen aber andere mehr oder weniger große Abweichungen. Der Gründe sind mehrere. So setzt die Theorie einen einzigen Strom voraus, während in der Regel Nebenflüsse vorhanden sind und durch Bauten im Hauptstrom das Gerölle der Nebenflüsse nicht geändert wird. Ferner gerät mit der Stromkürzung Geschiebe bestimmter Größe in wasserreichere Strecken als vorher. Manchen Flüssen, so z. B. dem Rhein in Baden und der Weser werden auch große Kiesmengen fortgesetzt für Bahnen, Straßen usw. entzogen. Während diese Umstände die hebende Wirkung auf den Unterlauf mildern, beeinträchtigt ein anderer Umstand häufig die Senkung im Oberlauf, nämlich der, daß bei der Eintiefung mehr grobes als feines Geschiebe liegen bleibt, bis schließlich die Eintiefung vorzeitig zum Stillstande kommt. Verschärft kann die Senkung hingegen werden, wenn bei dem Niedergange die alten Uferböschungen sich nach unten fortsetzen, weil dann mit der Senkung eine Einengung des Bettes und damit eine Steigerung der Geschwindigkeit und größere Räumungsfähigkeit verbunden ist, wie sich dies unter anderem sehr auffallend an der Isar unterhalb München zeigte.

136. Geschiebetrieb bei beliebigem Querschnitt. Bisher wurde der Einfachheit halber die Tiefe des Flußquerschnittes gleichförmig angenommen, während sie in Wirklichkeit fast immer wechselt. In diesem Falle gibt die Integration über den Querschnitt bei Einführung einer Breitenordinate y, wenn man zugleich berücksichtigt, daß das Geschiebe

überhaupt nur dort fortgeschleppt wird, wo $h > h_0$ ist, für den Geschiebetrieb den von *F. Kreuter*[1]) entwickelten Ausdruck (s. (330c))

$$G = \psi J^2 \int_{y_1}^{y_2} h(h - h_0)\, dy. \tag{335}$$

Hier sind y_1 und y_2 die Abszissen der Grenzpunkte, zwischen denen der Trieb vor sich geht, für die nämlich $h = h_0$ ist[1]).

Die Gl. (335) ermöglicht, wie *Ph. Forchheimer* gelegentlich auseinandersetzte, die Voraussage[2]) der Wirkung einer Querschnittseinschränkung (Einführung einer Normalbreite). Zunächst muß der mittlere Querschnitt der ungeregelten Strecke aufgesucht werden. Zu diesem Zwecke beachte man, daß man jeden Querschnitt eines breiten Flusses in einen von *gleichem* Durchfluß und *gleichem* Geschiebetrieb verwandelt, wenn man die Breiten, die er in verschiedenen Tiefen besitzt, von einer Lotrechten aufträgt. Folgen in einer *bestimmten* Tiefe unter dem Spiegel Abschnitte mit den Längen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ und den Breiten $B_1, B_2, B_3, \ldots$ aufeinander, so hat der *mittlere* Umriß der gesamten Strecke in *derselben* Tiefe unter dem Spiegel die Breite

$$B = \frac{B_1 l_1 + B_2 l_2 + B_3 l_3 + \cdots}{l_1 + l_2 + l_3 + \cdots}. \tag{335a}$$

Für jene großen Tiefen, die nicht in allen Abschnitten vorkommen, sind dann einige Abschnittbreiten $= 0$. Den mittleren Umriß kann man sich auf der einen Seite lotrecht begrenzt denken. Welche Tiefe $h_0 = h_{0\,\text{alt}}$ man bei dem bestehenden Gefälle J_{alt} in der Formel (335) einzusetzen hat, muß man durch Beobachtung feststellen. Ferner ist einzuschätzen, welchen Wasserstand man als den für den Geschiebetrieb maßgebenden betrachten soll. Anderenfalls wären die Rechnungen für verschiedene Wasserstände zu wiederholen. Der Koeffizient ψ ist zwar unbekannt, doch genügt es zu wissen, daß er bei Querschnittsänderungen seinen alten Wert behält. Wird nun die Breite eingeschränkt, so entfällt das seichte Ende der Querschnittsfläche, dafür wird, weil der Durchfluß der alte bleiben muß, der Spiegel in der Figur steigen. Bei der betreffenden Rechnung muß man beachten, daß die üblichen Geschwindigkeitsformeln ergeben können, daß bei Entfall des seichten Stückes der Durchfluß *wächst*, wonach der Spiegel infolge der Einschränkung sinken würde. Das kommt aber nur von einem Fehler des Formelbaues, dessen Folgen

1) Handb. d. Ingenieurwissenschaften, 3. Wasserbau, 2. Abt., 1. Hälfte, 3. Aufl., Leipzig 1900, S. 177. Hier betont *Kreuter* auch, daß bei Wahl eines neuen Flußquerschnittes die Sicherung der Geschiebeabfuhr anzustreben sei.

2) Bisher unveröffentlicht.

man vermeiden kann, indem man sofort den Durchfluß Q_m der Hauptfläche und jenen Q_n der abzutrennenden Nebenfläche gesondert berechnet. Nach der Einschränkung muß dann die Hauptfläche die ganze Menge $Q = Q_m + Q_n$ aufnehmen. War ursprünglich die mittlere Tiefe der Hauptfläche H_{alt}, so wird, da das Spiegelgefälle zunächst noch das alte geblieben ist, sich ergeben, daß das Wasser steigt, das heißt, daß die neue mittlere Tiefe $H > H_{\text{alt}}$ ist. Dieser Zustand kann aber nicht andauern, sondern muß durch Sohlenausräumung eine Gefällsänderung zur Folge haben, bei der sich H in H_{neu} und J_{alt} in J_{neu} verwandelt. Die Aufgabe besteht nun darin, H_{neu} und J_{neu} so zu berechnen, daß Q und G ihren ursprünglichen Wert (wie er vor der Regelung war) aufweisen. Bei dieser Berechnung, die man durch versuchsweise Annahmen durchführt, beachte man, daß auch h_0 seinen Wert ändert und sich vom ursprünglichen $h_{0\,\text{alt}}$ schließlich in $h_{0\,\text{neu}}$ verändert, wobei

$$h_{0\,\text{alt}} J_{\text{alt}} = h_{0\,\text{neu}} J_{\text{neu}} \tag{336}$$

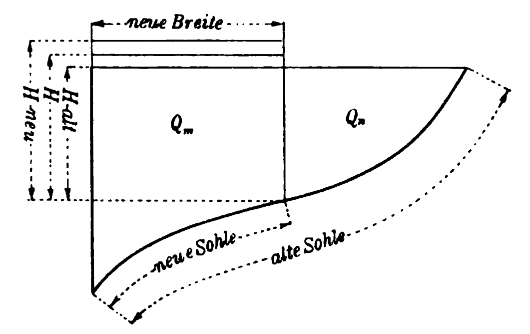
gelten muß. Hat man $J_{0\,\text{neu}}$ herausgebracht, so kennt man, wenn das untere Streckenende seine Höhenlage über Meer behält, auch die am oberen Streckenende zu gewärtigende Eintiefung

$$(l_1 + l_2 + l_3 + \cdots)(J_{\text{alt}} - J_{\text{neu}}). \tag{336a}$$

Für den Rhein bei Hohenems in Vorarlberg rechnete *Ph. Forchheimer*[1]) nachstehende mittlere Breiten (oder Umrißabszissen y) aus:

Über NW	m	−4,5	−4,0	−3,5	−3,0	−2,5	−2,0	−1,5	−1,0	−0,5	0
Breite	m	0	0,3	0,5	1,8	4,7	9,9	19,4	36,9	54,8	72,1
Über NW	m	+0,3	+0,5	+1,0	+1,55						
Breite	m	84,0	91,5	118,0	182,7						

Als maßgebend für den Geschiebetrieb wurde der Spiegel +0,3 angesehen und für das ursprüngliche Gefälle $J_{\text{alt}} = 0{,}0012$ schien $h_{0\,\text{alt}} = 1$ m zu sein. Der Geschiebetrieb ergab sich hiernach zu $\psi \cdot 379{,}9 \cdot 0{,}0012^2 = \psi \cdot 0{,}00547$. Die Durchflüsse wurden für eine in Aussicht genommene Einschränkung auf 90 m Normalbreite, also bei Teilung der Fläche durch eine entsprechende Gerade, zu $Q_m = 486{,}4$ und $Q_n = 33{,}3\ \text{m}^3\,\text{sec}^{-1}$ bestimmt. Die größere Teilfläche wies von Q_m durchströmt eine mittlere Tiefe H_{alt} von 2,507 m auf, welche sich bei Durchleitung



von $Q_m + Q_n = 519{,}7\ \text{m}^3\,\text{sec}^{-1}$ auf $H = 2{,}622$ m erhöhen mußte, falls das Gefälle $= J_{\text{alt}} = 0{,}0012$ blieb. So lange das Gefälle sich nicht änderte, konnte sich wie

1) In einem unveröffentlichten Gutachten.

vorher das Geschiebe erst in Bewegung setzen, wenn es 1 m hoch überronnen wurde. Mit $h_0 = h_{0\,\text{alt}} = 1$ m berechnete sich für den neuen Spiegel oder für $H = 2{,}622$ m der Geschiebetrieb für die allein noch durchflossene Hauptteilfläche zu $\psi \cdot 416{,}1 \cdot 0{,}0012^2 = \psi \cdot 0{,}00599$, also größer als vorher. Es wurde nun versuchsweise $J_{\text{neu}} = 0{,}95\,J_{\text{alt}} = 0{,}00114$ gesetzt. Damit ergab sich $h_{0\,\text{neu}} = h_{0\,\text{alt}} : 0{,}95 = 1{,}053$ und $H_{\text{neu}} = H\sqrt[3]{J_{\text{alt}} : J_{\text{neu}}} = 2{,}622 : \sqrt[3]{0{,}95} = 2{,}669$, das heißt eine im Vergleich zur Sohle um 0,162 höhere Spiegellage als die ursprüngliche, für die H_{alt} bei dem von Q_m durchströmten Flußteile $= 2{,}507$ gewesen war. Für $J_{\text{neu}} = 0{,}00114$, $h_{0\,\text{neu}} = 1{,}053$ und $H_{\text{neu}} = 2{,}669$ berechnete sich endlich der Geschiebetrieb zu $\psi \cdot 432{,}4 \cdot 0{,}00114^2 = 0{,}00550$, also vom ursprünglichen $\psi \cdot 0{,}00547$ so wenig verschieden, daß das endgültige Gefälle zu 0,00114 angenommen werden konnte.

137. Schlammförderung. Bei allen Versuchen über die Abrollung von Gesteinsstücken bildete der Abrieb einen feinen Schlamm, während unbedeutende Mengen manchmal in Lösung gingen[1]). Aus diesem Abrieb von lehmigen Stoffen, welche das Wasser unmittelbar der Erdoberfläche entnimmt, besteht der schwebend mitgeführte Schlammgehalt des trüben Wassers. Der Schlammgehalt scheint keinem so ausgesprochenen Gesetze zu gehorchen wie der Geschiebetrieb, wohl deswegen, weil die Schlammablagerung viel mehr Zeit in Anspruch nimmt und viel leichter gestört wird und weil das Wasser sehr große Schlammassen aufnehmen kann, ohne gesättigt zu sein.

Nach dem durch Gl. (331) ausgedrückten Gesetze des Geschiebetriebes

$$G_1 = 0{,}54\,\frac{\gamma^2}{\gamma_1 - \gamma}\,hJ(hJ - h_0 J_0)$$

müßte, weil für Schlamm $h_0 J_0$ sehr klein wird, die Schlammführung wie die zweite Potenz von hJ oder, weil nach *de Chézy* $U = c\sqrt{hJ}$ ist, die Schlammführung wie die vierte Potenz der Strömungsgeschwindigkeit U wachsen. Nun wächst aber der Abfluß selbst proportional Uh, daher wüchse der Schlammgehalt des Wassers proportional $U^3 h^{-1}$. Hiervon abweichend würde man auf Grund der *Hermanek*schen Formel $U = 34\,h^{3/4} J^{1/2}$ die Schlammförderung proportional

$$U^{8/3} J^{2/3} \quad \text{oder} \quad U^4 h^{-1}$$

und den Schlammgehalt proportional

$$U^{1/3} J^{4/3} \quad \text{oder} \quad U^3 h^{-2} \tag{337}$$

erhalten. Andererseits ist $h = q : U$ und nach *Hermanek* $J = U : 1156\,h^{3/2} = U^{7/2} : 1156\,q^{3/2}$; daher wäre bei Schlamm

$$G_1 = 0{,}54\,\frac{\gamma^2}{\gamma_1 - \gamma}\,h^2 J^2 = \frac{1}{2\,475\,000}\,\frac{\gamma^2}{\gamma_1 - \gamma}\,\frac{U^5}{q}. \tag{337a}$$

Der Ansatz bezieht sich freilich strenggenommen nur auf die Förderung auf der Sohle, aber die Ansatzform erfährt immerhin eine gewisse Bestätigung dadurch, daß die schon erwähnten Versuche von *G. F. Dea-*

1) *A. Penck*, Morphologie der Erdoberfläche, 1. Teil, Stuttgart 1894, S. 294.

con[1]) diesen zur Ansicht führten, daß, wenn das Wasser feinen Sand schwebend mitreißt, die Menge, die es mitführen kann, proportional mit U^5 sei. Die Geschiebetriebformel war ihm natürlich unbekannt, doch bemerkt er ausdrücklich, daß er die von anderer Seite geäußerte Meinung[2]), diese Menge sei proportional U^6, für unrichtig halte. In der Natur ist das Wasser der Flüsse selten gesättigt, so daß deren Schlammgehalt meist in keiner festen Beziehung zur Geschwindigkeit steht und nur ganz im allgemeinen mit ihr zu wachsen pflegt. Der Schlammgehalt der Flüsse ist auch sehr verschieden und großen Schwankungen unterworfen, wie nachstehende Tabelle[3]) zeigt, welche die in 1 m³ Wasser enthaltene Schlammenge in g angibt:

	Elbe bei Geesthacht	Maas bei Lüttich	Marne bei Paris	Seine bei Paris	Rhone bei Lyon	Saône bei Lyon	Var-Mündung	Donau bei Pest	Amu-Darja	Hugli	Irrawaddy	Nil	Mississippi
Januar ...	22,4	35	61	18	25	40	52	15	509	539	251	167	576
Februar ..	5,5	20	100	10	81	92	53	110	192	699	402	126	625
März.....	37,6	8	107	27	55	84	375	301	765	2217	333	53	681
April	85,2	7	28	7	52	16	398	100	1306	2732	577	66	382
Mai......	30,0	5	20	8	73	11	521	99	968	1972	191	47	309
Juni	42,3	9	13	8	97	10	11157	236	2228	3086	801	69	975
Juli... ..	42,1	36	8	5	135	20	1673	256	3896	1126	788	178	860
August....	39,7	27	7	4	122	32	2230	151	2109	1272	986	1492	1059
September	32,8	23	7	6	52	41	740	50	1309	1136	939	548	666
Oktober ..	20,2	78	5	4	128	88	8500	38	895	873	606	378	241
November	14,5	79	70	46	62	73	546	—	661	995	724	344	230
Dezember	51,8	43	152	49	18	62	271	21	571	778	426	289	385

Dabei ist es die Regel, daß der Schlammgehalt nach unten zunimmt; so wurde in vier aufeinander folgenden Jahren im Sutley bei Rupar an den schlammreichsten Tagen nachstehendes Verhältnis des Schlammes zum Wassergewicht bei Proben aus verschiedenen Tiefen gemessen[4]):

	Strömungsgeschwindigkeit	Tiefe unter der Oberfläche in m							
	m sec⁻¹	0	0,46	0,91	1,37	1,83	2,29	2,74	3,20
1894	2,38	1 : 69	1 : 68	1 : 66	1 : 66	1 : 64	1 : 63	1 : 59	1 : 34
1895	1,99	1 : 59	1 : 50	1 : 48	1 : 45	1 : 42	1 : 40	—	—
1896	3,54	1 : 79	1 : 72	1 : 60	1 : 54	—	—	—	—
1897	2,65	1 : 78	1 : 75	1 : 72	1 : 63	1 : 57	—	—	—

1) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 118 (1894), S. 95.

2) *W. Airys* Ausdruck für den Strömungsdruck wurde zuweilen unberechtigterweise als Ausdruck für den Geschiebetrieb aufgefaßt.

3) *A. Penck,* Morphologie, 1. Teil 1894, S. 300.

4) *R. B Buckey,* Irrigation Pocket Book, London 1911, S. 97.

Daß es die Turbulenz und die mit den Pulsationen zusammenhängenden Druckschwankungen sind, welche veranlassen, daß Wirbel oder aufwärts gerichtete Strömungen den Schlamm aus dem Boden in die Höhe reißen, ist sicher, aber Näheres ist über den Vorgang nicht bekannt. Nach *J. Dupuit*[1]) nimmt zwar die Fähigkeit des Wassers, Körper schwebend zu erhalten, wesentlich mit dem Geschwindigkeitsunterschiede benachbarter Fäden, also mit $\frac{du}{dz}$ (worin z die Tiefe), zu, bewegen sich aber die Schwebeteilchen, soweit dem nicht die Schwere entgegenwirkt, gegen die Stelle hin, wo u sein Maximum hat. Auch nach *G. Jäger*[2]) bewegen sich kleine Körperchen von Stellen größeren zu solchen kleineren Geschwindigkeitsgefälles. Hinzugefügt werde noch, daß Teilchen, die sich in gekrümmten Wasserfäden befinden, vermöge der Fliehkraft (vgl. oben S. 11) aus ihnen herausgedrängt werden müssen. *A. Flamant*[3]) meint, daß die Tragfähigkeit des Wassers sowohl mit der Turbulenz und daher mit der Geschwindigkeit und dem Profilradius als auch innerhalb desselben Querschnittes mit dem Geschwindigkeitsgefälle wachse. Des größeren Geschwindigkeitsgefälles wegen nehme die Tragkraft mit der Tiefe zu. Daß die in die Höhe gebrachten Teilchen nur langsam niedersinken, ist schon oben erwähnt worden.

Mitgerissener Schlamm kann dadurch Schaden stiften, daß er sich anderwärts wieder ablagert. Ausgedehnte einschlägige Beobachtungen nahm *R. G. Kennedy*[4]) in Bari-Doab vor. Dessen Bewässerungsnetz war besonders geeignet, weil es das ganze Jahr hindurch gleichmäßig durchflossene Strecken besitzt, die nie entschlammt wurden und im Laufe der Zeit ihren Querschnitt selbsttätig derart verändert haben, daß nunmehr weder Ablagerung noch Auswaschung erfolgt. Das Stromwasser ist im Sommer schlammiger als im Winter, aber der Schlamm lagert sich in den oberen Strecken ab, bis das Winterwasser ihn wieder aufnimmt, so daß der Schlammgehalt im unteren Teil des Netzes sich kaum ändert, außer wenn ein Hochwasser eine andere Schlammsorte bringt. Die mittlere Geschwindigkeit (in m sec^{-1}) in diesen Strecken fand *Kennedy*

$$U_n = 1{,}80\, h^{0{,}64}, \tag{337b}$$

worin h die Tiefe der sich fast rechtwinklig ausbildenden Querschnitte bedeutet. Die Breite schien ohne Einfluß. Übrigens dürfe bei festem Boden bei gleichem Wasser U_n überschritten werden, während Unter-

1) *J. Dupuit*, Études, S. 220.
2) Wien, Ber. 112^{2a} (1903), S. 1685.
3) *A. Flamant*, Hydraulique, 2. éd. Paris 1900, S. 308; 3. éd. 1909, S. 303.
4) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 119 (1895), S. 281.

schreitungen Verschlammung zur Folge hätten. Gl. (337b) mag zum Schlusse berechtigen, daß der Schlammgehalt mit irgendeiner Potenz von $U_n h^{-0,64}$ in festem Verhältnis stehe, was der Formel (337) entspräche, denn nach ihr wüchse der Schlammgehalt fast genau wie $(U_n h^{-0,64})^3$. *R. B. Buckey*[1]) vermutet, daß in Sind, dessen Kanäle vom Indus gespeist werden, U_n nur etwa $^3/_4$ obigen Wert haben darf, wie denn auch für die Kanäle des Shwebo und Mandalay in Birma sich obiges U_n zu groß zeigt.

Bei großen Geschwingkeiten kann man jedenfalls den Schlammgehalt bedeutend steigern. So kann bei Fortschaffung von Baggergut durch Leitungen $^1/_{12}$ bis $^1/_7$ Bodengehalt als Regel[2]) gelten und scheint man selbst Gemische von $^3/_5$ Wasser und $^2/_5$ Erde schon gefördert zu haben.

Um der Frage der Schlammablagerung in Stromerbreiterungen und Seebecken[3]) näherzutreten, werde zunächst angenommen, daß der Schlammfall sich längs einer Wassersäule nicht ändere, d. h. daß jede Scheibe der Säule ebensoviel Schlamm (Schweb) nach unten abgebe, wie sie von oben empfängt. Zu oberst mag dabei eine Klärung eintreten, die aber nirgends bis zur Sohle reiche. Die Schlammregendichte, d. i. die Höhe der auf die Sohle in der Zeiteinheit fallenden Schwebmenge ist dann bei gleicher Wassertrübung über allen Sohlenpunkten gleich groß und unabhängig von der Tiefe (Säulenhöhe), so daß es gleichgültig ist, wie rasch das Wasser über der Sohle strömt. Wenn die Bewegung des Wassers lebhaft genug ist, um ab und zu den Schlamm aufzuwirbeln, so spielen sich zwei Vorgänge gleichzeitig ab: ein fortgesetztes Sinken der Trübe auf den Boden und ein zeitweises Aufsteigen von Schlammwolken aus letzterem. Wo die Bewegung am ruhigsten, also ungefähr dort, wo der Querschnitt am tiefsten ist, wird die Deckenbildung am raschesten erfolgen. Dabei handelt es sich um den Unterschied des gleichmäßigen Sinkens und des ungleichmäßig verteilten Aufwirbelns, so daß anzunehmen ist, daß, wo die beiden Vorgänge sich ziemlich die Wage halten, schon eine geringe Turbulenzabnahme eine wesentlich stärkere Ablagerung verursacht. Abweichend von den geschilderten Schwebablagerungen muß eine solche geradezu proportional mit der Tiefe vor sich gehen, wenn Hochwässer das ganze Seebecken mit gleichmäßig trübem Wasser füllen, das sich dann durch Stehen klärt. Dabei bliebe zwar die Sohle gewellt, doch würden die Wellen allmählich

---

1) Irrigation Pocket Book, London 1911, S. 104.

2) *Paulmann* und *Blaum*, Z. d. V. deutsch. I. 53 (1909), S. 972. *B. Salomon*, ebenda 31 (1887), S. 944, 945.

3) Einschlägige geologische Arbeit *G. Götzinger*: Sedimentierung der Lunzer Seen, Verhandlungen d. geolog. Reichsanstalt 1911, S. 173. Vgl. oben S. 399, 409.

flacher werden. Freilich käme der Umstand hinzu, daß schlammhaltiges Wasser schwerer als reines ist und daher bestrebt ist, in die Vertiefungen zu fließen und diese einzuebnen. Eine ähnliche Wirkung ist einer Wasserbewegung zuzuschreiben, bei welcher die Schwammteilchen auf der Sohle kollern oder gleiten oder sich nur wenig über sie erheben, bis sie an den tiefsten Stellen zur Ruhe kommen.

J. Seddon[1]) stellte Klärversuche an, welche lehrten, daß die Klärung an der Oberfläche beginnt und daß die Schnelligkeit, mit welcher ein bestimmter Trübungsgrad abwärts wandert, im Anfang nach der Füllung äußerst gering ist. Der Grad $4^1/_2$ der Lichtmeßskale rückte z. B. in 2 Fuß (0,6 m) Tiefe etwa 0,1 Fuß (3 cm) pro Stunde, in 8 Fuß (2,4 m) Tiefe aber 0,4 Fuß pro Stunde, also 4mal so schnell, abwärts. *Seddon* glaubt aber nicht an einen beschleunigten Fall der Teilchen, weil dem der Wasserwiderstand entgegenstehe, sondern an einen verzögerten Bewegungsbeginn, weil das Wasser nach dem Füllen geraume Zeit zur Beruhigung brauche. Diese Verzögerung sei für die kleineren Teilchen erheblicher als für die gröberen. Wind — also Wellen — zeigte sich übrigens ohne Einfluß. Weder *Seddon* noch *Vauthier* ziehen also in Betracht, daß ein Teilchen durch sein Sinken eine zunehmende Abwärtsströmung bewirken kann, die selbst wieder das Sinken immer mehr erleichtert, daß also eine Beschleunigung doch möglich ist. Da Unruhe im Wasser die Stromfäden verschiebt, könnte sie hierdurch die Beschleunigung hintanhalten[2]).

Wenn der Schlamm eine gewisse Dicke erreicht hat, ist der Vorgang nicht mehr als Niedersinken vereinzelter Flocken, sondern als Aufwärtsfließen von Wasser durch eine Schlammschicht aufzufassen[3]). Das Wasser wird dabei stets durch dieselbe Kraft — dem Übergewicht der gesamten Schlammasse — emporgetrieben. Würde der Schlamm dicht gepreßt die Höhe s annehmen, so erfüllt er bei einer Höhe z über der Flächeneinheit Sohle den mittleren Querschnitt $s : z$ und bleibt für das Wasser der Querschnitt $(z - s) : z$ übrig. Diesen muß es auf der Länge z durchströmen. Bei seiner Zähigkeit η erlangt es daher gemäß der Bauweise der Formel (14f) S. 26, wenn k eine Konstante bedeutet, die Geschwindigkeit

$$\frac{1}{k}\,\frac{z-s}{\eta z^2}.$$

1) Journ. f. Gasb. u. Wass. 33 (1890), S. 8 nach Journal of the Association of Engineering Societies 1889, Nr. 10.

2) In städtischen Abwässern besteht der Feinschlamm fast ganz aus organischen Stoffen, wird beim Sinken allmählich vom Fett umschlossen, dadurch zum Teil schwebend erhalten, und gerät schließlich in Fäulnis. Auf ihn hat daher das oben Gesagte keinen Bezug.

3) Bisher unveröffentlicht.

Der aufwärts gerichtete Durchfluß beträgt also

$$\frac{z-s}{k\eta z^2} \cdot \frac{z-s}{z} = \frac{(z-s)^2}{k\eta z^3},$$

und da der abwärts gerichtete Schlammfall ebenso groß sein muß, sein Querschnitt aber $s:z$ ist, ergibt sich die Schlammgeschwindigkeit

$$(337\,c) \qquad -\frac{dz}{dt} = \frac{(z-s)^2}{k\eta s z^2},$$

aus der

$$-dt = k\frac{\eta s z^2}{(z-s)^2}dz$$

oder

$$-t = k\eta s\left[\frac{(z-s)^2-s^2}{z-s} + 2s\log\text{nat}(z-s)\right] + \text{konst.}$$

hervorgeht. Hiernach fände sich der Zeitaufwand zur Verminderung von z_1 auf z_2 zu

$$(337\,d) \qquad t_{12} = k\eta s\left\{z_1\frac{z_1-2s}{z_1-s} - z_2\frac{z_2-2s}{z_2-s} + 2s\log\text{nat}\frac{z_1-s}{z_2-s}\right\}.$$

Inwieweit diese Formel zutrifft, können nur Versuche lehren.

Eine Endverzögerung ähnlich dieser Theorie neben einer Anfangsverzögerung ähnlich *Seddon* beobachtete übrigens *C. Barus*[1]).

Mit den Schlammwolken im Wasser bieten die Wolken in der Luft eine gewisse Ähnlichkeit. Auch wenn man von elektrischen und thermodynamischen Vorgängen absieht, bleibt aber noch der Unterschied, daß das Eigengewicht der Tröpfchen ein Vielfaches jenes der Luft ist und daß letztere nur geringe Zähigkeit besitzt. Erwähnt sei hier nur, daß bei dem Niedersinken die Vereinigung der ursprünglich ziemlich gleichen Tröpfchen bewirkt, daß die Gewichte der häufigsten Tropfen in jedem Regen sich nach *Defant* wie 1 : 2 : 4 : 8 verhalten[2]).

138. Der Umriß gleichen Widerstandes. Es liegt nahe, den Umriß eines natürlichen Wasserlaufes als solchen einer äußersten Gleichgewichtslage aufzufassen[3]); d. h. sich alle Geschiebestücke gleich groß zu denken und auf der Böschung ein Geschiebestück anzunehmen, das sich eben noch in Ruhe befindet. Beträgt das Gewicht (die Vertikalkraft) im Wasser V, so ist bei einer Böschungsneigung α der Normaldruck auf die Böschung

$$N = V\cos\alpha$$

und die Komponente der Schwere in der Richtung der größten Böschungsneigung $V\sin\alpha$. Die Stoßkraft des Wassers werde, indem der Einfachheit halber auf *Sternbergs* Auffassung (s. oben S. 479) zurückgegriffen

1) Bulletin of the U. S. Geolog. Survey 5 (1887), S. 522.

2) *A. Wegener*, Thermodynamik der Atmosphäre, Leipzig 1911, S. 261. Siehe auch Fußnote 4 S. 398.

3) *Ph. Forchheimer*, mitgeteilt in *F. Wittenbauer*, Aufgaben aus der technischen Mechanik 3, Berlin 1911, S. 49, 245.

wird, proportional der Tiefenlage z unter dem Spiegel, also gleich pz angenommen, worin p für jede Böschungsstelle denselben Wert hat. Die beiden in der Böschungsfläche wirkenden, aber senkrecht zueinander gerichteten Kräfte $V \sin\alpha$ und pz setzen sich zu einer ebenfalls in der Böschungsfläche wirkenden Kraft $\sqrt{V^2 \sin^2\alpha + p^2 z^2}$ zusammen. Beträgt nun die Reibungsziffer zwischen Böschung und Geschiebestück $\operatorname{tang}\varphi$, so ist das Stück, wo es auch liege, soeben in Ruhe, wenn für den Umriß die Gleichung

$$V^2 \sin^2\alpha + p^2 z^2 = V^2 \cos^2\alpha \operatorname{tang}^2\varphi \tag{338}$$

erfüllt ist. An der tiefsten Stelle $z = z_{max}$, wo der Sohlenumriß wagrecht verläuft oder $\alpha = 0$ ist, gilt

$$p z_{max} = V \operatorname{tang}\varphi \tag{338a}$$

und die Vereinigung von (338) und (338a) liefert

$$\sin^2\alpha + \frac{z^2}{z_{max}^2} \operatorname{tang}^2\varphi = \operatorname{tang}^2\varphi - \sin^2\alpha \operatorname{tang}^2\varphi$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \sqrt{\frac{z_{max}^2 - z^2}{z_{max}^2}}. \tag{338b}$$

Nun ist, wenn man mit s die Umrißlänge bezeichnet,

$$\sin\alpha = \frac{dz}{ds}$$

und daher kann man (338b) auch als Differentialgleichung in der Form

$$ds = \frac{z_{max}}{\sqrt{z_{max}^2 - z^2}} \cdot \frac{dz}{\sin\varphi}$$

schreiben, deren Integral

$$s = \frac{z_{max}}{\sin\varphi} \arcsin\frac{z}{z_{max}} + \text{konst.} \tag{338c}$$

lautet. Mißt man die Kurvenlänge vom Spiegelpunkt $z = 0$ aus, so entfällt die Konstante und man hat

$$\frac{z}{z_{max}} = \sin\frac{s \sin\varphi}{z_{max}}. \tag{339}$$

Für die Umrißmitte wird $z = z_{max}$ und sohin zeigt sich die Umrißlänge vom Spiegelpunkt bis zur Mitte

$$S = \frac{\pi}{2} \frac{z_{max}}{\sin\varphi}. \tag{340}$$

Für den Krümmungshalbmesser des Umrisses gilt bei entsprechender Vorzeichenwahl

$$r = -\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{dz}{\sin\alpha\, d\alpha}. \tag{340a}$$

Da nun nach (338b)

$$\cos\alpha = \cos\varphi \sqrt{1 + \frac{z^2}{z^2_{max}} \operatorname{tang}^2\varphi}$$

ist, folgt durch Differentiation ein Ausdruck für $\sin\alpha\, d\alpha$, der in (340a) eingesetzt

(340b) $$r = \frac{z_{max}}{\sin\varphi \operatorname{tang}\varphi} \sqrt{\frac{z^2_{max}}{z^2} + \operatorname{tang}^2\varphi}$$

liefert. Hiernach ist r im Spiegel unendlich groß, nimmt mit wachsender Tiefe ab und mißt in der Bettmitte

(340c) $$r_{min} = z_{max} : \sin^2\varphi .$$

Die Umrißneigung α wird am Spiegel, wo der Wasserstoß verschwindet, dem Wesen der Aufgabe entsprechend zu φ. Der übrige Verlauf des Umrisses ist derart, daß der Krümmungsradius sich nur so viel ändert, als die statischen Verhältnisse es erfordern. Bei Rücksichtnahme auf die Haltbarkeit der Böschungen liefert daher der betrachtete Umriß den Querschnitt, der bei gegebener Fläche am meisten Wasser führt, und nicht, wie gewöhnlich gesagt wird, der Kreisbogen mit anschließenden Tangenten. Demgemäß verlangt letztere Ausführungsweise bei gleicher Wasserführung die größere Aushubfläche und zwar gelten folgende Zahlen:

Böschung am Spiegel	1:1	1:1½	1:2	1:2½	1:3
Flächenverhältnis	1,024	1,030	1,034	1,036	1,037

Bisher wurde stillschweigend angenommen, daß das Längsgefälle zu gering sei, um für ein Rutschen des Geschiebes in Betracht zu kommen. Nun werde dem Rinnsal eine Längenneigung ι erteilt[1]). Dann wird erstens die parallel zur Symmetrieebene des Gerinnes und senkrecht zu seinen Erzeugenden wirkende Kraft V auf $V\cos\iota$ vermindert und tritt zweitens zur Stoßkraft des Wassers überall eine Teilkraft $V\sin\iota$ des Geschiebegewichtes hinzu. Diese Teilkraft ließe sich aber im *ursprünglichen, gefällosen* Gerinne auch erzeugen, dadurch, daß man dessen Spiegel um ein gewisses Stück a hebt, denn dann wüchse der früheren Annahme gemäß die Stoßkraft um pa; man müßte also nur

(341) $$pa = V\sin\iota$$

machen, um das Längsgefälle durch eine Spiegelerhebung zu ersetzen. Von Belang ist ferner, daß die Ableitung von (339) zwar ein unveränderliches Geschiebegewicht V voraussetzt, daß es aber auf dessen Größe nicht ankommt, so daß sich V ohne weiteres durch $V\cos\iota$ ersetzen läßt.

1) Bisher unveröffentlicht.

Die für kaum geneigte Läufe entwickelte Gleichung (339) bleibt also auch jetzt für den Querschnitt senkrecht zu den Erzeugenden bestehen, wenn man nur den Spiegel nicht mehr an der Stelle $z = 0$, sondern an der Stelle $z = a$ liegen läßt. Da für die Geschwindigkeit in der Stromrinne die Reibung

$$V \cos \iota \cdot \operatorname{tang} \varphi = p \cdot z_{\max} \tag{341a}$$

sein muß, folgt in Verbindung mit (341)

$$a = \frac{\operatorname{tang} \iota}{\operatorname{tang} \varphi} z_{\max}, \tag{341b}$$

worin $z_{\max}$ die senkrecht zum neuen Spiegel (also unter der Neigung $90^{\circ} - \iota$) gemessene Tiefenlage des tiefsten Sohlenpunktes unter der Parallelebene zum Spiegel, also $z_{\max} - a$ die in gleicher Richtung gemessene größte Wassertiefe ist. Eine Nachrechnung, die hier nicht weiter ausgeführt werde, zeigt, daß im Spiegel die Bettneigung gegen die Wagrechte, wie mechanisch nicht anders möglich, φ beträgt. Für den halben benetzten Teil des senkrecht zu den Erzeugenden geführten Schnittes findet sich nach (339), wo $z = a$ zu setzen ist, und (340) die Länge

$$S_a = S - s = \frac{z_{\max}}{\sin \varphi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{z_{\max}} \right). \tag{341c}$$

Auf denselben Querschnitt wie bei einer zu berücksichtigenden Längsneigung ι käme man übrigens auch bei vernachlässigbarem Flußgefälle, falls man die Geschwindigkeit am Bettumfange $= p(z + a)$ annehmen würde, womit man bei richtiger Wahl der Konstanten a der Wahrheit näher als mit der einfachen Annahme pz kommen dürfte.

Nachdem nunmehr die Gleichgewichtsform der Wasserlaufquerschnitte abgeleitet ist, drängt sich die Frage auf, ob zu erwarten steht, daß sie sich im allgemeinen ausbildet. Die Frage muß — wenigstens für die Flüsse mit Geschiebebett — verneint werden. Bei Überschreitung des Gleichgewichtes kollert nämlich das Geschiebe gegen die tiefste Profilstelle. Das Wasser trachtet also — wenigstens bei glatten, festen, steilen und geraden Ufern — seine Sohle einzuebenen, wie man sich in Versuchsgerinnen überzeugen kann[1]. In der Natur treten zahlreiche störende Einwirkungen auf, darunter wohl als wesentlichste, daß die Läufe geschlängelt zu sein pflegen; die Bettumrisse haben daher die verschiedensten Formen[2]. Nach *R. Siedek* weichen sie in den Geraden nicht sehr von der Parabelform ab. Über das Verhältnis der Tiefe zur Spiegelbreite hat derselbe[3] ausgedehnte Untersuchungen angestellt, deren Er-

1) S. oben S. 492 über die fast rechteckigen Kanalquerschnitte in Bari-Doab.

2) Vgl. *R. Jasmund* in Handb. d. Ingenieurwissenschaften, 3. Wasserbau, 1. Bd., 4. Aufl., S. 230.

3) Z. d. öst. I. u. A.V. 54 (1902), S. 135; 57 (1905), S. 78.

gebnis, es sei im normalen Fluß von der Spiegelbreite B (in m) die in m gemessene Tiefe

$$T_n = \sqrt{0{,}0175 B - 0{,}0125}, \tag{47}$$

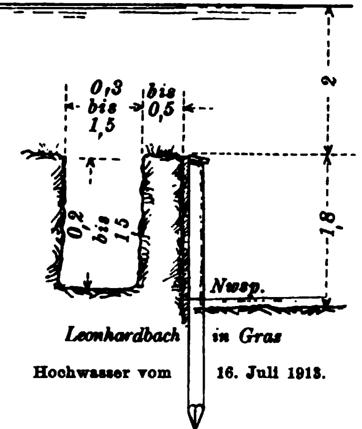
schon oben S. 72 mitgeteilt wurde.

Tatsächlich scheint aber, wo keine Störungen obwalten, die Krümmung nicht wie bei der Parabel gegen die Ufer zu abzunehmen, sondern hier schärfer zu werden. *F. Kreuter*[1]) nimmt daher, freilich ohne nähere Begründung, die Gleichung

$$\frac{z}{z_{max}} = \frac{\sin\varphi - \sin\alpha}{\sin\varphi + \sin\alpha} \tag{342}$$

an, die er mit einigen Aufnahmen vergleicht.

Vom Bettquerschnitt wohl zu unterscheiden ist der Runsenquerschnitt, weil letzterer zwar eine Folge der Betteintiefung ist, aber *oberhalb* des Wildbachspiegels durch seitliche Erosion, Abrutsch oder Einsturz entsteht und recht verschiedenartige Formen annehmen kann[2]).



Hochwasser vom 16. Juli 1913.

Hier sei auch erwähnt, daß wenn ein seichter Streifen an ein Tiefbett grenzt, wie das bei Ausuferungen häufig der Fall ist, die ungleichen Geschwindigkeiten Wirbel mit senkrechten Achsen zur Folge haben. Diese Wirbel können unweit der Tiefbettkante in der höheren Sohle Längsgräben ausheben, welche zuweilen fast wie Rohrgräben aussehen.

139. Einfluß des Geschiebetriebes auf die Geschwindigkeit. Schon bei Behandlung der Strömung in offenen Läufen (s. oben S. 78) wurde aufmerksam gemacht, daß mit beginnender Geschiebebewegung unter sonst gleichen Umständen die Geschwindigkeit U abnimmt, dies also auch der Koeffizient c der Geschwindigkeitsformeln tut. Die Kenntnis, daß bei größeren Geschwindigkeiten c wieder abnehme, ist nicht neu. So leitete *W. R. Kutter*[3]) für seine Rauhigkeitsziffer aus Messungen, die *Grebenau* am Rhein angestellt hatte, die Formel

$$n = \sqrt{\frac{\sqrt{JR}}{\left(23 + \frac{0{,}00155}{J}\right)\frac{U}{R}}} \tag{343}$$

1) Ebenda 56 (1904), S. 670.

2) Siehe diesbezüglich *J. Stiný*, Die Muren, Innsbruck 1910, S. 26f., woselbst weitere Literatur.

3) Allgem. Bauz. 38 (1873), S. 285.

ab, die nur insofern nicht zutrifft, als die Zunahme von n nach den erwähnten Messungen nicht allmählich in eine Abnahme übergeht, sondern plötzlich einer solchen Platz macht. *R. Lauterburg*[1]) bemerkt, daß die Geschiebeführung die Strömung verzögere und daß z. B. die Formel von *Ganguillet* und *Kutter* für die Sihl Geschwindigkeiten gegeben habe, die wohl nie vorkommen. *U. Huber*[2]) weist für ein Hochwasser in Reichenberg nach, daß die Formel von *Bazin* zwei- bis dreimal zu großen Durchfluß ergebe, und fügt hinzu, daß überhaupt bei Hochwasser die Koeffizienten c so ungleichförmig sind, daß ihre Wahl zur Willkür werde. *C. Valentini*[3]) erzählt, daß in Panama 1890 ein großer Stein beobachtet wurde, den eben noch das Wasser schleppte, und der sofort liegen blieb, wenn sich ihm kleinere anschlossen. Das sei ein Beweis, daß die Geschwindigkeit sofort abnehme, wenn die Geschiebemenge wächst.

Du Boys[4]) selbst warnt davor, das hJ seiner Formel durch eine nach den üblichen Ausdrücken berechnete Geschwindigkeit U zu ersetzen, weil eben, wenn das Sandtreiben beginnt, diese Ausdrücke nicht mehr zutreffen. Diese und andere Äußerungen bewogen *A. Schoklitsch* zu Versuchen[5]) über die Änderung der Rauhigkeitsziffer γ in der *Bazin*schen Gleichung

$$c = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \tag{45}$$

bei Überschreitung der Grenzschleppkraft. Er verwendete Porzellankugeln von 0,04 cm^3 Inhalt oder 0,425 cm Dmr. und dem Eigengewicht 2,17. Die Wassertiefe h schwankte zwischen 1 und 4,5 cm, das Gefälle J zwischen 0,001 und 0,003, die Geschwindigkeit U zwischen 0,19 und 0,79 m sec^{-1}. Er fand vor Beginn des Geschiebetriebes das *Bazin*sche $\gamma = 0{,}265\ m^{1/2}$ und nach dem Beginn

$$\textit{Bazins}\ \gamma = 0{,}265 + \sqrt[4]{5000\,(hJ - h_0 J_0)}, \tag{344}$$

worin 5000 die Dimension einer Länge hat und so wie h und h_0 in m gedacht ist, ferner h und h_0 dieselbe Bedeutung wie in Gl. (331) besitzen.

140. Einfluß der Krümmung auf den Querschnitt. Der Querschnitt eines vom Wasser ausgewaschenen Bettes hängt nicht nur vom

1) Schweizerische Stromabflußmengen, 2. Aufl., Bern 1876, S. 40.

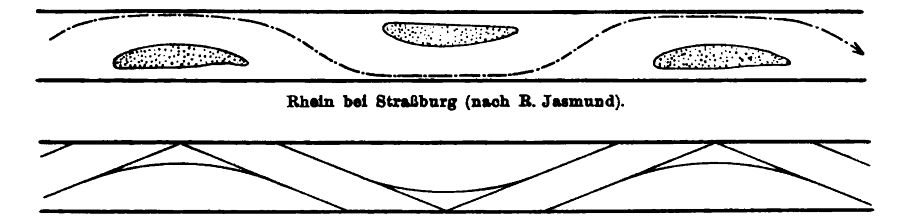
2) Österr. Woch. f. d. öff. B. 6 (1900), S. 288.

3) Sistemazione dei torrenti e dei bacini montani, Mailand 1912, S. 23 nach *L. N. B. Wyse*, Rapport de mission en Columbie, 1891.

4) Ann. d. ponts et chauss. (5) 18 (1879²), S. 153.

5) Im hydrotechnischen Laboratorium der technischen Hochschule in Graz. Bisher unveröffentlicht.

Höhenriß, also dem Gefälle, sondern auch vom Grundriß, also den Krümmungen der Bettachse ab. Zunächst ist es klar, daß wenn eine Kurve auf eine Gerade folgt, die Geschwindigkeiten, die das Wasser in der Geraden hatte, einen Aufstau am konkaven Ufer der Kurve erzeugen müssen, und daß dieser Aufstau, wenn man von der Reibung absieht, bewirken muß, daß das Ufer die ankommenden Geschwindigkeiten (nicht etwa die Wasserteilchen selbst) so reflektiert, wie ein Spiegel die Strahlen. Die verschiedenen zurückgeworfenen Geschwindigkeiten setzen sich dann untereinander sowie mit noch nicht zurückgeworfenen zu den resultierenden Geschwindigkeiten zusammen, soweit nicht die Sohlenreibung eine gleichförmigere Verteilung der Geschwindigkeiten veranlaßt. Das Entstehen von Strichen mit besonders heftiger Strömung wird auch dadurch gedämpft, daß die Ufer eine Neigung zu haben pflegen, denn eine solche bewirkt, daß nicht *eine* hohe zurückwerfende Fläche vorhanden ist, sondern deren viele niedrige bestehen, wie man erkennt, wenn man sich die Böschung abgetreppt denkt. Wenn ein Streifen paralleler Geschwindigkeiten ein Ufer schräg trifft, setzt sich also jede zurückgeworfene Geschwindigkeit mit der folgenden ankommenden zu einer in der Uferrichtung zusammen[1]). Wo ein konkaves Ufer vorhanden ist, läuft daher der Stromstrich zunächst ihm entlang und wird erst zurückgeworfen, wo die Ankunftsgeschwindigkeiten aufhören[2]). Es werden also Auswaschungen am eingebuchteten Ufer stattfinden, bis die Querschnittsvergrößerung bei der unveränderlichen Wassermenge wieder eine genügende Geschwindigkeitsverringerung hervorruft.



Rhein bei Straßburg (nach R. Jasmund).

Aus dem geschilderten Reflexionsvorgange geht hervor, daß der Kolk nicht das ganze Konkavufer begleiten muß, sondern daß die Kolke verschränkte Reihen bilden können, wofür *H. Engels* Beipiele vom Rhein, Inn, der Donau, Elbe und Weichsel zusammengestellt hat[3]). Nach Be-

1) *G. Hagen,* Handbuch der Wasserbaukunst, 2. Teil, 1. Bd. 3. Aufl., Berlin 1871, S. 362 sieht die Ursache der Bewegung längs einer Fläche im Beharrungsvermögen.

2) Bisher unveröffentlicht.

3) Z. f. Bauw. 55 (1905), Blatt 64.

obachtungen von *H. Engels*[1]) im Laboratorium kann in solchen Strecken das wandernde Geschiebe von einem ausbiegenden Ufer zum nächsten unterhalb überschlagen.

Zu eingangs geschildertem Vorgang kommt ein zweiter hinzu. Wie *J. Boussinesq*[2]) und *J. Thomson*[3]) ziemlich gleichzeitig bemerkten, verdrängen bei dem Übergang aus einer Geraden in eine Kurve die Wasserteilchen von der größeren Fliehkraft, also die schnelleren Teilchen, die ursprünglich an der Oberfläche flossen, die langsameren, die in der Tiefe schlichen. Die ganze Masse gerät also in Drehung, strömt am Kurvenbeginn gegen das hohle Ufer, gleitet hier abwärts und kehrt an der Sohle zurück. Auch diese Bewegung führt zu einer Vertiefung am eingebuchteten Ufer neben einer Erhöhung am ausbauchenden. In Kurven ist also die Wassertiefe ungleichmäßig, wodurch, wie hier bemerkt werde, bei gleicher mittlerer Tiefe der Geschiebetrieb nach (330c) wachsen würde. Vergleicht man beispielsweise den Geschiebetrieb zweier Streifen von der Breite 1 und von der Tiefe h mit dem zweier anderer von den Tiefen $h + \Delta h$ und $h - \Delta h$, so hat man bei gleichem Gefälle J das eine Mal

$$2\psi h(h - h_0)J^2 = 2\psi(h^2 - hh_0)J^2$$

das andere Mal

$$\psi(h + \Delta h)(h + \Delta h - h_0)J^2 + \psi(h - \Delta h)(h - \Delta h - h_0)J^2$$

also um $2\psi J^2(\Delta h)^2$ mehr. Bei ursprünglich *gleicher* mittlerer Tiefe würde sich demnach die Kurve eintiefen, also die Fläche vergrößern und die Geschwindigkeit vermindern, bis der Geschiebetrieb auf den der geraden Strecke herabgesunken ist. Trotz der Querschnittsvergrößerung ist es nicht gesagt, daß eine Gefällsverminderung eintreten muß, denn dieser wirkt der Umstand entgegen, daß die Bewegung unter sonst gleichen Umständen im Bogen mehr Gefälle als in der Geraden erfordert. *Boussinesq* geht sogar von der Forderung gleichen Gefälles in Bogen und Geraden aus, um den Zusammenhang zwischen Eintiefung und Krümmung zu ermitteln. Er hat (s. oben S. 241) bei einer mittleren Tiefe h in der Kurve vom Halbmesser $\mathfrak{R}$

$$J = \frac{U^2}{h}\left(\frac{1}{c^2} + \tau_1 \sqrt{\frac{b}{\mathfrak{R}}}\right) - \frac{U^2}{h}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{c^2}\sqrt{\frac{b}{\mathfrak{R}}}\right). \tag{130}$$

1) Z. f. Bauw. 55 (1905), Sp. 666 und 50 (1900), Sp. 358. — *Engels* ist der Ansicht, daß auch *G. Lavale* eine Überquerung des Stromes durch die einzelnen Kiesstücke beobachtet habe; die betreffende Veröffentlichung „Unsere natürlichen Wasserläufe", hrsg. v. *J. Rapp*, Weilheim 1888, läßt das zweifelhaft.

2) Eaux courantes = Paris, Mém. prés. par div. sav. 23 (1877), S. 610.

3) London Roy. Soc. Proc. 25 (1877), S. 6. Siehe auch *H. Girardon* S. 16 im 6. internationalen Binnenschiffahrtskongreß, Haag 1894, 7. Frage.

Beträgt in der Geraden das Gefälle wieder J, die Flußbreite wieder b, aber die mittlere Tiefe h_1, so gilt

$$J = \frac{U^2}{h_1} \cdot \frac{1}{c^2},$$

woraus sofort

$$\frac{1}{h_1} = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{b}{\mathfrak{R}}}\right)$$

oder

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{b}\left(\frac{h}{h_1} - 1\right)^2 \tag{345}$$

folgt[1]). Diese Gleichung entspreche den Erhebungen an der Garonne ebensogut wie die unmittelbar aus letzteren geschöpfte Aufstellung[2]) *Fargues*:

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = 0{,}03h^3 - 0{,}23h^2 + 0{,}78h - 0{,}76, \tag{346}$$

in der h die Tiefe bei Niedrigwasser bezeichnet. Daß die gekrümmten Strecken die größere Tiefe besitzen, haben übrigens schon vor den Genannten *Legrom* und *Chaperon*[3]) ausgesprochen.

Fargue[4]) glaubte die Anhegerung des Schotters an die Konvexen einer Zentripetalkraft des wirbelnden Wassers zuschreiben zu müssen. Als er nämlich auf eine einen runden Wassertrog bildenden Drehscheibe Sand schüttete, flog dieser zwar bei genügend raschem Umlauf der Scheibe gegen den Rand, rückte aber bei plötzlichem Stillstand gegen die Scheibenmitte. Es ist aber nicht eine Strömung, sondern die Abnahme seiner Fliehkraft, die jetzt den Sand nach innen schafft[5]). Da nämlich nunmehr das Wasser schneller umläuft, als der durch die Reibung an der feststehenden Scheibe aufgehaltene Sand, ist die Fliehkraft eines Kornes jetzt geringer, als sie wäre, wenn ein Wasserteilchen seinen Platz einnehmen würde. Nun ist die Wasseroberfläche parabolisch also der größeren Tiefe wegen der Wasserdruck auf die Außenfläche des Kornes größer als der auf die Innenfläche; daher muß bei zu geringer eigener Fliehkraft das Teilchen nach innen ausweichen. Man kann sich hiervon überzeugen, indem man in einem Becherglas Wasser durch Umrühren in Drehung versetzt und dann Sand hineinwirft. Er fliegt sofort an die Wand, gleitet ihr entlang bis zum Boden und läuft hier gegen die Mitte. Hängt man ein Sandkorn an einen Faden, so kann man sehen, daß es noch ganz nahe am Boden nach außen will und erst,

1) Eaux courantes, S. 615.
2) Ann. d. ponts et chauss. (4) 15 (1868[1]), S. 44.
3) Ebenda (1) 1838[1], S. 342 f.
4) *L. Fargue,* La forme du lit des rivières à fond mobile, Paris 1908.
5) Bisher unveröffentlicht.

wenn es den Boden wirklich berührt, nach innen wandert. Da nun in Flußkurven ähnliches stattfinden muß, wird auch hier das Geschiebe, wenn es rollt, sich der Konvexen nähern, wenn es frei schwebt, aber gegen die Konkave streben. *O. Fargue* hat aus dem Anwachsen der Konvexen gefolgert, daß man die Ufer derart formen soll, daß sich die gegenüberliegenden Konvexufer an den Wendepunkten der Stromachse übergreifen[1]). Im entgegengesetzten Falle entstünden zwei Uferkolke und in der Strommitte eine Bank.

Durch Zeichnung der Schaulinie, der er die Flußlänge der Garonne als Abszisse und die Krümmung als Ordinaten gab, gelangte *O. Fargue* noch zu folgenden Gesetzen. Die Tiefe des Fahrwassers (der Stromrinne, passe navigable) ist eine Funktion der etwa um die *doppelte Breite* der *Stromengen* (écart) weiter oberhalb bestehenden Krümmung der Flußmittellinie, mit der sie sich im gleichen Sinne ändert; einem Wendepunkt folgt also eine Untiefe (écart du maigre), einer Stelle stärkster Krümmung ein Tiefpunkt der Sohle (écart de la mouille). Später schätzte[2]) übrigens *Fargue* in einer guten Trasse die Verschiebung gleich der etwa anderthalbfachen bis doppelten Strombreite an den Wendepunkten und auch gleich einem Viertel der Kurvenlänge. Die *stärkste Krümmung* sei für die *größte Kolktiefe* (loi de la mouille), die *mittlere Krümmung* (der Bruch Zentriwinkel durch Länge) für die *mittlere Tiefe* der Haltung maßgebend (loi de l'angle), falls die Kurve nicht gar zu lang oder zu kurz ist; und eine plötzliche Änderung des Krümmungshalbmessers rufe jähe Tiefenänderung[3]) hervor (loi de la continuité). Beobachtungen an der Elbe, der Loire, dem Waal, der Maas, der Schelde und einem Versuchsgerinne haben diese Gesetze bestätigt[4]), denen *R. Jasmund*[5]) noch beifügte, daß bei zunehmender Krümmung das Niedrigwasser-Gefälle abnimmt.

R. Jasmund macht auch aufmerksam[6]), daß die Spiegelhebung in den Konkaven und Spiegelsenkung in den Konvexen (s. oben S. 9)

---

1) Ann. d. ponts et chauss. (6) 4 (1882[2]), S. 314. Den guten und schlechten Übergang beschreibt *H. Girardon*, 6. Internationaler Binnenschiffahrtskongreß, Haag 1894, 7. Frage, S. 41 seines Aufsatzes.

2) Ann. d. ponts et chauss (6) 4 (1882[2]), S. 315.

3) Ebenda (7) 7 (1894[1]), S. 427; *Fargue* sagt ebenda 1868[1], S. 49 Tiefenabnahme statt Tiefenänderung.

4) 6. Internationaler Binnenschiffahrtskongreß, Haag 1894, *R. Jasmund* (Elbe), *P. Mengin-Lecreulx* und *G. Guiard* (Seine), *H. Doyer* (Geldersche Yssel), *R. P. J. Nolthenius* (Maas); *Fargue*, Ann. d. ponts et chauss. (7) 7 (1894[1]), S. 426 (Gerinne), (7) 10 (1900[1]), S. 106 (Schelde). Siehe auch *Fargue*, La forme du lit des rivières à fond mobile, Paris 1908.

5) Handb. d. Ingenieurwissenschaften, 3. Wasserbau, 1. Bd., 4. Aufl., S. 222.

6) Ebenda S. 239

die Kurvenwirkung beeinflußt, indem hierdurch das Gefälle und die Geschwindigkeit am Ende eines konkaven Ufers zunimmt und am Ende eines konvexen Ufers abnimmt. Er führt es hierauf zurück, daß Eintiefung und Aufhöhung stromab von den sie verursachenden Uferstellen auftreten und daß schroffe Übergänge, weil sie ein Gegengefälle zur Folge haben können, selten sind.

In den Kurven pflegt ein Fluß breiter als an den Wendepunkten zu sein; an der Garonne bestimmte beispielsweise *O. Fargue*[1]) das Breitenverhältnis zwischen Wendepunkt und Scheitel zu etwa $^3/_4$.

A. Brunar[2]) hat die *Fargue*schen Gesetze 85 bis 90 km unterhalb Graz an einer Murstrecke geprüft, welche sich dadurch auszeichnet, daß bis auf eine Ausnahme Kreisbögen ohne Zwischengerade aufeinander folgen. Das Gefälle beträgt daselbst 0,0013, das Geschiebe besteht aus Mauersand, Grobsand und Schotter bis zu 13 auf 10 auf 8 cm Achsenlänge und die durch Uferbauten gesicherte Spiegelbreite bei Niederwasser mißt 74 m. Diese Breite blieb nur unterhalb der Wendepunkte bestehen, während sie in den Bögen gemäß folgender Tabelle einschrumpfte, ohne daß übrigens die Querschnittflächen eine ähnliche Erscheinung gezeigt hätten. In der Tabelle bezieht sich die Kolktiefe je auf einen einzigen Punkt — den tiefsten der Haltung — zum Unterschiede von der Haltungstiefe, welche das Mittel aus den mittleren Querschnittstiefen der Bogenstrecke zwischen den Wendepunkten bildet. Zur Beurteilung dieser Zahlen diene, daß die Stromrinne in den Untiefen durchschnittlich bei Niederwasser 1,1 m Tiefe hatte. Die von *Fargue* behauptete Bedeutung der Trasse zeigt sich darin, daß die regelmäßige Bogenfolge auch eine Wiederkehr der Breiten und Tiefen verursachte; auch zeigte sich, wie *Fargue* verlangt, nur die Krümmung, nicht aber die Bogenlänge von Einfluß. Über die „Verschiebung" gibt die Aufnahme Auskunft, indem sich bei einer größten Breite von 74 m die Untiefen in etwa 2 mal 74 m, die Kolke in etwa 6 mal 74 m Entfernung stromab von den Wendepunkten der Achse ausbildeten. Die geringsten Breiten fielen nahezu in die Kolkquerschnitte, welche zumeist bemerkenswerte Übereinstimmung zeigten.

	Bogen		Tiefe unter Niederwasser		Entfernung vom Wendepunkte		Geringste Breite
	Halbmess. m	Länge m	Kolk m	Haltung m	Kolk m	Untiefe m	m
A	700	990	2,6	1,21	480	180	49
B	650	688	2,8	1,28	560	150	55
C	676	500	2,8	1,30	500	200	43
D	600	621	2,6	1,20	300	150	48,5
E	600	850	2,7	1,22	420	120	45
F	600	581	2,6	1,11	500	170	46
G	600	805	2,8	1,14	500	150	49,5
Mittel	632	719	2,7	1,21	466	160	48

1) Ann. d. ponts et chauss. (6) 4 (1882²), S. 314.

2) Bisher unveröffentlicht.

Fast alle sich selbst überlassenen Flußläufe zeigen *Windungen*. Ihre Entstehung ist darauf zurückzuführen, daß ein Fluß in einer geraden Strecke nicht eine Mittelrinne auszutiefen, sondern seine Sohle einzuebenen strebt. Durch die schon erwähnte Abwärtsbewegung am konkaven Ufer verschärfen sich dann nach *J. Thomson*[1]) schwache Einbuchtungen mit der Zeit. *E. Faber*[2]) bringt das Schlängeln mit der von *M. Möller* und *F. P. Stearns* (s. oben S. 109) behaupteten Bewegung des Wassers in zwei Spiralen in Zusammenhang. *R. Jasmund*[3]) sieht dagegen in den Kurven nur die Folge eines Bestrebens nach Längenentwicklung. Entspreche das Talgefälle der Bodenbeschaffenheit, sei also der Beharrungszustand erreicht, so schlängle sich der Fluß nicht. Als Beispiele führt er die Tanger, die Ohre, die Elbe von Tangermünde bis zur Havel und die Weichsel unterhalb der Narewmündung an. Hiernach ist jedenfalls der gerade Lauf die Ausnahme, aber die Erklärung dürfte zum geringsten Teil in den angeführten Gründen, sondern in dem auf S. 503 begründeten Anwachsen der Konvexen zu suchen sein.

Das Studium der Tiefenausbildung ist übrigens dem Modellversuch zugänglich; so erzielten *Eger*, *Dix* und *R. Seifert*[4]) in der Berliner Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau durch Nachbildung der Ufer einer Weserstrecke von 400 m Strombreite eine ähnliche Sohle wie die der Natur, nachdem sie durch Probieren eine für den betreffenden Fall günstige Beziehung der Maßstäbe ermittelt hatten. Eine für deren Wahl gültige Regel besteht nämlich leider noch nicht[5]).

141. Wirkung der Buhnen. Buhnen im Binnenlande sind Einbauten in einem Strom, welche das Ufer, von dem sie ausgehen, sichern, die Breite des strömenden Wassers bei niederen Wasserständen einengen und ein ungünstiges Schlängeln des Stromstriches verhüten sollen. Sie werden besonders in den Strömen des Tieflandes und nur selten in den Oberläufen angewendet. Das hat zunächst seine Ursache darin, daß bei dem geringen Gefälle der Flachlandströme der Höhenunterschied[6]) der Spiegel in den aufeinander folgenden Feldern, also die Überfallhöhe immer gering bleibt, während sie bei starken Gefällen eine schädliche Größe erreichen kann. Eine zweite Ursache[7]) liegt in der Geschiebe-

1) London Roy. Soc. Proc. 25 (1877), S. 6.

2) Deutsche Bauztg. 31 (1897), S. 310.

3) Handb. d. Ingenieurwissenschaften, 3. Wasserbau, 1. Bd., 4. Aufl., S. 163.

4) Z. f. Bauw. 56 (1906), Sp. 323. 5) Ebenda Sp. 328.

6) Über die Stauwirkung der Buhnen siehe oben S. 223. Verwandt: Schneezäune, s. etwa *Schubert* in Eisenbahn-Technik der Gegenwart, 2. Bd. Eisenbahnbau, 1. Abschn. 2. Aufl., Wiesbaden 1906, S. 83 f.

7) Bisher unveröffentlicht.

größe. Wenn der Geschiebetrieb in der betreffenden Strecke bei der Tiefe h_0 und der mittleren Geschwindigkeit U_0 beginnt, so wächst er bei zunehmender Tiefe h und Geschwindigkeit U proportional mit

$$Jh(Jh - J_0 h_0) \quad \text{oder} \quad U^2(U^2 - U_0^2).$$

Steigert man also U_0 auf $U = \zeta U_0$, so wächst der Geschiebetrieb proportional mit

$$\zeta^2(\zeta^2 - 1) U_0^4, \tag{347}$$

also bei gleichem Steigerungsverhältnis ζ umsomehr, je größer U_0 war, also je gröber das Geschiebe ist. Die durch eine Buhne veranlaßte Zusammendrängung der Stromfäden und deren nachteiliger Einfluß bei steigendem Wasserstande auf die regelmäßige Sohlenausbildung ist also in grobem Schotter erheblicher als in feinem Sand und Schlamm. Hierzu kommt, daß das auf der Flußsohle wandernde Geschiebe eine Verschärfung der neuen Windungen verursacht und daß die Sohlenförderung mit der Kiesgröße wächst. Diese Nachteile werden ein wenig dadurch ausgeglichen, daß der Schotter bei abnehmender Geschwindigkeit weit rascher als Sand oder Schlamm zu Boden sinkt, was die Verlandung der Buhnenfelder fördert. Sehr schädlich für die Gleichmäßigkeit der Sohle ist es, daß, wo das strömende Wasser das stehende Wasser der Buhnenfelder berührt, Wirbel mit lotrechter Achse entstehen können. Da die Fliehkraft den Druck vermindert, üben solche Wirbel eine Saugwirkung auf die Sohle aus, aus der sie Geschiebe in die Höhe zu reißen[1]) und — wie hinzugefügt werde —, weil es von größerem Eigengewicht als das Wasser ist, wieder fortzuschleudern vermögen.

Angestrebt wird durch geeignete Führung, Querschnittsform und Entfernung der Buhnen die angegebenen Übelstände möglichst zu vermindern. *G. Hagen*[2]) und *H. Engels*[3]) haben einschlägige Modellversuche angestellt und gefunden, daß die gegen den Strom laufende oder „inklinante" Richtung für die Verlandungsweise die günstigste ist, was mit der Erfahrung in Einklang steht. Die Hochwasserverlandung zeigte sich ferner im Modell zunächst um so kräftiger, je steiler die stromabwärts liegende Böschung sowie die Kopfböschung war. Bei länger andauernden Versuchen[4]) übertraf aber die Verlandung in den stromab

1) *G. Hagen*, Handbuch d. Wasserbaukunst, 3. Aufl., 2. Teil, 2. Bd., Berlin 1871, S. 40. — Vgl. oben S. 499.

2) Ebenda 2. Teil, 1. Bd., S. 397.

3) Z. f. Bauw. 54 (1904), Sp. 449.

4) *H. Engels*, Z. f. Bauw. 56 (1906), Sp. 678. Auch nach Versuchen von *Eger*, *Dix* und *R. Seifert* (ebenda Sp. 340) bewirkt eine flache Kopfneigung geringere Kolke und gleichmäßigere Fahrwassertiefe.

gelegenen Feldern bei flachen Köpfen jene bei steilen. Auch die Praxis bevorzugt recht flache Kopfböschungen, welche nach *Hagen* die Kolkbildung dadurch mildern, daß die Wirbelachsen der einzelnen Schichten bei ihnen versetzt erscheinen.

Geringer als bei den üblichen Buhnen mit trapezförmigem Querschnitt und ebenem Rücken ist, wie *C. Krischan*[1]) an Modellen gezeigt hat, die Wirbelbildung, wenn der Querschnitt eine Wellenlinie, der Längenschnitt eine konkave Kurve als Umriß besitzt.

Ebenso wie zwischen nahegelegenen Buhnen eine Verlandung eintritt, kann bei Hafeneinfahrten eine solche erfolgen. *H. Engels*[2]) hat durch Modellversuche gezeigt, daß man dem während der Anschwellungen durch Einleitung von Spülwasser in dem Vorhafen einigermaßen entgegenwirken kann.

Ein ähnlicher Vorgang wie die Kolkbildung an Buhnenköpfen ist die an Brückenpfeilern. Schon 1856 hat *C. J. Minard* 23 Beispiele zusammengestellt, bei welchen die Unterwaschung am stromaufgekehrten Kopfe stattfand und entgegen der früher verbreiteten Ansicht der Einsturz gegen den Strom erfolgte. *A. Durand-Claye*[3]) hat dann in einem Gerinne von 40 cm Tiefe Versuche angestellt, welche ebenfalls die Unterspülung am Vorkopfe lehrten. Später hat *H. Engels*[4]) mit gleichem Ergebnis Versuche vorgenommen und von neuen Erfahrungsbeispielen berichtet[5]).

142. Der Strand. Die von den Strömen mitgeführten verkleinerten Geschiebe bilden — unter Umständen mit dem Abbruch der Küsten oder Muscheltrümmern vereinigt — den Sand des Meeres, während — wie schon oben erwähnt — der Abrieb der Steine und die lehmigen Schwebestoffe unter starker Beimengung von Stoffen pflanzlichen oder tierischen Ursprungs als Schlick[6]) abgelagert werden. Dabei ist aber nicht gesagt, daß die Bedingungen, welche zur Sandablagerung führten, heute noch fortbestehen müssen, so wird z. B. der Sand der englischen Ostküste zum Teil aus skandinavischen Gesteinen gebildet. Die Sand-

---

1) Z. d. öst. I. u. A.V. 54 (1902), S. 469.

2) Versuche über die Verlandung der Einfahrt des Freudenauer Hafens bei Wien. Z. d. öst. I. u. A.V. 59 (1907), S. 132.

3) Ann. d. ponts et chauss. (5) 5 (1873[1]), S. 467.

4) Z. f. Bauw. 44 (1894), Sp. 407. Z. d. öst. I. u. A.V. 59 (1907), S. 366.

5) Auch wenn eine Überströmung stattfindet, erfolgt ein etwaiges Kippen stromauf: wenigstens wurde dies bei Betonblöcken von 1 m^3 Inhalt auf einer Schotterbank der Mur in Wernsee beobachtet, als ein Hochwasser die Bänke bis zu etwa 1,5 m Höhe überströmte.

6) Näheres: *O. Krümmel*, Handb. d. Ozeanographie 1, Stuttgart 1907, S. 168, 171 f.

ablagerung selbst wird an den Küsten von den Wellen derart bespült[1]), daß sie als „Strand" eine Oberfläche ohne scharfe Krümmungen erhält. Die sanften Neigungen und wenig gekrümmten Höhenlinien sind das Kennzeichnende der Strandflächen; im übrigen können sie recht verschieden sein, da sie von dem Umriß der urspünglichen Ablagerung, den festen Uferpunkten, den Strömungen, den Tiden, dem Wellenschlag, dem Winde und der Korngröße abhängen. Eigentümlich ist es, daß bei Kiesbänken die Oberfläche stärker gewölbt als bei Sandbänken ist, und daß eine Aufbereitung des Kieses in der Weise stattfindet, daß die gröbsten Kiesel zu oberst kommen. *Sir John Coode*[2]), welcher fand, daß der Grobkies stets auf der dem Seegang abgewendeten Seite liegt, nimmt an, daß die freiliegenden großen Stücke leichter als die eingebetteten kleinen bewegt werden[3]). Er sagt auch, daß der Kies sich auf einem Strand ansammelt, wenn Binnenwind bläst, und daß er bei Seewind wieder verschwindet. Hierzu bemerkt *Ph. Forchheimer*[4]), daß die erwähnten Erscheinungen sich ebenfalls erklären lassen, wenn man im Gegensatz zu *Sir John Coode* voraussetzt, daß die großen Steine weniger als die kleinen mitgerissen werden, falls man zugleich annimmt, daß der Wind zwar an der Oberfläche eine Strömung in seiner Richtung, aber hierdurch zugleich in entgegengesetzter Richtung in der Tiefe einen Rücklauf bewirke. Hiermit würde es auch im Einklange stehen, daß der Seewind den Kiesstrand mehr abflacht als Landwind, nämlich ersterer nach *Coode* unter 9- bis $9^1/_2$facher, letzterer unter $3^1/_4$- bis 4facher Anlage. Die wesentlichste Ursache ist aber wohl, daß die Brander mit großer Kopftiefe auf den Strand laufen und vor dem Rücklaufen sehr an Tiefe verlieren, wodurch die großen Steine stranden. Erinnert werde endlich, daß in Wasserläufen die Kiesel dem Sand voraneilen und früher liegen bleiben, und daß oben S. 482 die Ursachen dieses Verhaltens angegeben sind.

Einen Fortschritt in der Erforschung der Erscheinungen am Meere hat *O. Reynolds*[5]) angebahnt, indem er gezeigt hat, daß die Formen, welche unter dem Einfluß der Tiden entstehen, der Vorherbestimmung durch den Modellversuch zugänglich sind. Da die Wellenschnelligkeit (vgl. (86i)) bei einer Wassertiefe H in erster Annäherung $\sqrt{gH}$ beträgt,

1) Eine schöne, ausführliche Schilderung gibt *G. Hagen*, Handb. d. Wasserbaukunst, 3. Teil, 1. Bd., S. 87: 2. Bd., S. 121.

2) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 12 (1853), S. 537. Eine andere Erklärung versucht *H. R. Palmer*, London, Phil. Trans. 1 (1834), S. 568.

3) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 12 (1853), S. 540.

4) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 4. Bd., 3. Teilbd., S. 471.

5) Brit. Assoc. Rep. 57. meeting held at Manchester 1887, London 1888 = *O. Reynolds*, Papers 2, S. 383.

legen die Wellenscheitel in Zeitintervallen T Wege $T\sqrt{gH}$ zurück. Wenn man im Urbild und Abbild

$$\frac{T\sqrt{H}}{L} \tag{348}$$

gleich groß sein läßt und die Flutwellenhöhe h proportional H wählt, so wiederholen sich also alle Bewegungszustände des Urbildes und deren Wirkungen auf die Sohle im Abbilde. Dabei kann man T als Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Höchstlagen auffassen. Die Richtigkeit dieses „hydrokinetischen" Ähnlichkeitsgesetzes hat *Reynolds*[1]) dadurch nachgewiesen, daß er in zwei Versuchströgen mit ähnlichen Einbauten und der gleichen Sandgattung Fluten erzeugte, welche in ihrer Höhe und Periode voneinander abwichen. Jede der einzelnen Fluten wiederholte er dabei viele Tausende von Malen. Im Ausdruck (348) erscheint der Sohlenwiderstand nicht; wird auch dieser berücksichtigt, so hält *Reynolds* die Beziehung

$$\frac{T\sqrt{H} + A\left(1 - B\frac{\sqrt{H}}{T}\right)}{L} = \text{konst.}, \tag{348a}$$

worin A und B durch den Versuch zu ermittelnde Konstanten sind, für die Bedingung ähnlichen Vorganges im Urbild und Abbild. Vermutlich soll hier A die Wellenverkürzung und $-AB\frac{\sqrt{H}}{T}$ die Schnelligkeitsabnahme zum Ausdruck bringen. Das hydrokinetische Ähnlichkeitsgesetz zeigte sich nicht mehr gültig, wenn die Periode T zu groß wurde[2]), weil bei so langsamer Bewegung der Sand sich setzte und schwerbeweglich wurde. Da die kritische Geschwindigkeit, bei welcher Wasser, welches zwischen festen Wänden eingeschlossen ist, dem Wandabstand umgekehrt proportional ist, nahm *Reynolds* an, daß im vorliegenden Falle

$$U_{\text{krit}} = \frac{\text{konst.}}{H} \tag{349}$$

sei. Zu diesem Ausdruck fügte er die *Chézy*sche Gleichung

$$U = c\sqrt{JH}$$

und erwog, daß das Spiegelgefälle J im Abbild mit der Verzerrung e und die Fluthöhe h mit der Tiefe H proportional wachse, daß also mit einer neuen Konstanten aus der *Chézy*schen Gleichung

$$U_{\text{krit}} = \text{konst.}\sqrt{eh} \tag{349a}$$

---

1) Brit. Assoc. Rep. 59. meeting held ad Newcastle 1889, London 1889 = Papers 2, S. 394.

2) Papers 2, S. 413, 414, 425.

hervorgehe. Hiermit hatte er durch Verbindung von (349) und (349a) für den Augenblick des Wechsels in der Bewegungsweise

$$h^3 e = C, \tag{349b}$$

worin das „Kriterion“ C eine unveränderliche Raumgröße darstellt. Für den gerade verlaufenden Strand oder eigentlich für rechteckige Becken fand er[1]) $C =$ ungefähr $0{,}0025\ \mathrm{m}^3$.

Es zeigte sich[2]), daß bei einer Fluthöhe (Höhenunterschied zwischen Hochwasser und Niederwasser) h bei geradem Strand oder rechteckigem Becken die ersten Tiden dem Sand ein Gefälle erteilen, welches vom Hochwasser bis zur Tiefe h unter Niederwasser allmählich abnimmt und daß die folgenden Tiden die Fläche in parallel zum Ufer laufende Bänke (Platen) und Senkungen (Priele) zerlegen. Auf Grund des Ähnlichkeitsgesetzes konnte *Reynolds* die beobachteten Formen auf solche umrechnen, die sich bei einer Periode T von 44000 Sekunden (der Gezeitenperiode der Natur) und einer Fluthöhe h von 30 Fuß = 9,14 m bilden würden. Bei einem Versuche mit einer Periode von 50 Sekunden und einer Fluthöhe von 0,176 Fuß = 5,36 cm gab z. B. das Modell alle Längen in $50\sqrt{0{,}176} : 44000\sqrt{30} = 1 : 11500$ (oder 1 engl. Meile der Wirklichkeit = 5,45 Zoll im Modell) alle Höhen in 1 : 170 der Wirklichkeit wieder. Die Ermittlung des Strandquerschnitts hat bei der Unregelmäßigkeit der Oberfläche seine Schwierigkeit. *Reynolds* suchte zu seiner Feststellung den mittleren wagrechten Abstand jeder Höhenlinie von einer zur durchschnittlichen Strandrichtung parallelen Geraden auf und erhielt für die verschiedenen Versuche ziemlich übereinstimmende Querrisse. Als Beispiel sei der folgende angeführt, bei dem, wie gesagt, das Niederwasser 9,14 m unter dem Hochwasser lag:

Tiefe unt. H.W.	m	0	1,71	3,45	5,18	6,87	8,57	10,13	10,99	13,71	15,48	17,13
Entfernung	km	0	2,181	5,150	8,159	12,79	18,48	23,33	28,65	34,76	37,75	43,93

Hiernach mußte bei einer Fluthöhe von 9,14 m der Strand zwischen Hochwasser und Niederwasser eine Breite von beiläufig 20 km annehmen; ob dies in Wirklichkeit zutreffen würde, läßt sich nach *Reynolds* nicht prüfen, weil alle geraden Küsten von solcher Flutbewegung Strömungen ausgesetzt sind. Bei geringerer Fluthöhe h_1 würde sich nach dem Ähnlichkeitsgesetz die Strombreite zu $20\sqrt{h_1} : \sqrt{9{,}14} = 6{,}76\sqrt{h_1}$ ergeben.

Die von *Reynolds* beobachtete Riffelung[3]) der Oberfläche, welche Höhenunterschiede bis zu etwa $^1/_4 h$ und Riffelentfernungen von etwa $12h$

1) Ebenda S. 415, 437. 2) Ebenda S. 396.

3) Ebenda S. 399, 489. — Der Verfasser beobachtete in der Mündung der Dives (Normandie) Riffeln, die bis zu 1 m Tiefe aufwiesen.

verursachte, ist eine in den nach dem Flutablauf zurückbleibenden Prielen wohlbekannte Erscheinung. Auch hier wird sie durch Wellenbewegung und zwar durch die gewöhnlichen Meereswogen erzeugt. Nach *Mrs. H. Ayrtons*[1]) Trogversuchen sammelt sich der Sand unter den Stellen größter wagrechter (kleinster lotrechter) Schwingung stehender Wellen. Nach dem Ähnlichkeitsgesetz müßten nun die Flutwellen im Laufe der Zeit Riffeln erzeugen, die bis zu $\frac{1}{4}$ der Fluthöhe haben sollten, und in der Tat lassen sich manche sonst kaum erklärliche Bildungen als solche auffassen. Daß sie nicht noch häufiger vorkommen, dürfte seine Ursache in den Schwankungen des Wasserstandes mit Windrichtung und -stärke, der Unregelmäßigkeit der Uferlinien und den Strömungen haben, wie ja auch in den Prielen bei dem Ablauf des Wassers zahlreiche Riffelungen wieder zerstört werden.

In dreieckigen Buchten ist das Kriterion nicht sehr von dem rechteckiger Becken verschieden[2]). Die Sohle wird aber wesentlich anders, indem sich entweder ein einziges tiefes Fahrwasser längs der Mittellinie ausbildet oder ein solches auf der einen Seite und ein zweites kürzeres auf der anderen Seite entsteht.

Neben der hin- und hergehenden Bewegung findet an fast allen Küsten eine Strömung statt. Naheliegend ist die Annahme, daß der durch die Gezeiten und die Meereswellen bewegte Sand schon einer geringfügigen Strömung bei seinen Schwingungen allmählich folgt. Doch ist für den schließlichen Weg nicht die Strömung allein maßgebend, sondern auch die Richtung und Stärke des Seeganges und der Tiden. Da die Meereswellen vom Wind erzeugt werden, wandern sie im allgemeinen in seiner Richtung und verschieben den Sand längs der Küste mit dem Winde, so daß vielfach die Ansicht aufkam, daß außer der Strömung nur der Wind[3]) das Vorrücken des Strandes bestimme. Das trifft aber nicht zu, da Wellenfortschritt und Windrichtung nicht immer zusammenfallen und überdies die Flutwelle ihren eigenen Weg geht[4]).

Wenn der wandernde Sand in der Strandlinie eine Lücke vorfindet, welche nicht durch einen Spülstrom offen gehalten wird, füllt er sie aus. Hafeneinfahrten an Sandküsten sind daher der Versandung ausgesetzt. Will man diese verhindern, so muß man entweder den Sand aufhalten, ehe er die Einfahrt erreicht, oder ihn zum Weiterwandern veranlassen.

---

1) Nach einem Vortrage vor der Brit. Assoc. Rep. im 47. Meeting zu Cambridge 1904; vgl. Brit. Assoc. Rep., S. 676.

2) *Reynolds,* Brit. Assoc. Rep. 1890 = Papers 2, S. 415, 416.

3) So z. B. *H. L. Partiot,* Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 118 (1894), S. 47.

4) *M. L. Haupt,* Amer. Soc. Civ. Eng. Trans. 23 (1890), S. 123 f.; *F. Collingwood,* ebenda S. 142; *N. W. Ears,* ebenda S. 145.

Eingehend hat die betreffenden Maßnahmen *H. Keller*[1]) besprochen, während *H. Engels*[2]) einschlägige Modellversuche vorgenommen hat; auf diese beiden sei hier verwiesen.

143. Die Mündung ins Meer. Während im Binnenland die Einengung eines Flusses seine Vertiefung bewirkt, ist in den Mündungen von Strömen, die sich in Meere mit starker Flut ergießen, das Entgegengesetzte der Fall. Für die Ausbildung der Tiefe solcher Mündungen ist es nämlich, wie *J. Dalmann*[3]) erkannt hat, am wichtigsten, daß das Flutwasser möglichst ungehindert stromauf laufe, sich also viel Wasser ansammle, welches während der Ebbeströmung wieder stromab fließt und die Sohle ausscheuert. Diese Anschauungen wurden insbesondere von *L. Franzius*[4]) in den Jahren 1887 bis etwa 1894 durch Regelung der Unterweser zwischen Bremen und Bremerhaven in die Tat übersetzt, wobei er alle scharfen Krümmungen, Spaltungen durch Inseln oder hohe Sandbänke, Ungleichmäßigkeiten in den Querschnitten und zwar sowohl Überbreiten wie Einengungen und endlich Unebenheiten des Bettes und der Ufer entfernte. Als besonders nachteilig sah der Genannte die durch größere Inseln verursachten Spaltungen an, nicht nur wegen der mit ihnen verbundenen Ausdehnung der reibenden Fläche, sondern auch wegen der ungleichen Flutschnelligkeit in beiden Armen, die so weit gehen kann, daß in den schwächeren Arm gleichzeitig von oben und von unten ein Flutstrom eindringt. *L. Franzius* baute daher die schwächeren Arme an ihren Oberenden ab und stellte mit stetiger, ziemlich gleichmäßiger Verjüngung ein einheitliches Weserbett her, welches in Bremerhaven 1145 m, in Bremen 130 m Breite des Niedrigwasserspiegels erhielt. Bezüglich aller Einzelheiten muß auf die angegebenen Quellen verwiesen werden. Hier genüge die Bemerkung, daß die mittlere Sohlentiefe in Bremerhaven bei Niedrigwasser 6 m und bei Hochwasser 9,3 m beträgt und die nutzbare Fahrtiefe bis Bremen von 3,0 m im Jahre 1886 auf 5,5 m im Jahre 1900 stieg, womit die Richtigkeit der grundlegenden Anschauungen bestätigt erscheint[5]).

---

1) Z. f. Bauw. 31 (1881), Sp. 189, 301, 411; 32 (1882), Sp. 19, 161 f.

2) Wirkung von Molen, ebenda 54 (1904), S. 465; Z. d. öst. I. u. A.V. 59 (1907), S. 405. Versuche über die Aufschlickung der Mündung des Kaiser-Wilhelm-Kanales bei Brunsbüttel, Zentralbl. d. Bauverwaltung 26 (1906), S. 201, 427. Z. d. öst. I. u. A.V. 59 (1907), S. 406.

3) *J. Dalmann*, Über Stromkorrektionen im Flutgebiet, Hamburg 1856.

4) Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 3. Wasserbau, 3. Abt. Wasserbau am Meere und in Strommündungen, 3. Aufl., Leipzig 1901, S. 284 bis 271, 313 bis 320, 332 bis 345.

5) Über andere Ströme siehe ebenda S. 371 f.; *L. F. Vernon-Harcourt*, Min.

Einen tieferen Einblick in die Gesetze der Erscheinungen trachtete *O. Reynolds*[1]) durch seine Modellversuche zu erlangen. Sie zeigten, daß sich in dreieckigen symmetrischen Buchten, in welche kein Fluß mündet, der Sand fast bis zur Hochwasserhöhe der offenen See oder — weil die Flut am Buchtende höher als in der See ansteigt — sogar über Hochwasserhöhe ablagert. Schließt man aber an eine solche Bucht, deren Seiten einen Winkel von etwa 18^0 miteinander einschließen, ein Flußbett von der Länge

$$l = 25000 \sqrt{h}$$

an, worin h die Fluthöhe bezeichnet und l sowie h in m zu messen sind, so tiefen sich der Fluß und das Mündungsdreieck derart aus, daß die Flut bis ans Binnenende des Bettes gelangt. Die Sohle fällt dabei vom Binnenende zur Dreieckspitze und liegt hier etwa in Mittelwasserhöhe. Mit l wächst die Austiefung rasch, so daß für

$$l = 35000 \sqrt{h}$$

mehr als die halbe Flußlänge unter Niedrigwasser zu liegen kommt und die Tiefe an der Buchtspitze noch bei Niedrigwasser größer als h ist.

An die Versuche mit stets gleicher Fluthöhe schloß *Reynolds*, weil in der Natur die Tiden zwischen Nipp- und Springtiden schwanken, solche mit einer Fluthöhe an, deren Größe vom einfachen bis zum zweieinhalbfachen wechselte. Es zeigte sich[2]), daß die endgültige Sohlenform nur den Springtiden und keineswegs den Tiden mittlerer Höhe entspricht. Auch die Gültigkeitsgrenze des Ähnlichkeitsgesetzes hängt nur von den Springtiden ab. Wesentlich geändert, nämlich vermindert, ist nur die Raschheit, mit der die Sohlenmodellierung vor sich geht.

Bei den symmetrisch begrenzten Mündungen zeigte sich im Modell die Tiefe gleichförmiger, als man sie in der Wirklichkeit beobachtet hat. Diese Gleichförmigkeit hörte aber auf, wenn unsymmetrische Formen gewählt wurden[3]). Bei letzteren wirkt ferner der ungleiche Wasserabfluß ausräumend, indem er durch den Angriff auf die Konkaven die Vertiefung der Rinne befördert. Daß ferner bei sehr unregelmäßigem Grundriß die Verschiedenheit der Flut- und Ebbeströmung die Bildung von Riffeln sehr einschränkt, welche nur dort bestehen können, wo keine Querströmungen stattfinden, ist schon oben gesagt worden. Desgleichen ist es klar, daß für unregelmäßigen Grundriß das Ähnlichkeitsgesetz gilt,

---

Proc. Inst. Civ. Eng. 118 (1894), S. 1f.; *H. L. Partiot,* ebenda S. 47f., sowie die den genannten Vorträgen folgende Diskussion.

1) Papers 2, S. 484.

2) Ebenda S. 487.

3) Ebenda S. 489.

so daß Nachbildungen der Mündungen des Mersey[1]) und der Seine[2]) mit der geeigneten Fluthöhe ähnliche Sohlenbildungen wie ihre Vorbilder in der Wirklichkeit aufwiesen. An solchen Modellen kann man die Wirkung von Bauwerken prüfen, ehe man zur Ausführung schreitet. Der weitere Fortschritt wäre, die Bildungsgesetze aufzufinden, denen diese Wirkung gehorcht. Die natürliche Form der Mündungen soll übrigens nach *W. H. Wheeler* dem Gesetze[3])

$$y = c_1 c_2^{-x} \tag{350}$$

folgen, worin y die Breite bei mittlerem Niedrigwasser und x den Abstand vom offenen Meer bedeutet.

Bisher war nur von der Förderung von Sand und Schlamm durch die Küstenströmung oder die Flutwelle die Rede, aber nicht von den Schwebestoffen, die der Strom selbst bringt und die schließlich zu Boden sinken müssen. Geschieht dies dort, wo einerseits die aufräumende Wirkung des Binnenwassers infolge des großen Querschnittes gering geworden ist und andererseits die Tideströmung noch keine Gewalt erlangt hat, so entsteht eine *obere Barre*, wie sie *L. Fransius*[4]) nennt. Hier liegen die Verhältnisse einigermaßen klar; liegt aber die Barre nahe an der Mündung in die flutende See oder in dieser selbst, so muß sie mehr oder weniger als Buchtanfüllung oder als Riffel aufgefaßt werden, deren Bildungsgesetze noch unbekannt sind.

In nicht flutenden Meeren breitet sich das Süßwasser bei seinem Austritt zunächst über das Salzwasser aus und fallen die Schwebestoffe daher erst in der See nieder. Hier scheint, da auch die Küstenströmung in flutlosen Meeren außerordentlich langsam zu sein pflegt, der Wellenschlag entscheidend zu sein. Dessen Wirkungsweise erläutert *L. Luiggi*[5]) mit Berufung auf *D. Parodi*, *Mati* und *P. A. Cornaglia*[6]). Aus den Wellentheorien gehe hervor, daß auf dem Meeresgrunde unter den Wellenbergen der Oberfläche das Wasser gegen die Küste und unter den Wellentälern gegen die offene See schwingt. Die Gewalt dieser Grundsee wachse mit der Höhe der Oberflächenwelle, dem Seeraum (fetch)

1) Brit. Assoc. Rep. 57. meeting held at Manchester 1887, London 1888 = *O. Reynolds*, Papers 2, S. 383.

2) *L. F. Vernon-Harcourt*, London, Roy. Soc. Proc. 45 (1889), S. 512.

3) *W. H. Wheeler*, Tidal Rivers, London 1893, S. 183; so in anderer Schreibweise nach Ausbesserung von Druckfehlern, auf die *W. H. Wheeler* selbst den Verfasser aufmerksam machte.

4) Handb. d. Ingenieurwissenschaften, 3. Wasserbau, 3. Abt., 3. Aufl., Leipzig 1901, S. 196, 224, 236.

5) Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 118 (1894), S. 110.

6) Ann. d. ponts et chauss. (6) 1 (1881[1]), S. 589; Journ. de math. (3) 7 (1881), S. 289.

sowie der Meerestiefe und könne auch in großer Tiefe erheblich sein. Dabei übe auf einer gegen das Land steigenden Sohle die anstürmende Welle eine größere Kraft als die rücklaufende aus, so daß bei flachem Gefälle Sand bergauf getrieben werden könne. In der Tat zeigt ja die erstere Phase das größere Spiegelgefälle. Es entstehe dadurch nach der Ausdrucksweise der italienischen Hydrotekten eine „neutrale“ Linie, oberhalb welcher der Sand gegen das Ufer und unterhalb welcher der Sand unter der Wirkung der Schwere gegen die offene See wandere. Die Tiefe der neutralen Linie wechsle im Mittelmeere zwischen 8,2 und 10,2 m. Bei der Hin- und Herwanderung erfolge zugleich eine Verschiebung des Sandes die Küste entlang, oder eine *Strandvertriftung*[1]), die von der Wellenrichtung abhänge, für welch letztere, wie schon oben S. 365 erwähnt, meistens wieder die Windrichtung entscheidend sei. Mit der überwiegenden Wirkung der ansteigenden Wellenbewegung über die bergabgehende erklärt *Cornaglia*[2]) das Beharren von Sandbänken im Meere, die sonst im Laufe der Zeit eingeebnet werden müßten.

---

1) Das Wort stammt von *O. Krümmel*, Handb. d. Ozeanographie, 2. Bd., 2. Aufl. 1911, S. 125. Nach *J. Prestwich,* Min. Proc. Inst. Civ. Eng. 40 (1875), S. 61, 78 sollen die Steine an der Chesil-Bank erst an das Südende der Bank, dann nordwestlich wandern.

2) Ann. d. ponts et chauss. (6) 1 (1881[1]), S. 673. *Cornaglia* berechnet auch für gegebenen Seeraum und gegebene Länge, Höhe und Schnelligkeit der Wellen auf offener See die größte Geschwindigkeit des Wassers an der Küste. Für die Wiedergabe sind seine nicht sicherstehenden Formeln zu lang. Sie stimmten ihm für den Wellenschlag von Oneglia.

Bemerkung zur nachfolgenden Tabelle I. Für Röhren in Dauerbetrieb sind (s. oben S. 41) die bei *Lang* angegebenen Werte von U und q mit $(D_1 : D)^{5/2}$ zu multiplizieren, wobei D_1 den durch Absätze verringerten Durchmesser bezeichnet und von Fall zu Fall zu schätzen ist.

Tabelle I. Strömung durch Röhren nach verschiedenen Formeln.

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchfluß in Liter p. Sek.

Die Zahlen in *schräger Schrift* liegen unterhalb des Geltungsbereiches der betreffenden Formel.

$D =$	de Prony	Weisbach	Lang	Darcy (neue Rohrleitungen)	Kutter (neue Rohrleitungen)	Biel (neue Rohrleitungen)	Darcy (Rohrleitungen im Dauerbetriebe)	Kutter (Rohrleitungen im Dauerbetriebe)	Biel (Rohrleitungen im Dauerbetriebe)
$J = 0{,}000\,10000 = 1:10000$									
0,040	U = 0,0343	0,0347	*0,0322*	0,0491	0,0400	*0,0104*	0,0347	0,0222	*0,0194*
	q = 0,0431	0,0436	*0,0405*	0,0617	0,0503	*0,0131*	0,0436	0,0279	*0,0243*
0,060	U = 0,0453	0,0446	0,0446	0,0644	0,0551	*0,0185*	0,0456	0,0317	*0,0300*
	q = 0,1281	0,1260	0,1260	0,1822	0,1557	*0,0524*	0,1288	0,0898	*0,0847*
0,080	U = 0,0549	0,0532	0,0561	0,0773	0,0686	*0,0276*	0,0547	0,0407	*0,0399*
	q = 0,2759	0,2674	0,2820	0,3887	0,3450	*0,1385*	0,2749	0,2046	*0,2006*
0,100	U = 0,0634	0,0610	0,0664	0,0886	0,0811	*0,0371*	0,0627	0,0492	*0,0493*
	q = 0,4981	0,4790	0,5212	0,6962	0,6373	*0,2910*	0,4928	0,3864	*0,3871*
0,200	U = 0,0975	0,0929	0,1081	0,1323	0,1338	*0,0852*	0,0935	0,0872	*0,0900*
	q = 3,0631	2,9185	3,3961	4,1549	4,2044	*2,6770*	2,9380	2,7385	*2,8262*
0,400	U = 0,1464	0,1407	0,1683	0,1926	0,2145	*0,1687*	0,1362	0,1501	0,1543
	q = 18,396	17,681	21,149	24,198	26,953	*21,204*	17,111	18,861	19,386
0,600	U = 0,1841	0,1789	0,2146	0,2382	0,2192	0,2366	0,1685	0,2034	0,2070
	q = 52,064	50,583	60,677	67,361	78,985	66,891	47,631	57,523	58,531
0,800	U = 0,2161	0,2118	0,2534	0,2765	0,3349	0,2935	0,1955	0,2509	0,2531
	q = 108,60	106,49	127,37	138,99	168,34	147,52	98,279	126,11	127,22
1,000	U = 0,2442	0,2414	0,2875	0,3101	0,3846	0,3451	0,2193	0,2941	0,2946
	q = 191,79	189,60	225,80	243,56	302,08	271,05	172,22	231,00	231,39
1,200	U = 0,2697	0,2684	0,3183	0,3404	0,4300	0,3909	0,2407	0,3342	0,3327
	q = 304,99	303,55	359,99	385,00	486,30	442,13	272,28	377,94	376,30
$J = 0{,}000\,27826 \sim 1:3594$									
0,040	U = 0,0679	0,0651	0,0599	0,0819	0,0667	*0,0275*	0,0579	0,0371	*0,0402*
	q = 0,0853	0,0818	0,0753	0,1029	0,0838	*0,0345*	0,0727	0,0466	*0,0506*
0,060	U = 0,0874	0,0833	0,0822	0,1075	0,0918	*0,0471*	0,0760	0,0530	*0,0591*
	q = 0,2471	0,2355	0,2324	0,3039	0,2596	*0,1333*	0,2149	0,1497	*0,1670*
0,080	U = 0,1040	0,0991	0,1018	0,1290	0,1145	*0,0675*	0,0912	0,0679	*0,0763*
	q = 0,5226	0,4981	0,5117	0,6485	0,5754	*0,3392*	0,4585	0,3412	*0,3833*
0,100	U = 0,1186	0,1133	0,1195	0,1479	0,1354	*0,0877*	0,1046	0,0821	*0,0922*
	q = 0,9317	0,8899	0,9378	1,1613	1,0630	*0,6884*	0,8211	0,6446	*0,7243*
0,200	U = 0,1765	0,1711	0,1900	0,2206	0,2232	*0,1794*	0,1560	0,1454	0,1604
	q = 5,5462	5,3573	5,9675	6,9309	7,0134	*5,6354*	4,9009	4,5681	5,0401
0,400	U = 0,2589	0,2570	0,2906	0,3212	0,3578	0,3221	0,2271	0,2504	0,2673
	q = 32,532	32,289	36,518	40,365	44,961	40,474	28,543	31,463	33,586
0,600	U = 0,3222	0,3250	0,3674	0,3974	0,4657	0,4337	0,2810	0,3394	0,3547
	q = 91,103	91,906	103,88	112,36	131,67	122,64	79,454	95,954	100,30
0,800	U = 0,3756	0,3836	0,4320	0,4612	0,5586	0,5280	0,3261	0,4185	0,4312
	q = 188,82	192,82	217,15	231,84	280,80	265,39	163,94	210,36	216,74
1,000	U = 0,4228	0,4359	0,4887	0,5173	0,6416	0,6108	0,3658	0,4906	0,5001
	q = 332,03	342,36	383,82	406,28	503,89	307,08	287,28	385,33	392,78
1,200	U = 0,4653	0,4836	0,5398	0,5678	0,7173	0,6855	0,4015	0,5574	0,5634
	q = 526,29	546,94	610,50	642,21	811,20	775,30	454,11	630,43	637,21

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchfluß in Liter p. Sek.

Die Zahlen in *schräger Schrift* liegen unterhalb des Geltungsbereiches der betreffenden Formel.

$D =$	de Prony	Weisbach	Lang	Darcy	Kutter	Biel	Darcy	Kutter	Biel
				neue Rohrleitungen			Rohrleitungen im Dauerbetriebe		
				$J = 0{,}000\,77426 \sim 1:1292$					
0,040	U = 0,1263	0,1208	0,1101	0,1365	0,1118	*0,0682*	0,0966	0,0618	*0,0772*
	q = 0,1587	0,1518	0,1384	0,1716	0,1399	*0,0857*	0,1213	0,0777	*0,0971*
0,060	U = 0,1594	0,1538	0,1488	0,1793	0,1532	*0,1102*	0,1268	0,0883	0,1093
	q = 0,4508	0,4349	0,4207	0,5069	0,4331	*0,3116*	0,3584	0,2498	0,3090
0,080	U = 0,1874	0,1823	0,1823	0,2152	0,1910	*0,1504*	0,1522	0,1133	0,1383
	q = 0,9422	0,9163	0,9163	1,0817	0,9599	*0,7560*	0,7649	0,5692	0,6950
0,100	U = 0,2122	0,2078	0,2122	0,2466	0,2258	*0,1846*	0,1744	0,1369	0,1650
	q = 1,6665	1,6321	1,6666	1,9371	1,7732	*1,4498*	1,3510	1,0753	1,2960
0,200	U = 0,3095	0,3112	0,3307	0,3680	0,3724	0,3478	0,2602	0,2426	0,2786
	q = 9,7220	9,7773	10,390	11,561	11,699	10,925	8,1751	7,6200	8,7525
0,400	U = 0,4473	0,4633	0,4982	0,5358	0,5968	0,5836	0,3789	0,4176	0,4561
	q = 56,208	58,225	62,608	67,333	74,999	73,340	47,612	52,483	57,314
0,600	U = 0,5531	0,5833	0,6260	0,6629	0,7768	0,7662	0,4688	0,5661	0,6014
	q = 156,40	164,91	176,98	187,43	219,64	216,64	132,54	160,06	170,05
0,800	U = 0,6424	0,6860	0,7331	0,7694	0,9319	0,9203	0,5440	0,6981	0,7284
	q = 322,91	344,82	368,50	386,74	468,41	462,57	273,47	350,89	366,14
1,000	U = 0,7211	0,7775	0,8272	0,8629	1,0702	1,0559	0,6102	0,8184	0,8430
	q = 566,32	610,64	649,70	677,71	840,54	829,30	479,21	642,77	662,07
1,200	U = 0,7922	0,8609	0,9116	0,9472	1,1965	1,1785	0,6698	0,9298	0,9483
	q = 895,93	973,62	1031,0	1071,3	1353,2	1332,9	757,50	1051,6	1072,5
				$J = 0{,}002\,1544 \sim 1:464$					
0,040	U = 0,2251	0,2213	0,1998	0,2278	0,1857	*0,1546*	0,1611	0,1031	0,1405
	q = 0,2829	0,2781	0,2510	0,2862	0,2333	*0,1942*	0,2024	0,1296	0,1761
0,060	U = 0,2808	0,2803	0,2661	0,2991	0,2555	*0,2336*	0,2115	0,1474	0,1942
	q = 0,7938	0,7926	0,7522	0,8456	0,7225	*0,6606*	0,5979	0,4166	0,5492
0,080	U = 0,3277	0,3311	0,3228	0,3590	0,3186	*0,3051*	0,2538	0,1889	0,2426
	q = 1,6475	1,6642	1,6228	1,8044	1,6012	*1,5338*	1,2759	0,9495	1,2193
0,100	U = 0,3692	0,3765	0,3732	0,4114	0,3766	*0,3704*	0,2909	0,2284	0,2871
	q = 2,8995	2,9567	2,9309	3,2313	2,9579	*2,9085*	2,2849	1,7937	2,2552
0,200	U = 0,5318	0,5590	0,5711	0,6139	0,6212	0,6366	0,4341	0,4046	0,4761
	q = 16,708	17,560	17,943	19,286	19,515	19,998	13,637	12,711	14,957
0,400	U = 0,7620	0,8255	0,8495	0,8938	0,9956	1,0235	0,6320	0,6967	0,7713
	q = 95,761	102,54	106,75	112,32	125,11	128,62	79,421	87,547	96,919
0,600	U = 0,9387	1,0344	1,0616	1,1058	1,2958	1,3230	0,7819	0,9443	1,0130
	q = 265,42	292,47	300,16	312,66	366,38	374,07	221,08	267,00	286,42
0,800	U = 1,0877	1,2128	1,2396	1,2834	1,5545	1,5761	0,9075	1,1645	1,2243
	q = 546,74	609,62	623,09	645,12	781,35	792,24	456,15	585,33	615,40
1,000	U = 1,2190	1,3713	1,3965	1,4394	1,7852	1,7995	1,0178	1,3652	1,4150
	q = 957,40	1077,0	1096,8	1130,5	1402,1	1413,3	799,37	1072,2	1111,3
1,200	U = 1,3376	1,5156	1,5369	1,5800	1,9958	2,0015	1,1178	1,5511	1,5905
	q = 1512,8	1714,1	1698,6	1787,0	2257,2	2263,6	1263,6	1754,2	1798,8

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchfluß in Liter p. Sek.

Die Zahlen in *schräger Schrift* liegen unterhalb des Geltungsbereiches der betreffenden Formel.

$D =$		de Prony	Weisbach	Lang	Darcy	Kutter	Biel	Darcy	Kutter	Biel
					neue Rohrleitungen			Rohrleitungen im Danerbetriebe		
					$J = 0{,}005\,9948 \sim 1:167$					
0,040	U =	0,3908	0,4003	0,3580	0,3713	0,3097	*0,3181*	0,2687	0,1721	0,2469
	q =	0,4910	0,5030	0,4499	0,4775	0,3892	*0,4806*	0,3376	0,2162	0,3103
0,060	U =	0,4839	0,5045	0,4703	0,4989	0,4262	*0,4553*	0,3527	0,2458	0,3366
	q =	1,3681	1,4264	1,3297	1,4105	1,2052	*1,2874*	0,9974	0,6950	0,9517
0,080	U =	0,5624	0,5939	0,5657	0,5988	0,5314	*0,5759*	0,4234	0,3151	0,4171
	q =	2,8269	2,9853	2,8408	3,0099	2,6710	*2,8948*	2,1283	1,5839	2,0967
0,100	U =	0,6316	0,6735	0,6499	0,6863	0,6282	0,6846	0,4853	0,3810	0,4913
	q =	4,9606	5,2898	5,1043	5,3901	4,9341	5,3766	3,8114	2,9921	3,8587
0,200	U =	0,9032	0,9921	0,9795	1,0240	1,0362	1,1234	0,7241	0,6749	0,8058
	q =	28,375	31,168	30,772	32,170	32,553	35,293	22,748	21,203	25,316
0,400	U =	1,2874	1,4544	1,4418	1,4910	1,6607	1,7595	1,0543	1,1621	1,2971
	q =	161,78	182,77	181,18	187,36	208,69	221,11	132,48	146,04	163,00
0,600	U =	1,5822	1,8151	1,7940	1,8446	2,1615	2,2531	1,3043	1,5752	1,6997
	q =	447,36	513,21	507,24	521,55	611,16	644,48	368,79	445,38	480,58
0,800	U =	1,8307	2,1223	2,0897	2,1409	2,5930	2,6712	1,5138	1,9425	2,0516
	q =	920,21	1066,8	1050,4	1076,1	1303,4	1342,7	760,90	976,39	1031,2
1,000	U =	2,0498	2,3947	2,3496	2,4010	2,9779	3,0405	1,6978	2,2772	2,3693
	q =	1609,9	1880,8	1845,4	1885,8	2338,9	1528,3	1333,4	1788,5	1860,8
1,200	U =	2,2477	2,6423	2,5842	2,6357	3,3296	3,3730	1,8637	2,5873	2,6616
	q =	2542,1	2988,4	2922,7	2980,9	3765,8	3814,8	2107,8	2926,2	3010,2
					$J = 0{,}016681 \sim 1:60$					
0,040	U =	0,6676	0,7153	0,6341	0,6338	0,5166	*0,6066*	0,4482	0,2870	0,4251
	q =	0,8390	0,8989	0,7968	0,7965	0,6492	*0,7623*	0,5632	0,3607	0,5342
0,060	U =	0,8231	0,8973	0,8229	0,8322	0,7110	0,8363	0,5884	0,4100	0,5745
	q =	2,3273	2,5371	2,3267	2,3529	2,0103	2,3645	1,6637	1,1594	1,6243
0,080	U =	0,9542	1,0526	0,9823	0,9989	0,8864	1,0361	0,7063	0,5256	0,7086
	q =	4,7963	5,2909	4,9376	5,0208	4,4555	5,2080	3,5503	2,6422	3,5619
0,100	U =	1,0697	1,1912	1,1226	1,1448	1,0479	1,2155	0,8095	0,6355	0,8321
	q =	8,4014	9,3557	8,8169	8,9913	8,2305	9,5465	6,3578	4,9910	6,5355
0,200	U =	1,5228	1,7422	1,6703	1,7082	1,7285	1,9385	1,2078	1,1258	1,3559
	q =	47,840	54,733	52,474	53,663	54,302	60,900	37,946	35,369	42,597
0,400	U =	2,1638	2,5372	2,4381	2,4871	2,7702	2,9922	1,7586	1,9385	2,1744
	q =	271,91	318,83	306,38	312,53	348,11	376,02	220,99	243,60	273,24
0,600	U =	2,6556	3,1555	3,0232	3,0770	3,6057	3,8009	2,1758	2,6276	2,8451
	q =	750,85	892,20	854,79	870,00	1019,5	1074,7	615,18	742,95	804,43
0,800	U =	3,0703	3,6806	3,5148	3,5712	4,3254	4,4983	2,5253	3,2402	3,4316
	q =	1543,3	1850,1	1766,7	1795,1	2174,2	2261,1	1269,3	1628,7	1724,9
1,000	U =	3,4357	4,1459	3,9472	4,0052	4,9675	5,1111	2,8821	3,7987	3,9611
	q =	2698,4	3256,2	3100,1	3145,6	3901,5	4014,2	1766,8	2983,5	3111,0
1,200	U =	3,7659	4,5679	4,3374	4,3966	5,5535	5,6665	3,1086	4,3160	4,4483
	q =	4259,1	5166,2	4905,5	4972,4	6280,8	6408,7	3516,0	4881,2	5030,9

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchfluß in Liter p. Sek.

$D =$	de Prony	Weisbach	Lang	Darcy	Kutter	Biel	Darcy	Kutter	Biel
				neue Rohrleitungen			Rohrleitungen im Dauerbetriebe		
	$J = 0{,}046416 \sim 1:22$								
0,040	U = 1,1298	1,2636	1,1115	1,0573	0,8618	1,0985	0,7476	0,4788	0,7226
	q = 1,4197	1,5879	1,3968	1,3286	1,0829	1,3804	0,9394	0,6008	0,9080
0,060	U = 1,4892	1,5785	1,4269	1,3881	1,1860	1,4789	0,9815	0,6840	0,9716
	q = 4,2106	4,3615	4,0345	3,9248	3,3534	4,1815	2,7753	1,9339	2,7471
0,080	U = 1,6080	1,8469	1,6924	1,6662	1,4786	1,8091	1,1782	0,8768	1,1950
	q = 8,0827	9,2835	8,5069	8,3753	7,4321	9,0935	5,9222	4,4074	6,0067
0,100	U = 1,8006	2,0850	1,9257	1,9096	1,7481	2,1079	1,3503	1,0600	1,4009
	q = 14,142	16,376	15,124	14,998	13,729	16,555	10,605	8,3256	11,003
0,200	U = 2,5567	3,0306	2,8354	2,8494	2,8833	3,3001	2,0148	1,8780	2,2736
	q = 80,321	95,209	89,077	89,516	90,582	103,53	63,297	58,999	71,427
0,400	U = 3,6260	4,3890	4,1105	4,1487	4,6103	5,0397	2,9336	3,2337	3,6377
	q = 455,66	551,54	51,654	521,34	580,69	633,31	368,64	406,36	457,13
0,600	U = 4,4465	5,4420	5,0834	5,1327	6,0146	6,3952	3,6294	4,3831	4,7559
	q = 1257,2	1538,7	1437,3	1451,2	1700,6	1808,2	1026,2	1239,3	1344,7
0,800	U = 5,1381	6,3351	5,9013	5,9571	7,2151	7,5465	4,2123	5,4050	5,7336
	q = 2582,7	3184,4	2966,3	2994,4	3626,7	3793,3	2117,3	2716,9	2882,0
1,000	U = 5,7475	7,1252	6,6204	6,6810	8,2863	8,5652	4,7242	6,3366	6,6164
	q = 4514,1	5596,1	5199,6	5247,2	6508,0	6727,1	2947,2	4976,7	5196,5
1,200	U = 6,2985	7,8416	7,2699	7,3339	9,2637	9,4890	5,1859	7,1994	7,4288
	q = 7123,4	8868,6	8222,1	8294,5	10477	10732	5865,1	8142,4	8401,8
	$J = 0{,}12915 \sim 1:7{,}7$								
0,040	U = 1,9010	2,2095	1,9305	1,7636	1,4375	1,9257	1,2471	0,7986	1,2191
	q = 2,3889	2,7765	2,4259	2,2162	1,8064	2,4199	1,5671	1,0036	1,5320
0,060	U = 2,3338	2,7503	2,4558	2,3155	1,9784	2,5554	1,6373	1,1410	1,6341
	q = 6,5987	7,7763	6,9436	6,5470	5,5939	7,2252	4,6294	3,2260	4,6203
0,080	U = 2,6987	3,2100	2,8972	2,7794	2,4664	3,1018	1,9653	1,4626	2,0065
	q = 13,565	16,135	14,563	13,971	12,398	15,591	9,8788	7,3520	10,086
0,100	U = 3,0201	3,6170	3,2845	3,1855	2,9160	3,5923	2,2525	1,7683	2,3496
	q = 13,720	28,408	25,796	25,019	22,902	28,214	17,691	13,888	18,454
0,200	U = 4,2814	5,2295	4,7951	4,7530	4,8096	5,5725	3,3609	3,1327	3,8045
	q = 134,50	164,29	150,64	149,32	151,10	175,07	105,59	98,416	119,52
0,400	U = 6,0650	7,5377	6,9142	6,9364	7,7082	8,4614	4,8935	5,3941	6,0788
	q = 762,15	947,22	868,86	869,64	968,65	1063,3	614,93	677,84	763,88
0,600	U = 7,4338	9,3236	8,5325	8,5619	10,033	10,716	6,0542	7,3114	7,9432
	q = 2001,9	2636,2	2412,5	2420,8	2836,8	3029,9	1711,8	2067,3	2245,9
0,800	U = 8,5875	10,835	9,8936	9,9371	12,036	12,631	7,0266	9,0161	9,5737
	q = 4316,5	5446,3	4973,1	4994,9	6049,7	6349,0	3531,8	4532,0	4812,3
1,000	U = 9,6040	12,172	11,091	11,145	13,822	14,327	7,8804	10,570	11,046
	q = 7543,0	9559,9	8710,9	8752,9	10856	11252	4916,3	8301,7	8675,5
1,200	U = 10,523	13,383	12,172	12,234	15,453	15,865	8,6505	12,009	12,400
	q = 11901	15136	13766	13836	17477	17943	8783,5	13582	14024

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchfluß in Liter p. Sek.

$D =$	de Prony	Weisbach	Lang	Darcy	Kutter	Biel	Darcy	Kutter	Biel
				neue Rohrleitungen			Rohrleitungen im Dauerbetriebe		
				$J = 0{,}85938 \sim 1:2{,}8$					
0,040	U = 3,1874	3,8298	3,3269	2,9419	2,3979	3,3096	2,0802	1,3322	2,0474
	q = 4,0054	4,8127	4,1807	3,6969	3,0133	4,1590	2,6141	1,6741	2,5728
0,060	U = 3,9096	4,7521	4,1999	3,8625	3,3002	4,3536	2,7312	1,9032	2,7393
	q = 11,054	13,436	11,875	10,921	9,3311	12,310	7,7228	5,3812	7,7452
0,080	U = 4,5182	5,5345	4,9326	4,6368	4,1142	5,2601	3,2784	2,4398	3,3602
	q = 22,711	27,819	24,794	23,305	20,680	26,440	16,479	12,264	16,890
0,100	U = 5,0544	6,2268	5,5759	5,3137	4,8641	6,0740	3,7574	2,9496	3,9322
	q = 39,697	48,905	43,793	41,734	38,208	47,705	29,510	23,166	30,883
0,200	U = 7,1583	8,9632	8,0852	7,9285	8,0230	8,3341	5,6063	5,2256	6,3582
	q = 224,89	281,59	254,00	249,08	252,05	261,82	176,13	164,17	199,75
0,400	U = 10,133	12,869	11,609	11,544	12,858	14,170	8,1628	8,9979	10,151
	q = 1273,4	1617,2	1458,8	1450,7	1615,8	1780,7	1025,8	1130,7	1275,6
0,600	U = 12,416	15,885	14,302	14,282	16,736	17,923	10,099	12,196	13,260
	q = 3510,5	4491,4	4043,8	4038,2	4732,0	50676	2855,4	3448,4	3749,2
0,800	U = 14,341	18,436	16,568	16,576	20,077	21,113	11,721	15,040	15,979
	q = 7208,6	9266,9	8328,0	8332,1	10092	10613	5891,4	7559,8	8031,9
1,000	U = 16,037	20,690	18,562	18,590	23,057	23,939	13,145	17,632	18,485
	q = 12595	16250	14579	14601	18109	18802	8200,9	13848	14479
1,200	U = 17,570	22,731	20,364	20,407	25,777	26,502	14,430	20,033	20,694
	q = 19871	25708	23031	23080	29153	29973	16320	22657	23404
				$J = 1{,}00000 = 1:1$					
0,040	U = 5,3337	6,5885	5,6959	4,9073	4,0000	5,6206	3,4700	2,2222	3,4292
	q = 6,7025	8,2794	7,1577	6,1667	5,0265	7,0631	4,3605	2,7925	4,3093
0,060	U = 6,5380	8,1537	7,1458	6,4431	5,5051	7,3549	4,5559	3,1748	4,5829
	q = 18,486	23,054	20,204	18,217	15,565	20,795	12,882	8,9765	12,958
0,080	U = 7,5534	9,4800	8,3624	7,7338	6,8629	8,8613	5,4686	4,0698	5,6184
	q = 37,968	47,652	42,034	38,875	34,497	44,542	27,488	20,457	28,241
0,100	U = 8,4478	10,652	9,4309	8,8638	8,1139	10,215	6,2676	4,9203	6,4520
	q = 66,349	83,661	74,070	69,616	63,726	80,228	49,226	38,644	50,674
0,200	U = 11,957	15,277	13,601	13,226	13,383	15,688	9,3519	8,7169	10,618
	q = 375,64	479,94	427,29	415,49	420,44	492,85	293,80	273,85	333,57
0,400	U = 16,920	21,865	19,463	19,256	21,449	23,692	13,616	15,009	16,943
	q = 2126,2	2747,6	2445,8	2419,8	2695,3	2977,2	1711,1	1886,1	2129,1
0,600	U = 20,945	26,945	23,947	23,824	27,917	29,945	16,846	20,345	22,129
	q = 5922,1	7618,5	6770,8	6736,1	7893,5	8466,8	4763,1	5752,3	6256,8
0,800	U = 23,939	31,239	27,721	27,651	33,490	35,263	19,552	25,088	26,665
	q = 12033	15702	13934	13899	16834	17725	9827,2	12611	13400
1,000	U = 26,768	35,028	31,202	31,010	38,462	39,972	21,928	29,412	30,760
	q = 21024	27511	24003	24356	30208	31394	13680	23100	24159
1,200	U = 29,325	38,459	34,045	34,041	42,998	44,245	24,071	33,417	34,528
	q = 33166	43496	38504	38500	48630	50040	27223	37794	39050

Tabelle II. Strömung durch alte Röhren nach Kutters Formel (34k), S. 58.

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$, U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =		0,00010000 ∼1:10000	0,00010975 ∼1:9112	0,00012045 ∼1:8302	0,00013219 ∼1:7565	0,00014508 ∼1:6893	0,00015923 ∼1:6280	0,00017475 ∼1:5722
D = 0,040	U =	0,022222	0,023280	0,024389	0,025550	0,026767	0,028041	0,029376
F = 0,0012566	q =	0,02793	0,02926	0,03065	0,03211	0,03364	0,03524	0,03692
c = 22,222	Q =	2,4127	2,5276	2,6480	2,7741	2,9062	3,0445	3,1895
D = 0,050	U =	0,027068	0,028357	0,029707	0,031121	0,032603	0,034156	0,035782
F = 0,0019635	q =	0,05315	0,05568	0,05833	0,06111	0,06402	0,06706	0,07026
c = 24,210	Q =	4,5919	4,8106	5,0396	5,2796	5,5310	5,7944	6,0703
D = 0,060	U =	0,031748	0,033259	0,034843	0,036502	0,038240	0,040061	0,041969
F = 0,0028274	q =	0,08976	0,09404	0,09852	0,10321	0,10812	0,11327	0,11866
c = 25,922	Q =	7,7557	8,1250	8,5118	8,9171	9,3417	9,7865	10,253
D = 0,070	U =	0,036285	0,038013	0,039823	0,041719	0,043706	0,045787	0,047967
F = 0,0038485	q =	0,13964	0,14629	0,15326	0,16055	0,16820	0,17621	0,18460
c = 27,429	Q =	12,065	12,640	13,241	13,872	14,532	15,224	15,949
D = 0,080	U =	0,040698	0,042636	0,044666	0,046798	0,049021	0,051356	0,053801
F = 0,0050265	q =	0,20457	0,21431	0,22452	0,23521	0,24641	0,25814	0,27043
c = 28,778	Q =	17,675	18,517	19,398	20,322	21,290	22,303	23,365
D = 0,090	U =	0,045000	0,047143	0,049387	0,051739	0,054203	0,056784	0,059487
F = 0,0063617	q =	0,28628	0,29991	0,31419	0,32915	0,34482	0,36124	0,37844
c = 30,000	Q =	24,734	25,912	27,146	28,439	29,793	31,211	32,697
D = 0,100	U =	0,049203	0,051546	0,054000	0,056571	0,059265	0,062087	0,065043
F = 0,0078540	q =	0,38644	0,40484	0,42412	0,44431	0,46547	0,48763	0,51085
c = 31,119	Q =	33,388	34,978	36,644	38,388	40,216	42,131	44,137
D = 0,125	U =	0,059320	0,062145	0,065104	0,068204	0,071452	0,074854	0,078418
F = 0,0122718	q =	0,72797	0,76263	0,79895	0,83699	0,87684	0,91860	0,96233
c = 33,557	Q =	62,897	65,892	69,029	72,316	75,759	79,367	83,146
D = 0,150	U =	0,068978	0,072263	0,075704	0,079308	0,083085	0,087041	0,091185
F = 0,0176715	q =	1,2189	1,2770	1,3378	1,4015	1,4682	1,5381	1,6114
c = 35,620	Q =	105,32	110,33	115,59	121,09	126,85	132,89	139,22
D = 0,175	U =	0,078244	0,081969	0,085872	0,089961	0,094245	0,098732	0,10343
F = 0,0240528	q =	1,8820	1,9716	2,0655	2,1638	2,2669	2,3748	2,4879
c = 37,408	Q =	162,60	170,35	178,46	186,95	195,86	205,18	214,95
D = 0,200	U =	0,087169	0,091319	0,095668	0,10022	0,10500	0,10999	0,11523
F = 0,0314159	q =	2,7385	2,8689	3,0055	3,1486	3,2985	3,4556	3,6201
c = 38,988	Q =	236,61	247,87	259,67	272,04	284,99	298,56	312,78
D = 0,225	U =	0,095802	0,10036	0,10514	0,11015	0,11539	0,12089	0,12664
F = 0,0397608	q =	3,8091	3,9905	4,1805	4,3796	4,5881	4,8066	5,0354
c = 40,394	Q =	329,11	344,78	361,20	378,40	396,41	415,29	435,06
D = 0,250	U =	0,10417	0,10913	0,11432	0,11977	0,12547	0,13144	0,13770
F = 0,0490874	q =	5,1133	5,3567	5,6118	5,8790	6,1590	6,4522	6,7594
c = 41,667	Q =	441,79	462,82	484,86	507,95	532,13	557,47	584,02
D = 0,275	U =	0,11230	0,11765	0,12325	0,12912	0,13527	0,14171	0,14845
F = 0,0593957	q =	6,6701	6,9877	7,3205	7,6690	8,0342	8,4168	8,8175
c = 42,830	Q =	576,30	603,74	632,49	662,61	694,16	727,21	761,83
D = 0,300	U =	0,12022	0,12595	0,13194	0,13823	0,14481	0,15170	0,15893
F = 0,0706858	q =	8,4979	8,9026	9,3265	9,7706	10,236	10,723	11,234
c = 43,899	Q =	734,22	769,18	805,81	844,18	884,37	926,48	970,60
D = 0,325	U =	0,12794	0,13403	0,14042	0,14710	0,15411	0,16145	0,16913
F = 0,0829577	q =	10,614	11,119	11,649	12,203	12,784	13,393	14,031
c = 44,885	Q =	917,03	960,70	1006,4	1054,4	1104,6	1157,2	1212,3
		1	2	3	4	5	6	7

	1	2	3	4	5	6	7
J =	0,00010000 ∼1:10000	0,00010975 ∼1:9112	0,00012045 ∼1:8302	0,00013219 ∼1:7565	0,00014508 ∼1:6893	0,00015928 ∼1:6280	0,00017475 ∼1:5722
D = 0,350	U = 0,13549	0,14194	0,14870	0,15578	0,16320	0,17097	0,17911
F = 0,0962113	q = 13,036	13,656	14,307	14,988	15,702	16,449	17,232
c = 45,804	Q = 1126,3	1179,9	1236,1	1295,0	1356,6	1421,2	1488,9
D = 0,375	U = 0,14287	0,14967	0,15680	0,16426	0,17209	0,18028	0,18886
F = 0,110447	q = 15,779	16,531	17,318	18,142	19,006	19,911	20,859
c = 46,661	Q = 1363,3	1428,2	1496,3	1567,5	1642,1	1720,3	1802,2
D = 0,400	U = 0,15009	0,15724	0,16473	0,17257	0,18079	0,18940	0,19842
F = 0,125664	q = 18,861	19,759	20,700	21,686	22,719	23,800	24,934
c = 47,464	Q = 1629,6	1707,2	1788,5	1873,7	1962,9	2056,3	2154,3
D = 0,425	U = 0,15719	0,16467	0,17251	0,18073	0,18933	0,19835	0,20779
F = 0,141863	q = 22,299	23,361	24,473	25,638	26,859	28,138	29,478
c = 48,223	Q = 1926,6	2018,4	2114,5	2215,1	2320,6	2431,1	2546,9
D = 0,450	U = 0,16414	0,17195	0,18014	0,18872	0,19770	0,20712	0,21698
F = 0,159043	q = 26,105	27,348	28,650	30,014	31,444	32,941	34,509
c = 48,936	Q = 2255,5	2362,9	2475,4	2593,2	2716,7	2846,1	2981,6
D = 0,475	U = 0,17096	0,17910	0,18763	0,19656	0,20592	0,21573	0,22600
F = 0,177205	q = 30,295	31,738	33,249	34,832	36,491	38,228	40,049
c = 49,611	Q = 2617,5	2742,2	2872,7	3009,5	3152,8	3302,9	3460,2
D = 0,500	U = 0,17767	0,18613	0,19499	0,20428	0,21400	0,22419	0,23487
F = 0,196350	q = 34,885	36,547	38,287	40,110	42,020	44,021	46,117
c = 50,253	Q = 3014,1	3157,6	3308,0	3465,5	3630,5	3803,4	3984,5
D = 0,550	U = 0,19076	0,19984	0,20936	0,21933	0,22977	0,24071	0,25217
F = 0,237583	q = 45,321	47,479	49,740	52,109	54,590	57,189	59,912
c = 51,444	Q = 3915,8	4102,2	4297,6	4502,2	4716,6	4941,1	5176,4
D = 0,600	U = 0,20345	0,21313	0,22328	0,23391	0,24505	0,25672	0,26894
F = 0,282743	q = 57,523	60,262	63,131	66,137	69,286	72,585	76,042
c = 52,529	Q = 4970,0	5206,6	5454,5	5714,3	5986,3	6271,4	6570,0
D = 0,650	U = 0,21577	0,22605	0,23681	0,24809	0,25990	0,27227	0,28524
F = 0,331831	q = 71,601	75,010	78,582	82,323	86,243	90,350	94,652
c = 53,527	Q = 6186,3	6480,9	6789,5	7112,8	7451,4	7806,2	8177,9
D = 0,700	U = 0,22776	0,23861	0,24997	0,26187	0,27434	0,28740	0,30109
F = 0,384845	q = 87,653	91,826	96,199	100,78	105,58	110,61	115,87
c = 54,445	Q = 7573,2	7933,8	8311,6	8707,3	9121,9	9556,3	10011
D = 0,750	U = 0,23946	0,25087	0,26281	0,27533	0,28843	0,30217	0,31656
F = 0,441786	q = 105,79	110,83	116,11	121,63	127,43	133,49	139,85
c = 55,302	Q = 9140,4	9575,6	10032	10509	11010	11534	12083
D = 0,800	U = 0,25088	0,26282	0,27534	0,28845	0,30218	0,31657	0,33165
F = 0,502655	q = 126,11	132,11	138,40	144,99	151,89	159,13	166,70
c = 56,098	Q = 10895	11414	11958	12527	13124	13749	14403
D = 0,900	U = 0,27294	0,28594	0,29955	0,31382	0,32876	0,34441	0,36081
F = 0,636173	q = 173,64	181,91	190,57	199,64	209,15	219,11	229,54
c = 57,541	Q = 15002	15717	16465	17249	18070	18931	19832
D = 1,000	U = 0,29412	0,30812	0,32279	0,33816	0,35427	0,37113	0,38881
F = 0,785398	q = 231,00	242,00	253,52	265,59	278,24	291,49	305,37
c = 58,824	Q = 19958	20909	21904	22947	24040	25185	26384
D = 1,100	U = 0,31450	0,32948	0,34516	0,36160	0,37882	0,39686	0,41575
F = 0,950332	q = 298,88	313,11	328,02	343,64	360,00	377,14	395,10
c = 59,973	Q = 25823	27053	28341	29691	31104	32585	34137
D = 1,200	U = 0,33419	0,35010	0,36677	0,38423	0,40253	0,42170	0,44178
F = 1,13097	q = 377,96	395,95	414,81	434,56	455,25	476,93	499,64
c = 61,014	Q = 32655	34210	35839	37546	39334	41207	43169

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

$J =$	0,00019179 ∼1:5214	0,00021049 ∼1:4751	0,00023101 ∼1:4329	0,00025354 ∼1:3944	0,00027826 ∼1:3594	0,00030539 ∼1:3275	0,00033516 ∼1:2984
D = 0,040	U = 0,030775	0,032241	0,033776	0,035384	0,037069	0,038834	0,040683
F = 0,0012566	q = 0,03867	0,04051	0,04244	0,04446	0,04658	0,04880	0,05112
c = 22,222	Q = 3,3414	3,5005	3,6672	3,8418	4,0247	4,2163	4,4171
D = 0,050	U = 0,037486	0,039271	0,041141	0,043099	0,045152	0,047302	0,049554
F = 0,0019635	q = 0,07360	0,07711	0,08078	0,08463	0,08866	0,09288	0,09730
c = 24,210	Q = 6,3593	6,6621	6,9793	7,3116	7,6598	8,0245	8,4066
D = 0,060	U = 0,043967	0,046061	0,048254	0,050551	0,052958	0,055480	0,058122
F = 0,0028274	q = 0,12431	0,13023	0,13643	0,14293	0,14973	0,15687	1,16434
c = 25,922	Q = 10,741	11,252	11,788	12,349	12,937	13,553	14,199
D = 0,070	U = 0,050251	0,052644	0,055150	0,057776	0,060527	0,063409	0,066429
F = 0,0038485	q = 0,19339	0,20260	0,21224	0,22235	0,23294	0,24403	0,25565
c = 27,429	Q = 16,709	17,504	18,338	19,211	20,126	21,084	22,088
D = 0,080	U = 0,056363	0,059046	0,061858	0,064803	0,067889	0,071122	0,074508
F = 0,0050265	q = 0,28331	0,29680	0,31093	0,32574	0,34125	0,35750	0,37452
c = 28,778	Q = 24,478	25,643	26,865	28,144	29,484	30,888	32,358
D = 0,090	U = 0,062320	0,065287	0,068396	0,071653	0,075065	0,078639	0,082383
F = 0,0063617	q = 0,39646	0,41534	0,43512	0,45584	0,47754	0,50028	0,52410
c = 30,000	Q = 34,254	35,885	37,594	39,384	41,259	43,224	45,282
D = 0,100	U = 0,068140	0,071385	0,074784	0,078345	0,082075	0,085983	0,090078
F = 0,0078540	q = 0,53517	0,56066	0,58735	0,61532	0,64462	0,67531	0,70747
c = 31,119	Q = 46,239	48,441	50,747	53,164	55,695	58,347	61,125
D = 0,125	U = 0,082152	0,086064	0,090162	0,094455	0,098952	0,10366	0,10860
F = 0,0122718	q = 1,0082	1,0562	1,1065	1,1591	1,2143	1,2721	1,3327
c = 33,557	Q = 87,105	91,252	95,597	100,15	104,92	109,90	115,15
D = 0,150	U = 0,095527	0,10008	0,10484	0,10983	0,11506	0,12054	0,12628
F = 0,0176715	q = 1,6881	1,7685	1,8527	1,9409	2,0333	2,1301	2,2316
c = 35,620	Q = 145,85	152,80	160,07	167,69	175,68	184,04	192,81
D = 0,175	U = 0,10836	0,11352	0,11892	0,12459	0,13052	0,13673	0,14324
F = 0,0240528	q = 2,6063	2,7304	2,8604	2,9966	3,1393	3,2888	3,4454
c = 37,408	Q = 225,19	235,91	247,14	258,91	271,24	284,15	297,68
D = 0,200	U = 0,12072	0,12647	0,13249	0,13880	0,14541	0,15233	0,15958
F = 0,0314159	q = 3,7925	3,9731	4,1623	4,3604	4,5681	4,7856	5,0135
c = 38,983	Q = 327,67	343,27	359,62	376,74	394,68	413,47	433,16
D = 0,225	U = 0,13267	0,13899	0,14561	0,15254	0,15981	0,16742	0,17539
F = 0,0397608	q = 5,2752	5,5264	5,7896	6,0652	6,3540	6,6566	6,9725
c = 40,394	Q = 455,78	477,48	500,22	524,04	548,99	575,13	602,51
D = 0,250	U = 0,14426	0,15113	0,15832	0,16586	0,17376	0,18203	0,19070
F = 0,0490874	q = 7,0813	7,4185	7,7717	8,1418	8,5294	8,9356	9,3611
c = 41,667	Q = 611,82	640,96	671,48	703,45	736,94	772,03	808,80
D = 0,275	U = 0,15552	0,16293	0,17069	0,17881	0,18733	0,19625	0,20559
F = 0,0593957	q = 9,2374	9,6772	10,138	10,621	11,126	11,656	12,211
c = 42,830	Q = 798,11	836,11	875,92	917,63	961,33	1007,1	1055,1
D = 0,300	U = 0,16649	0,17442	0,18273	0,19143	0,20054	0,21009	0,22009
F = 0,0706858	q = 11,769	12,329	12,916	13,531	14,175	14,850	15,558
c = 43,899	Q = 1016,8	1065,2	1116,0	1169,1	1224,8	1283,1	1344,2
D = 0,325	U = 0,17719	0,18562	0,19446	0,20372	0,21342	0,22358	0,23423
F = 0,0829577	q = 14,699	15,399	16,132	16,900	17,705	18,548	19,431
c = 44,885	Q = 1270,0	1330,5	1393,8	1460,2	1529,7	1602,5	1678,9
	8	9	10	11	12	13	14

		8	9	10	11	12	13	14
$J =$		0,00019179 ∼1:5214	0,00021049 ∼1:4751	0,00023101 ∼1:4329	0,00025354 ∼1:3944	0,00027826 ∼1:3594	0,00030539 ∼1:3275	0,00033516 ∼1:2984
$D =$ **0,350**	$U =$	0,18764	0,19657	0,20593	0,21574	0,22601	0,23677	0,24805
$F =$ 0,0962113	$q =$	18,053	18,913	19,813	20,757	21,745	22,780	23,865
$c =$ 45,804	$Q =$	1559,8	1634,1	1711,9	1793,4	1878,8	1968,2	2061,9
$D =$ **0,375**	$U =$	0,19786	0,20728	0,21715	0,22749	0,23832	0,24967	0,26155
$F =$ 0,110447	$q =$	21,853	22,893	23,983	25,125	26,321	27,575	28,888
$c =$ 46,661	$Q =$	1888,1	1978,0	2072,1	2170,8	2274,2	2382,5	2495,9
$D =$ **0,400**	$U =$	0,20786	0,21776	0,22818	0,23899	0,25037	0,26229	0,27478
$F =$ 0,125664	$q =$	26,121	27,365	28,668	30,033	31,463	32,961	34,530
$c =$ 47,464	$Q =$	2256,8	2364,3	2476,9	2594,8	2718,4	2847,8	2983,4
$D =$ **0,425**	$U =$	0,21769	0,22805	0,23891	0,25028	0,26220	0,27469	0,28777
$F =$ 0,141863	$q =$	30,881	32,352	33,892	35,506	37,197	38,968	40,823
$c =$ 48,223	$Q =$	2668,1	2795,2	2928,3	3067,7	3213,8	3366,8	3527,1
$D =$ **0,450**	$U =$	0,22731	0,23814	0,24947	0,26135	0,27380	0,28684	0,30049
$F =$ 0,159043	$q =$	36,152	37,874	39,677	41,567	43,546	45,619	47,791
$c =$ 49,936	$Q =$	3123,6	3272,3	3428,1	3591,3	3762,4	3941,5	4129,2
$D =$ **0,475**	$U =$	0,23676	0,24804	0,25985	0,27222	0,28518	0,29876	0,31299
$F =$ 0,177205	$q =$	41,956	43,953	46,046	48,239	50,536	52,942	55,463
$c =$ 48,611	$Q =$	3625,0	3797,6	3978,4	4167,8	4366,3	4574,2	4792,0
$D =$ **0,500**	$U =$	0,24605	0,25777	0,27004	0,28290	0,29637	0,31048	0,32527
$F =$ 0,196350	$q =$	48,312	50,613	53,023	55,548	58,193	60,963	63,866
$c =$ 50,253	$Q =$	4174,2	4373,0	4581,2	4799,3	5027,8	5267,2	5518,0
$D =$ **0,550**	$U =$	0,26418	0,27676	0,28994	0,30374	0,31821	0,33336	0,34923
$F =$ 0,237583	$q =$	62,765	65,754	68,884	72,164	75,601	79,200	82,972
$c =$ 51,444	$Q =$	5422,9	5681,1	5951,6	6235,0	6531,9	6842,9	7168,7
$D =$ **0,600**	$U =$	0,28175	0,29516	0,30922	0,32394	0,33937	0,35553	0,37245
$F =$ 0,282743	$q =$	79,662	83,456	87,429	91,593	95,954	100,52	105,31
$c =$ 52,529	$Q =$	6882,8	7210,6	7553,9	7913,6	8290,4	8685,2	9098,7
$D =$ **0,650**	$U =$	0,29882	0,31305	0,32796	0,34357	0,35993	0,37707	0,39503
$F =$ 0,331831	$q =$	99,159	103,88	108,83	114,01	119,44	125,12	131,08
$c =$ 53,527	$Q =$	8567,3	8975,3	9403,1	9850,3	10319	10811	11326
$D =$ **0,700**	$U =$	0,31542	0,33044	0,34618	0,36266	0,37993	0,39802	0,41697
$F =$ 0,384845	$q =$	121,39	127,17	133,22	139,57	146,21	153,18	160,47
$c =$ 54,445	$Q =$	10488	10987	11511	12059	12633	13234	13865
$D =$ **0,750**	$U =$	0,33163	0,34742	0,36396	0,38129	0,39945	0,41847	0,43840
$F =$ 0,441786	$q =$	146,51	153,49	160,79	168,45	176,47	184,87	193,68
$c =$ 55,302	$Q =$	12658	13261	13893	14554	15247	15978	16734
$D =$ **0,800**	$U =$	0,34744	0,36398	0,38131	0,39947	0,41849	0,43842	0,45929
$F =$ 0,502655	$q =$	174,64	182,96	191,67	200,79	210,36	220,37	230,87
$c =$ 56,098	$Q =$	15089	15807	16560	17349	18175	19040	19947
$D =$ **0,900**	$U =$	0,37799	0,39599	0,41485	0,43460	0,45530	0,47697	0,49969
$F =$ 0,636173	$q =$	240,47	251,92	263,92	276,48	289,65	303,44	317,89
$c =$ 57,541	$Q =$	20777	21766	22802	23888	25025	26217	27465
$D =$ **1,000**	$U =$	0,40782	0,42671	0,44703	0,46832	0,49062	0,51398	0,53845
$F =$ 0,785398	$q =$	319,91	335,14	351,10	367,82	385,33	403,68	422,90
$c =$ 58,824	$Q =$	27640	28956	30335	31779	33292	34878	36539
$D =$ **1,100**	$U =$	0,43555	0,45629	0,47804	0,50078	0,52462	0,54960	0,57577
$F =$ 0,950332	$q =$	413,92	433,62	454,27	475,90	498,56	522,30	547,17
$c =$ 59,973	$Q =$	35762	37465	39249	41118	43076	45127	47276
$D =$ **1,200**	$U =$	0,46281	0,48485	0,50794	0,53212	0,55746	0,58400	0,61181
$F =$ 1,13097	$q =$	523,43	548,35	574,46	601,81	630,47	660,49	691,94
$c =$ 61,014	$Q =$	45224	47378	49633	51997	54478	57066	59784

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

$J=$		0,00036784 ∼1:2719	0,00040370 ∼1:2477	0,00044306 ∼1:2257	0,00048626 ∼1:2057	0,00053367 ∼1:1874	0,00058570 ∼1:1707	0,00064281 ∼1:1556
D=0,040	U=	0,042620	0,044650	0,046776	0,049003	0,051336	0,053781	0,056341
F=0,0012566	q=	0,05356	0,05611	0,05878	0,06158	0,06451	0,06758	0,07080
c=22,222	Q=	4,6274	4,8478	5,0786	5,3204	5,5737	5,8391	6,1172
D=0,050	U=	0,051913	0,054385	0,056975	0,059688	0,062530	0,065507	0,068626
F=0,0019635	q=	0,10193	0,10679	0,11187	0,11720	0,12278	0,12862	0,13475
c=24,210	Q=	8,8069	9,2263	9,6656	10,126	10,608	11,113	11,642
D=0,060	U=	0,060889	0,063789	0,066826	0,070008	0,073341	0,076834	0,080492
F=0,0028274	q=	0,17216	0,18036	0,18895	0,19794	0,20737	0,21724	0,22759
c=25,922	Q=	14,875	15,583	16,325	17,102	17,917	18,770	19,663
D=0,070	U=	0,069592	0,072905	0,076377	0,080014	0,083824	0,087815	0,091996
F=0,0038485	q=	0,26782	0,28057	0,29393	0,30793	0,32259	0,33795	0,35404
c=27,429	Q=	23,140	24,242	25,396	26,603	27,872	29,199	30,589
D=0,080	U=	0,078056	0,081773	0,085666	0,089745	0,094019	0,098495	0,10319
F=0,0050265	q=	0,39235	0,41103	0,43061	0,45111	0,47259	0,49509	0,51867
c=28,778	Q=	33,899	35,513	37,204	38,976	40,832	42,776	44,813
D=0,090	U=	0,086306	0,090416	0,094721	0,099231	0,10396	0,10891	0,11409
F=0,0063617	q=	0,54905	0,57520	0,60259	0,63128	0,66134	0,69283	0,72582
c=30,000	Q=	47,438	49,697	52,064	54,543	57,140	59,860	62,711
D=0,100	U=	0,094367	0,098860	0,10357	0,10850	0,11367	0,11908	0,12475
F=0,0078540	q=	0,74115	0,77645	0,81342	0,85215	0,89272	0,93528	0,97976
c=31,119	Q=	64,036	67,085	70,279	73,626	77,131	80,804	84,652
D=0,125	U=	0,11377	0,11919	0,12486	0,13081	0,13704	0,14356	0,15040
F=0,0122718	q=	1,3962	1,4627	1,5323	1,6053	1,6817	1,7618	1,8457
c=33,557	Q=	120,63	126,37	132,39	138,70	145,30	152,22	159,47
D=0,150	U=	0,13229	0,13859	0,14519	0,15211	0,15935	0,16694	0,17488
F=0,0176715	q=	2,3378	2,4491	2,5658	2,6879	2,8159	2,9500	3,0905
c=35,620	Q=	201,99	211,61	221,68	232,24	243,30	254,88	267,02
D=0,175	U=	0,15006	0,15721	0,16470	0,17254	0,18075	0,18936	0,19838
F=0,0240528	q=	3,6095	3,7813	3,9614	4,1500	4,3476	4,5546	4,7715
c=37,408	Q=	311,86	326,71	342,26	358,56	375,63	393,52	412,26
D=0,200	U=	0,16718	0,17514	0,18348	0,19222	0,20137	0,21096	0,22100
F=0,0314159	q=	5,2522	5,5023	5,7643	6,0387	6,3263	6,6275	6,9431
c=38,983	Q=	453,79	475,40	498,03	521,75	546,59	572,62	599,88
D=0,225	U=	0,18374	0,19249	0,20165	0,21126	0,22131	0,23185	0,24289
F=0,0397608	q=	7,3056	7,6535	8,0179	8,3997	8,7996	9,2186	9,6576
c=40,394	Q=	631,20	661,26	692,75	725,73	760,29	796,49	834,41
D=0,250	U=	0,19978	0,20930	0,21926	0,22970	0,24064	0,25210	0,26410
F=0,0490874	q=	9,8068	10,274	10,763	11,275	11,812	12,375	12,964
c=41,667	Q=	847,31	887,65	929,92	974,20	1020,6	1069,2	1120,1
D=0,275	U=	0,21538	0,22564	0,23638	0,24764	0,25943	0,27178	0,28472
F=0,0593957	q=	12,793	13,402	14,040	14,709	15,409	16,143	16,911
c=42,830	Q=	1105,3	1157,9	1213,1	1270,8	1331,3	1394,7	1461,1
D=0,300	U=	0,23057	0,24155	0,25305	0,26510	0,27773	0,29095	0,30480
F=0,0706858	q=	16,298	17,074	17,887	18,739	19,631	20,566	21,545
c=43,899	Q=	1408,2	1475,2	1545,5	1619,1	1696,1	1776,9	1861,5
D=0,325	U=	0,24538	0,25707	0,26931	0,28213	0,29556	0,30964	0,32438
F=0,0829577	q=	20,356	21,326	22,341	23,405	24,519	25,687	26,910
c=44,885	Q=	1758,8	1842,5	1930,3	2022,2	2118,5	2219,3	2325,0
		15	16	17	18	19	20	21

	15	16	17	18	19	20	21
$J =$	0,00036784 ∼1:2719	0,00040370 ∼1:2477	0,00044306 ∼1:2257	0,00048626 ∼1:2057	0,00053367 ∼1:1874	0,00058570 ∼1:1707	0,00064281 ∼1:1556
$D =$ 0,350	$U =$ 0,25986	0,27223	0,28520	0,29878	0,31300	0,32791	0,34352
$F =$ 0,0962113	q = 25,001	26,192	27,439	28,746	30,114	31,548	33,050
$c =$ 45,804	Q = 2160,1	2263,0	2370,7	2483,6	2601,9	2725,8	2855,6
$D =$ 0,375	$U =$ 0,27401	0,28705	0,30072	0,31504	0,33004	0,34576	0,36222
$F =$ 0,110447	q = 30,263	31,704	33,214	34,795	36,452	38,188	40,006
$c =$ 46,661	Q = 2614,7	2739,3	2869,7	3006,3	3149,5	3299,4	3456,5
$D =$ 0,400	$U =$ 0,28787	0,30157	0,31593	0,33098	0,34674	0,36325	0,38054
$F =$ 0,125664	q = 36,174	37,897	39,701	41,592	43,572	45,647	47,820
$c =$ 47,464	Q = 3125,5	3274,3	3430,2	3593,5	3764,6	3943,9	4131,7
$D =$ 0,425	$U =$ 0,30147	0,31582	0,33086	0,34662	0,36312	0,38041	0,39852
$F =$ 0,141863	q = 42,767	44,804	46,937	49,172	51,513	53,966	56,536
$c =$ 48,223	Q = 3695,1	3871,0	4055,3	4248,4	4450,7	4662,7	4884,7
$D =$ 0,450	$U =$ 0,31480	0,32979	0,34549	0,36195	0,37918	0,39723	0,41615
$F =$ 0,159043	q = 50,067	52,451	54,948	57,565	60,306	63,177	66,186
$c =$ 49,936	Q = 4325,8	4531,8	4747,5	4973,6	5210,4	5458,5	5718,4
$D =$ 0,475	$U =$ 0,32789	0,34350	0,35986	0,37699	0,39494	0,41375	0,43345
$F =$ 0,177205	q = 58,104	60,870	63,769	66,805	69,986	73,319	76,810
$c =$ 48,611	Q = 5020,2	5259,2	5509,6	5772,0	6046,8	6334,7	6636,4
$D =$ 0,500	$U =$ 0,34076	0,35698	0,37398	0,39179	0,41044	0,42999	0,45046
$F =$ 0,196350	q = 66,907	70,093	73,431	76,927	80,590	84,427	88,447
$c =$ 50,253	Q = 5780,8	6056,0	6344,4	6646,5	6963,0	7294,5	7641,9
$D =$ 0,550	$U =$ 0,36586	0,38328	0,40153	0,42065	0,44068	0,46166	0,48365
$F =$ 0,237583	q = 86,922	91,061	95,397	99,940	104,70	109,68	114,91
$c =$ 51,444	Q = 7510,1	7867,7	8242,3	8634,8	9045,9	9476,7	9927,9
$D =$ 0,600	$U =$ 0,39019	0,40877	0,42823	0,44862	0,46998	0,49236	0,51581
$F =$ 0,282743	q = 110,32	115,58	121,08	126,85	132,89	139,21	145,84
$c =$ 52,529	Q = 9531,9	9985,8	10461	10959	11481	12028	12601
$D =$ 0,650	$U =$ 0,41384	0,43354	0,45419	0,47581	0,49847	0,52220	0,54707
$F =$ 0,331831	q = 137,32	143,86	150,71	157,89	165,41	173,28	181,53
$c =$ 53,527	Q = 11865	12430	13022	13642	14291	14972	15685
$D =$ 0,700	$U =$ 0,43682	0,45762	0,47941	0,50224	0,52616	0,55121	0,57746
$F =$ 0,38485	q = 168,11	176,11	184,50	193,29	202,49	212,13	222,23
$c =$ 54,445	Q = 14525	15216	15941	16700	17495	18328	19201
$D =$ 0,750	$U =$ 0,45927	0,48114	0,50405	0,52805	0,55319	0,57953	0,60713
$F =$ 0,441786	q = 202,90	212,56	222,68	233,28	244,39	256,03	268,22
$c =$ 55,302	Q = 17538	18365	19240	20156	21116	22121	23174
$D =$ 0,800	$U =$ 0,48116	0,50407	0,52807	0,55322	0,57956	0,60716	0,63607
$F =$ 0,502655	q = 241,86	253,37	265,44	278,08	291,32	305,19	319,72
$c =$ 56,098	Q = 20897	21892	22934	24026	25170	26368	27624
$D =$ 0,900	$U =$ 0,52348	0,54840	0,57452	0,60187	0,63053	0,66056	0,69201
$F =$ 0,636173	q = 333,02	348,88	365,49	382,90	401,13	420,23	440,24
$c =$ 57,541	Q = 28773	30143	31579	33082	34657	36308	38036
$D =$ 1,000	$U =$ 0,56409	0,59095	0,61909	0,64857	0,67945	0,71180	0,74570
$F =$ 0,785398	q = 443,04	464,13	486,23	509,38	533,64	559,05	585,67
$c =$ 58,824	Q = 38278	40101	42010	44011	46106	48302	50602
$D =$ 1,100	$U =$ 0,60319	0,63191	0,66200	0,69352	0,72654	0,76113	0,79738
$F =$ 0,950332	q = 573,23	600,52	629,11	659,07	690,45	723,33	757,77
$c =$ 59,973	Q = 49527	51885	54356	56944	59655	62496	65472
$D =$ 1,200	$U =$ 0,64094	0,67146	0,70343	0,73693	0,77202	0,80878	0,84729
$F =$ 1,13097	q = 724,89	759,40	795,57	833,44	873,13	914,70	958,26
$c =$ 61,014	Q = 62630	65612	68737	72010	75438	79030	82794

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =	0,00070548 ∼1:1418	0,00077426 ∼1:1292	0,00084975 ∼1:1177	0,00093260 ∼1:1072	0,0010235 ∼1:977	0,0011233 ∼1:890	0,0012323 ∼1:811
D = 0,040	U = 0,059024	0,061835	0,064779	0,067863	0,071095	0,074480	0,078026
F = 0,0012566	q = 0,07417	0,07740	0,08140	0,08528	0,08934	0,09359	0,09805
c = 22,222	Q = 6,4085	6,7136	7,0332	7,3682	7,7190	8,0866	8,4716
D = 0,050	U = 0,071894	0,075317	0,078904	0,082661	0,086597	0,090720	0,095040
F = 0,0019635	q = 0,14116	0,14789	0,15493	0,16230	0,17003	0,17813	0,18661
c = 24,210	Q = 12,197	12,777	13,386	14,023	14,691	15,390	16,123
D = 0,060	U = 0,084325	0,088340	0,092546	0,096953	0,10157	0,10641	0,11147
F = 0,0028274	q = 0,32842	0,24978	0,26167	0,27413	0,28715	0,30086	0,31518
c = 25,922	Q = 20,600	21,581	22,608	23,685	24,812	25,994	27,232
D = 0,070	U = 0,096377	0,10097	0,10577	0,11081	0,11609	0,12161	0,12740
F = 0,0038485	q = 0,37090	0,38856	0,40706	0,42645	0,44675	0,46802	0,49031
c = 27,429	Q = 32,046	33,572	35,170	36,845	38,599	40,437	42,363
D = 0,080	U = 0,10810	0,11325	0,11864	0,12429	0,13020	0,13640	0,14290
F = 0,0050265	q = 0,54336	0,56923	0,59634	0,62473	0,65448	0,68565	0,71829
c = 28,778	Q = 46,947	49,182	51,524	53,977	56,547	59,240	62,061
D = 0,090	U = 0,11952	0,12522	0,13118	0,13742	0,14397	0,15082	0,15800
F = 0,0063617	q = 0,76038	0,79658	0,83451	0,87425	0,91588	0,95949	1,0052
c = 30,000	Q = 65,697	68,825	72,102	75,535	79,132	82,900	86,847
D = 0,100	U = 0,13069	0,13691	0,14343	0,15026	0,15741	0,16491	0,17276
F = 0,0078540	q = 1,0264	1,0753	1,1265	1,1801	1,2363	1,2952	1,3569
c = 31,119	Q = 88,682	92,905	97,329	101,96	106,82	111,90	117,23
D = 0,125	U = 0,15756	0,16506	0,17292	0,18116	0,18978	0,19882	0,20829
F = 0,0122718	q = 1,9336	2,0256	2,1221	2,2231	2,3290	2,4399	2,5560
c = 33,557	Q = 167,06	175,01	183,35	192,08	201,22	210,80	220,84
D = 0,150	U = 0,18321	0,19194	0,20108	0,21065	0,22068	0,23119	0,24220
F = 0,0176715	q = 3,2376	3,3918	3,5533	3,7225	3,8997	4,0854	4,2800
c = 35,620	Q = 279,73	293,05	307,00	321,62	336,94	352,98	369.79
D = 0,175	U = 0,20782	0,21772	0,22808	0,23875	0,25032	0,26224	0,27473
F = 0,0240528	q = 4,9987	5,2367	5,4861	5,7473	6,0210	6,3077	6,6080
c = 37,408	Q = 431,89	452,45	474,00	496,57	520,21	544,98	570,93
D = 0,200	U = 0,23153	0,24255	0,25410	0,26620	0,27888	0,29216	0,30607
F = 0,0314159	q = 7,2737	7,6200	7,9828	8,3629	8,7612	9,1783	9,6154
c = 38,983	Q = 628,44	658,37	689,72	722,56	756,96	793,01	830,77
D = 0,225	U = 0,25446	0,26657	0,27927	0,29256	0,30650	0,32109	0,33638
F = 0,0397608	q = 10,117	10,599	11,104	11,633	12,186	12,767	13,375
c = 40,394	Q = 874,15	915,77	959,37	1005,1	1052,9	1103,0	1155,6
D = 0,250	U = 0,27668	0,28985	0,30365	0,31811	0,33326	0,34913	0,36575
F = 0,0490874	q = 13,581	14,228	14,905	15,615	16,359	17,138	17,954
c = 41,667	Q = 1173,4	1229,3	1287,8	1349,2	1413,4	1480,7	1551,2
D = 0,275	U = 0,29828	0,31248	0,32736	0,34295	0,35928	0,37638	0,39431
F = 0,0593957	q = 17,716	18,560	19,444	20,370	21,340	22,356	23,420
c = 42,830	Q = 1530,7	1603,6	1679,9	1759,9	1843,7	1931,5	2023,5
D = 0,300	U = 0,31932	0,33452	0,35045	0,36714	0,38462	0,40293	0,42212
F = 0,0706858	q = 22,571	23,646	24,772	25,951	27,187	28,482	29,838
c = 43,899	Q = 1950,2	2043,0	2140,3	2242,2	2349,0	2460,8	2578,0
D = 0,325	U = 0,33983	0,35601	0,37296	0,39072	0,40932	0,42881	0,44923
F = 0,0829577	q = 28,191	29,534	30,940	32,413	33,956	35,573	37,267
c = 44,885	Q = 2435,7	2551,7	2673,2	2800,5	2933,8	3073,5	3219,9
	22	23	24	25	26	27	28

	22	23	24	25	26	27	28
$J =$	0,00070548 ∼1:1418	0,00077426 ∼1:1292	0,00084975 ∼1:1177	0,00093260 ∼1:1072	0,0010235 ∼1:977	0,0011238 ∼1:890	0,0012328 ∼1:811
D=0,350 F=0,0962113 c=45,804	U=0,35988 q= 34,624 Q=2991,5	0,37701 36,273 3134,0	0,39496 38,000 3283,2	0,41377 39,809 3439,5	0,43347 41,705 3603,3	0,45411 43,691 3774,9	0,47573 45,771 3954,6
D=0,375 F=0,110447 c=46,661	U=0,37947 q= 41,911 Q=3621,1	0,39754 43,907 3793,6	0,41647 45,998 3974,2	0,43630 48,188 4163,4	0,45707 50,482 4361,7	0,47884 52,886 4569,3	0,50164 55,404 4786,9
D=0,400 F=0,125664 c=47,464	U=0,39866 q= 50,097 Q=4328,4	0,41764 52,483 4534,5	0,43753 54,982 4750,4	0,45836 57,600 4976,6	0,48019 60,342 5213,6	0,50305 63,216 5461,8	0,52701 66,226 5721,9
D=0,425 F=0,141863 c=48,223	U=0,41750 q= 59,228 Q=5117,3	0,43738 62,048 5360,9	0,45821 65,002 5616,2	0,48002 68,097 5883,6	0,50288 71,340 6163,8	0,52683 74,737 6457,3	0,55191 78,295 6764,7
D=0,450 F=0,159043 c=48,936	U=0,43596 q= 69,337 Q=5990,7	0,45672 72,639 6276,0	0,47847 76,097 6574,8	0,50125 79,721 6887,9	0,52512 83,517 7215,9	0,55012 87,494 7559,4	0,57632 91,660 7919,4
D=0,475 F=0,177205 c=49,611	U=0,45409 q= 80,467 Q=6952,4	0,47591 84,299 7283,4	0,49836 88,313 7630,2	0,52209 92,518 7993,5	0,54695 96,923 8374,1	0,57300 101,54 8772,9	0,60028 106,37 9190,6
D=0,500 F=0,196350 c=50,253	U=0,47191 q= 92,659 Q=8005,7	0,49438 97,071 8386,9	0,51792 101,69 8786,3	0,54258 106,54 9204,6	0,56841 111,61 9642,9	0,59548 116,92 10102	0,62383 122,49 10583
D=0,550 F=0,237583 c=51,444	U=0,50668 q= 120,38 Q=10401	0,53080 126,11 10846	0,55608 132,11 11415	0,58255 138,41 11958	0,61029 145,00 12528	0,63935 151,90 13124	0,66980 159,13 13749
D=0,600 F=0,282743 c=52,529	U=0,54037 q= 152,79 Q=13201	0,56610 160,06 13829	0,59305 167,68 14488	0,62129 175,67 15178	0,65088 184,03 15900	0,68187 192,79 16656	0,71433 201,97 17450
D=0,650 F=0,331831 c=53,527	U=0,57312 q= 190,18 Q=16431	0,60041 199,23 17214	0,62900 208,72 18033	0,65895 218,66 18892	0,69032 229,07 19792	0,72319 239,98 20734	0,75763 251,40 21721
D=0,700 F=0,384845 c=54,445	U=0,60495 q= 232,81 Q=20115	0,63376 243,90 21073	0,66393 255,51 22076	0,69555 267,68 23127	0,72867 280,42 24229	0,76336 293,78 25382	0,79971 307,77 26591
D=0,750 F=0,441786 c=55,302	U=0,63604 q= 280,99 Q=24278	0,66632 294,37 25434	0,69805 308,39 26645	0,73129 323,07 27913	0,76611 338,46 29243	0,80259 354,57 30635	0,84080 371,46 32094
D=0,800 F=0,502655 c=56,098	U=0,66635 q= 334,95 Q=28939	0,69808 350,89 30317	0,73132 367,60 31761	0,76615 385,11 33273	0,80263 403,44 34858	0,84084 422,65 36517	0,88088 442,78 38256
D=0,900 F=0,636173 c=57,541	U=0,72496 q= 461,20 Q=39848	0,75948 483,16 41745	0,79564 506,17 43733	0,83353 530,27 45815	0,87322 555,52 47997	0,91479 581,97 50282	0,95835 609,68 52676
D=1,000 F=0,785398 c=58,824	U=0,78120 q= 613,55 Q=53011	0,81840 642,77 55535	0,85737 673,38 58180	0,89819 705,44 60950	0,94096 739,03 63852	0,98577 774,22 66892	1,0327 811,08 70078
D=1,100 F=0,950332 c=59,973	U=0,83534 q= 793,85 Q=68589	0,87512 831,65 71855	0,91679 871,25 75276	0,96044 912,74 78861	1,0062 956,22 82616	1,0541 1001,7 86549	1,1043 1049,4 90671
D=1,200 F=1,13097 c=61,014	U=0,88763 q= 1003,9 Q=86736	0,92990 1051,7 90866	0,97417 1101,8 95192	1,0206 1154,2 99725	1,0692 1209,2 104474	1,1201 1266,8 109448	1,1734 1327,1 114660

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

$J=$	0,0013530 ∼1:739	0,0014850 ∼1:673	0,0016298 ∼1:614	0,0017886 ∼1:559	0,0019630 ∼1:509	0,0021544 ∼1:464	0,0023645 ∼1:423	0,0025950 ∼1:385
D=0,040	U=0,081742	0,085634	0,089712	0,093983	0,098458	0,10315	0,10806	0,11320
F=0,0012566	q= 0,10272	0,10761	0,11273	0,11810	0,12373	0,12962	0,13579	0,14226
c=22,222	Q=8,8750	9,2976	9,7403	10,204	10,690	11,199	11,732	12,291
D=0,050	U=0,099565	0,10431	0,10927	0,11448	0,11993	0,12564	0,13162	0,13789
F=0,0019635	q= 0,19550	0,20480	0,21456	0,22477	0,23548	0,24669	0,25843	0,27074
c=24,210	Q=16,891	17,695	18,538	19,420	20,345	21,314	22,329	23,392
D=0,060	U=0,11678	0,12234	0,12817	0,13427	0,14066	0,14736	0,15438	0,16173
F=0,0028274	q= 0,33019	0,34591	0,36238	0,37964	0,39771	0,41665	0,43649	0,45727
c=25,922	Q=28,528	29,887	31,310	32,801	34,362	35,999	37,713	39,508
D=0,070	U=0,13347	0,13983	0,14648	0,15346	0,16077	0,16842	0,17644	0,18484
F=0,0038485	q= 0,51366	0,53811	0,56374	0,59058	0,61870	0,64816	0,67902	0,71135
c=27,429	Q=44,380	46,493	48,707	51,026	53,456	56,001	58,668	61,464
D=0,080	U=0,14970	0,15683	0,16430	0,17212	0,18032	0,18891	0,19790	0,20732
F=0,0050265	q= 0,75250	0,78833	0,82586	0,86519	0,90638	0,94954	0,99475	1,0421
c=28,778	Q=65,016	68,111	71,190	74,752	78,311	82,040	85,947	90,039
D=0,090	U=0,16553	0,17341	0,18167	0,19032	0,19938	0,20887	0,21882	0,22924
F=0,0063617	q= 1,0530	1,1032	1,1557	1,2107	1,2684	1,3288	1,3921	1,4583
c=30,000	Q=90,982	95,315	99,853	104,61	109,59	114,81	120,27	126,00
D=0,100	U=0,18099	0,18960	0,19863	0,20809	0,21800	0,22838	0,23925	0,25065
F=0,0078540	q= 1,4215	1,4892	1,5601	1,6343	1,7122	1,7937	1,8791	1,9686
c=31,119	Q=122,81	128,66	134,79	141,21	147,93	154,97	162,35	170,08
D=0,125	U=0,21820	0,22860	0,23948	0,25088	0,26283	0,27534	0,28845	0,30219
F=0,0122718	q= 2,6778	2,8053	2,9388	3,0788	3,2254	3,3789	3,5398	3,7084
c=33,557	Q=231,36	242,37	253,92	266,01	278,67	291,94	305,84	320,40
D=0,150	U=0,25373	0,26581	0,27847	0,29173	0,30562	0,32017	0,33541	0,35138
F=0,0176715	q= 4,4837	4,6972	4,9209	5,1552	5,4007	5,6578	5,9272	6,2095
c=35,620	Q=387,40	405,84	425,17	445,41	466,62	488,84	512,11	536,50
D=0,175	U=0,28781	0,30151	0,31587	0,33091	0,34667	0,36318	0,38047	0,39858
F=0,0240528	q= 6,9226	7,2523	7,5976	7,9594	8,3384	8,7354	9,1513	9,5871
c=37,408	Q=598,12	626,60	656,43	687,69	720,43	754,74	790,67	828,32
D=0,200	U=0,32064	0,33591	0,35190	0,36866	0,38621	0,40460	0,42387	0,44405
F=0,0314159	q= 10,073	10,553	11,056	11,582	12,133	12,711	13,316	13,950
c=38,983	Q=870,32	911,77	955,18	1000,7	1048,3	1098,2	1150,5	1205,3
D=0,225	U=0,35240	0,36917	0,38675	0,40517	0,42446	0,44467	0,46585	0,48803
F=0,0397608	q= 14,011	14,679	15,378	16,110	16,877	17,672	18,522	19,404
c=40,394	Q=1210,6	1268,2	1328,6	1391,9	1458,2	1527,6	1600,3	1676,5
D=0,250	U=0,38316	0,40141	0,42052	0,44055	0,46152	0,48350	0,50652	0,53064
F=0,0490874	q= 18,809	19,704	20,642	21,625	22,655	23,734	24,864	26,048
c=41,667	Q=1625,1	1702,4	1783,5	1868,4	1957,4	2050,6	2148,2	2250,5
D=0,275	U=0,41308	0,43275	0,45336	0,47494	0,49756	0,52125	0,54607	0,57207
F=0,0593957	q= 24.535	25,704	26,927	28,210	29,558	30,960	30,434	33,979
c=42,830	Q=2119,8	2220,8	2326,5	2437,3	2553,4	2674,9	2802,3	2935,8
D=0,300	U=0,44222	0,46328	0,48534	0,50844	0,53265	0,55802	0,58459	0,61242
F=0,0706858	q= 31,259	32,747	34,306	35,940	37,651	39,444	41,322	43,290
c=43,899	Q=2700,7	2829,3	2964,1	3105,2	3253,1	3408,0	3570,2	3740,2
D=0,325	U=0,47062	0,49303	0,51651	0,54110	0,56687	0,59386	0,62213	0,65176
F=0,0829577	q= 39,042	40,901	42,848	44,888	47,026	49,265	51,611	54,068
c=44,885	Q=3373,2	3533,8	3702,1	3878,4	4063,0	4256,5	4459,2	4671,5
	29	30	31	32	33	34	35	36

	29	30	31	32	33	34	35	36
$J=$	0,0013530 ∼1:739	0,0014850 ∼1:673	0,0016298 ∼1:614	0,0017886 ∼1:559	0,0019630 ∼1:509	0,0021544 ∼1:464	0,0023645 ∼1:423	0,0025950 ∼1:385
$D=$0,350	$U=$0,49839	0,52212	0,54698	0,57302	0,60031	0,62889	0,65884	0,69021
$F=$0,0962113	$q=$ 47,950	50,234	52,626	55,131	57,756	60,507	63,388	66,406
$c=$45,804	$Q=$4142,9	4340,2	4546,8	4763,3	4990,2	5227,8	5476,7	5737,5
$D=$0,375	$U=$0,52552	0,55055	0,57676	0,60422	0,63299	0,66318	0,69471	0,72779
$F=$0,110447	$q=$ 58,042	60,806	63,701	66,734	69,912	73,241	76,728	80,382
$c=$46,661	$Q=$5014,9	5253,6	5503,8	5765,9	6040,4	6328,0	6629,3	6945,0
$D=$0,400	$U=$0,55210	0,57839	0,60593	0,63478	0,66501	0,69667	0,72985	0,76460
$F=$0,125664	$q=$ 69,379	72,683	76,144	79,769	83,567	87,547	91,715	96,082
$c=$47,464	$Q=$5994,4	6279,8	6578,8	6892,1	7220,2	7564,0	7924,2	8301,5
$D=$0,425	$U=$0,57819	0,60572	0,63456	0,66478	0,69643	0,72959	0,76433	0,80073
$F=$0,141863	$q=$ 82,024	85,929	90,021	94,307	98,798	103,50	108,43	113,59
$c=$48,223	$Q=$7086,8	7424,3	7777,8	8148,1	8536,1	8942,6	9368,4	9814,5
$D=$0,450	$U=$0,60376	0,63251	0,66263	0,69418	0,72723	0,76186	0,79814	0,83614
$F=$0,159043	$q=$ 96,024	100,60	105,39	110,40	115,66	121,17	126,94	132,98
$c=$48,936	$Q=$8296,5	8691,5	9105,4	9538,9	9993,1	10469	10967	11490
$D=$0,475	$U=$0,62886	0,65881	0,69018	0,72304	0,75747	0,79353	0,83132	0,87090
$F=$0,177205	$q=$ 111,44	116,74	122,30	128,13	134,23	140,62	147,31	154,33
$c=$49,611	$Q=$9628,2	10087	10567	11070	11597	12149	12728	13334
$D=$0,500	$U=$0,65354	0,68466	0,71726	0,75141	0,78719	0,82467	0,86394	0,90508
$F=$0,196350	$q=$ 128,32	134,43	140,83	147,54	154,56	161,92	169,63	177,71
$c=$50,253	$Q=$11087	11615	12168	12747	13354	13990	14656	15354
$D=$0,550	$U=$0,70169	0,73510	0,77010	0,80677	0,84519	0,88543	0,92759	0,97176
$F=$0,237583	$q=$ 166,71	174,65	182,96	191,68	200,80	210,36	220,38	230,87
$c=$51,444	$Q=$14404	15090	15808	16561	17349	18175	19041	19947
$D=$0,600	$U=$0,74835	0,78398	0,82131	0,86042	0,90139	0,94431	0,98927	1,0364
$F=$0,282743	$q=$ 211,59	221,67	232,22	243,28	254,86	267,00	279,71	293,03
$c=$52,529	$Q=$18281	19152	20064	21019	22020	23069	24167	25318
$D=$0,650	$U=$0,79370	0,83149	0,87109	0,91256	0,95602	1,0015	1,0492	1,0992
$F=$0,331831	$q=$ 263,37	275,92	289,05	302,82	317,24	332,34	348,17	364,74
$c=$53,527	$Q=$22756	23839	24974	26163	27409	28714	30082	31514
$D=$0,700	$U=$0,83779	0,87768	0,91947	0,96326	1,0091	1,0572	1,1075	1,1602
$F=$0,384845	$q=$ 322,42	337,77	353,86	370,70	388,36	406,85	426,22	446,51
$c=$54,445	$Q=$27857	29183	30573	32029	33554	35152	36825	38579
$D=$0,750	$U=$0,88084	0,92278	0,96672	1,0127	1,0610	1,1115	1,1644	1,2199
$F=$0,441786	$q=$ 389,14	407,67	427,08	447,42	468,72	491,04	514,42	538,92
$c=$55,302	$Q=$33622	35223	36900	38657	40498	42426	44446	46563
$D=$0,800	$U=$0,92282	0,96677	1,0128	1,0610	1,1115	1,1645	1,2199	1,2780
$F=$0,502655	$q=$ 463,86	485,95	509,09	533,33	558,72	585,33	613,20	642,40
$c=$56,098	$Q=$40078	41986	43985	46080	48274	50572	52980	55503
$D=$0,900	$U=$1,0040	1,0518	1,1019	1,1543	1,2093	1,2669	1,3272	1,3904
$F=$0,636173	$q=$ 638,71	669,12	700,98	734,36	769,33	805,96	844,33	884,54
$c=$57,541	$Q=$55184	57812	60565	63449	66470	69635	72951	76724
$D=$1,000	$U=$1,0819	1,1334	1,1874	1,2439	1,3031	1,3652	1,4302	1,4983
$F=$0,785398	$q=$ 849,70	890,16	932,55	976,95	1023,5	1072,2	1123,3	1176,7
$c=$58,824	$Q=$73414	76910	80572	84409	88428	92638	97050	101671
$D=$1,100	$U=$1,1569	1,2119	1,2696	1,3301	1,3934	1,4598	1,5293	1,6021
$F=$0,950332	$q=$ 1099,4	1151,7	1206,6	1264,0	1324,2	1387,3	1453,3	1522,5
$c=$59,973	$Q=$94988	99511	104249	109213	114413	119861	125568	13154
$D=$1,200	$U=$1,2293	1,2878	1,3491	1,4134	1,4807	1,5512	1,6250	1,7024
$F=$1,13097	$q=$ 1390,3	1456,5	1525,8	1598,4	1674,6	1754,3	1837,9	1925,4
$c=$61,014	$Q=$120119	125889	131831	138106	144684	151573	158791	166352

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =	0,0028480 ∼1:351	0,0031257 ∼1:320	0,0034305 ∼1:292	0,0037649 ∼1:266	0,0041320 ∼1:242	0,0045349 ∼1:221	0,0049770 ∼1:201	0,0054623 ∼1:183
D = 0,040 *F* = 0,0012566 *c* = 22,222	*U* = 0,11859 q = 0,14903 Q = 12,876	0,12424 0,15612 13,489	0,13016 0,16356 14,131	0,13635 0,17135 14,804	0,14285 0,17951 15,509	0,14965 0,18805 16,248	0,15677 0,19701 17,021	0,16424 0,20639 17,832
D = 0,050 *F* = 0,0019635 *c* = 24,210	*U* = 0,14445 q = 0,28363 Q = 24,506	0,15133 0,29714 25,673	0,15854 0,31128 26,895	0,16608 0,32611 28,176	0,17399 0,34163 29,517	0,18228 0,35790 30,923	0,19096 0,37494 32,395	0,20005 0,39280 33,938
D = 0,060 *F* = 0,0028274 *c* = 25,922	*U* = 0,16943 q = 0,47905 Q = 41,390	0,17750 0,50186 43,360	0,18595 0,52575 45,425	0,19480 0,55079 47,588	0,20408 0,57701 49,854	0,21379 0,60449 52,288	0,22397 0,63327 54,715	0,23464 0,66343 57,320
D = 0,070 *F* = 0,0038485 *c* = 27,429	*U* = 0,19364 q = 0,74523 Q = 64,388	0,20286 0,78071 67,453	0,21252 0,81789 70,665	0,22264 0,85683 74,030	0,23324 0,89763 77,555	0,24435 0,94037 81,248	0,25599 0,98515 85,117	0,26817 1,0321 89,169
D = 0,080 *F* = 0,0050265 *c* = 28,778	*U* = 0,21720 q = 1,0917 Q = 94,326	0,22754 1,1437 98,818	0,23837 1,1982 103,52	0,24972 1,2552 108,45	0,26161 1,3150 113,62	0,27407 1,3776 119,03	0,28712 1,4432 124,69	0,30079 1,5119 130,63
D = 0,090 *F* = 0,0063617 *c* = 30,000	*U* = 0,24015 q = 1,5278 Q = 132,00	0,25159 1,6005 138,29	0,26357 1,6767 144,87	0,27612 1,7566 151,77	0,28926 1,8402 158,99	0,30304 1,9278 166,57	0,31747 2,0196 174,50	0,33258 2,1158 182,81
D = 0,100 *F* = 0,0078540 *c* = 31,119	*U* = 0,26258 q = 2,0623 Q = 178,18	0,27508 2,1605 186,67	0,28818 2,2634 195,56	0,30190 2,3712 204,87	0,31628 2,4841 214,62	0,33134 2,6023 224,84	0,34712 2,7262 235,55	0,36365 2,8561 246,76
D = 0,125 *F* = 0,0122718 *c* = 33,557	*U* = 0,31658 q = 3,8850 Q = 335,66	0,33165 4,0699 351,64	0,34744 4,2637 368,39	0,36398 4,4668 385,93	0,38132 4,6795 404,30	0,39947 4,9023 423,56	0,41849 5,1357 443,72	0,43842 5,3802 464,85
D = 0,150 *F* = 0,0176715 *c* = 35,620	*U* = 0,36812 q = 6,5051 Q = 562,04	0,38564 6,8149 588,81	0,40401 7,1394 616,84	0,42324 7,4793 646,21	0,44340 7,8355 676,98	0,46451 8,2086 709,22	0,48663 8,5994 742,99	0,50980 9,0089 778,37
D = 0,175 *F* = 0,0240528 *c* = 37,408	*U* = 0,41756 q = 10,044 Q = 867,76	0,43745 10,522 909,08	0,45828 11,023 952,37	0,48010 11,548 997,72	0,50296 12,098 1045,2	0,52691 12,674 1095,0	0,55199 13,277 1147,1	0,57828 13,909 1201,8
D = 0,200 *F* = 0,0314159 *c* = 38,983	*U* = 0,46519 q = 14,614 Q = 1262,7	0,48734 15,310 1322,8	0,51055 16,039 1385,8	0,53486 16,803 1451,8	0,56033 17,603 1520,9	0,58701 18,441 1593,3	0,61496 19,319 1669,2	0,64424 20,239 174,87
D = 0,225 *F* = 0,0397608 *c* = 40,394	*U* = 0,51127 q = 20,328 Q = 1756,4	0,53561 21,296 1840,0	0,56111 22,310 1927,6	0,58783 23,273 2019,4	0,61582 24,485 2115,5	0,64514 25,651 2216,3	0,67586 26,878 2321,8	0,70804 28,152 2432,3
D = 0,250 *F* = 0,0490874 *c* = 41,667	*U* = 0,55591 q = 27,288 Q = 2357,7	0,58238 28,587 2469,9	0,61011 29,949 2587,6	0,63916 31,375 2710,8	0,66959 32,868 2839,8	0,70147 34,434 2975,1	0,73488 36,073 3116,7	0,76987 37,791 3265,1
D = 0,275 *F* = 0,0593957 *c* = 42,830	*U* = 0,59931 q = 35,597 Q = 3075,5	0,62785 37,291 3222,0	0,65774 39,067 3375,4	0,68906 40,927 3536,1	0,72187 42,876 3704,5	0,75624 44,918 3880,9	0,79225 47,056 4065,7	0,82998 49,297 4259,3
D = 0,300 *F* = 0,0706858 *c* = 43,899	*U* = 0,64158 q = 45,351 Q = 3918,3	0,67213 47,510 4104,9	0,70414 49,773 4300,4	0,73767 52,143 4505,1	0,77279 54,625 4719,6	0,80959 57,226 4944,4	0,84814 59,951 5179,8	0,88853 62,806 5426,4
D = 0,325 *F* = 0,0829577 *c* = 44,885	*U* = 0,68279 q = 56,643 Q = 4893,9	0,71530 59,340 5127,0	0,74936 62,165 5371,1	0,78504 65,125 5626,8	0,82243 68,226 5894,8	0,86159 71,475 6175,5	0,90261 74,879 6469,5	0,94559 78,444 6777,6
	37	38	39	40	41	42	43	44

	37	38	39	40	41	42	43	44
J =	0,0028480 ∼1:351	0,0031257 ∼1:320	0,0034305 ∼1:292	0,0037649 ∼1:266	0,0041320 ∼1:242	0,0045249 ∼1:221	0,0049770 ∼1:201	0,0054628 ∼1:183
***D* = 0,350**	*U* = 0,72307	0,75750	0,79357	0,83136	0,87095	0,91242	0,95586	1,0014
F = 0,0962113	q = 69,568	72,880	76,531	79,986	83,795	87,785	91,965	96,344
c = 45,804	Q = 6010,7	6296,9	6596,7	6910,8	7239,9	7584,6	7945,7	8324,1
***D* = 0,375**	*U* = 0,76244	0,79875	0,83678	0,87663	0,91837	0,96210	1,0079	1,0559
F = 0,110447	q = 84,209	88,219	92,420	96,820	101,43	106,26	111,32	116,62
c = 46,661	Q = 7275,7	7622,1	7985,1	8365,3	8763,6	9180,9	9618,0	10076
***D* = 0,400**	*U* = 0,80101	0,83915	0,87910	0,92096	0,96481	1,0108	1,0589	1,1093
F = 0,125664	q = 100,66	105,45	110,47	115,73	121,24	127,02	133,06	139,40
c = 47,464	Q = 8696,8	9110,9	9544,7	9999,2	10475	10974	11497	12044
***D* = 0,425**	*U* = 0,83886	0,87880	0,92064	0,96448	1,0104	1,0585	1,1089	1,1617
F = 0,141863	q = 119,00	124,67	130,60	136,82	143,34	150,16	157,31	164,80
c = 48,223	Q = 10282	10771	11284	11822	12384	12974	13592	14239
***D* = 0,450**	*U* = 0,87595	0,91766	0,96136	1,0071	1,0551	1,1053	1,1580	1,2131
F = 0,159043	q = 139,31	145,95	152,90	160,18	167,80	175,79	184,17	192,93
c = 48,936	Q = 12037	12610	13210	13839	14498	15189	15912	16670
***D* = 0,475**	*U* = 0,91237	0,95581	1,0013	1,0490	1,0990	1,1513	1,2061	1,2635
F = 0,177205	q = 161,68	169,38	177,44	185,89	194,74	204,01	213,73	223,90
c = 49,611	Q = 13969	14634	15331	16061	16826	17627	18466	19345
***D* = 0,500**	*U* = 0,94817	0,99332	1,0406	1,0902	1,1421	1,1965	1,2534	1,3131
F = 0,196350	q = 186,17	195,04	204,32	214,05	224,25	234,92	246,11	257,83
c = 50,253	Q = 16085	16851	17654	18494	19375	20297	21264	22276
***D* = 0,550**	*U* = 1,0180	1,0665	1,1173	1,1705	1,2262	1,2846	1,3458	1,4099
F = 0,237583	q = 241,87	253,38	265,45	278,09	291,33	305,20	319,73	334,96
c = 51,444	Q = 20897	21892	22935	24027	25171	26369	27652	28940
***D* = 0,600**	*U* = 1,0857	1,1374	1,1916	1,2483	1,3078	1,3700	1,4353	1,5036
F = 0,282743	q = 306,98	321,60	336,91	352,95	369,76	387,37	405,81	425,13
c = 52,529	Q = 26523	27786	29109	30495	31947	33468	35062	36732
***D* = 0,650**	*U* = 1,1515	1,2064	1,2638	1,3240	1,3870	1,4531	1,5222	1,5947
F = 0,331831	q = 382,11	400,31	419,37	439,34	460,26	482,17	505,13	529,18
c = 53,527	Q = 33014	34586	36233	37959	39766	41659	43643	45721
***D* = 0,700**	*U* = 1,2155	1,2734	1,3340	1,3975	1,4641	1,5338	1,6068	1,6833
F = 0,384845	q = 467,78	490,05	513,38	537,83	563,44	590,26	618,37	647,82
c = 54,445	Q = 40416	42390	44356	46468	48681	50999	53427	55971
***D* = 0,750**	*U* = 1,2779	1,3388	1,4025	1,4693	1,5393	1,6126	1,6894	1,7698
F = 0,441786	q = 564,58	591,46	619,62	649,13	680,04	712,42	746,34	781,88
c = 55,302	Q = 48780	51102	53536	56085	58755	61553	64484	67554
***D* = 0,800**	*U* = 1,3389	1,4026	1,4694	1,5394	1,6127	1,6895	1,7699	1,8542
F = 0,502655	q = 672,98	705,03	738,60	773,77	810,61	849,21	889,65	932,01
c = 56,098	Q = 58146	60915	63815	66854	70037	73872	76865	80525
***D* = 0,900**	*U* = 1,4566	1,5260	1,5986	1,6747	1,7545	1,8380	1,9256	2,0172
F = 0,636173	q = 926,66	970,78	1017,0	1065,4	1116,2	1169,3	1225,0	1283,3
c = 57,541	Q = 80063	83875	87869	92053	96436	101028	105839	110878
***D* = 1,000**	*U* = 1,5695	1,6444	1,7227	1,8047	1,8906	1,9806	2,0749	2,1737
F = 0,785398	q = 1232,8	1291,5	1353,0	1417,4	1484,9	1555,6	1629,7	1707,8
c = 58,824	Q = 106512	111588	116897	122463	128294	134408	140802	147507
***D* = 1,100**	*U* = 1,6784	1,7583	1,8420	1,9298	2,0216	2,1179	2,2187	2,3244
F = 0,950332	q = 1595,0	1671,0	1750,6	1833,9	1921,2	2012,7	2108,5	2208,9
c = 59,973	Q = 137811	144373	151248	158449	165994	173898	182178	190853
***D* = 1,200**	*U* = 1,7835	1,8684	1,9573	2,0505	2,1482	2,2505	2,3576	2,4699
F = 1,13097	q = 2017,0	2113,1	2213,7	2319,1	2429,5	2545,2	2666,4	2793,4
c = 61,014	Q = 174272	182571	191264	200371	209912	219907	230878	241348

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =	0,0059948 ∼1:167	0,0065793 ∼1:152	0,0072208 ∼1:138	0,0079248 ∼1:126	0,0086975 ∼1:115	0,0095456 ∼1:105	0,010476 ∼1:95
D = 0,040	U = 0,17206	0,18025	0,18883	0,19783	0,20725	0,21711	0,22745
F = 0,0012566	q = 0,21622	0,22651	0,23730	0,24859	0,26043	0,27283	0,28582
c = 22,222	Q = 18,681	19,571	20,502	21,479	22,501	23,573	24,695
D = 0,050	U = 0,20958	0,21955	0,23001	0,24096	0,25243	0,26445	0,27705
F = 0,0019635	q = 0,41150	0,43109	0,45162	0,47313	0,49568	0,51925	0,54398
c = 24,210	Q = 35,554	37,247	39,020	40,878	42,824	44,864	47,000
D = 0,060	U = 0,24581	0,25752	0,26978	0,28262	0,29608	0,31018	0,32495
F = 0,0028274	q = 0,69501	0,72811	0,76278	0,79910	0,83715	0,87701	0,91877
c = 25,922	Q = 60,049	62,909	65,904	69,042	72,330	75,774	79,382
D = 0,070	U = 0,28094	0,29432	0,30833	0,32302	0,33840	0,35451	0,37139
F = 0,0038485	q = 1,0812	1,1327	1,1866	1,2431	1,3023	1,3643	1,4293
c = 27,429	Q = 93,415	97,863	102,52	107,40	112,52	117,88	123,49
D = 0,080	U = 0,31511	0,33012	0,34584	0,36230	0,37955	0,39763	0,41656
F = 0,0050265	q = 1,5839	1,6594	1,7384	1,8211	1,9078	1,9987	2,0939
c = 28,778	Q = 136,85	143,37	150,19	157,35	164,84	172,69	180,91
D = 0,090	U = 0,34842	0,36501	0,38239	0,40060	0,41967	0,43965	0,46059
F = 0,0063617	q = 2,2165	2,3221	2,4327	2,5485	2,6698	2,7970	2,9301
c = 30,000	Q = 191,51	200,63	210,18	220,19	230,67	241,66	253,16
D = 0,100	U = 0,38096	0,39910	0,41810	0,43801	0,45887	0,48072	0,50361
F = 0,0078540	q = 2,9921	3,1345	3,2838	3,4401	3,6039	3,7755	3,9553
c = 31,119	Q = 258,51	270,82	283,72	297,23	311,38	326,21	341,74
D = 0,125	U = 0,45930	0,48117	0,50408	0,52808	0,55322	0,57957	0,60716
F = 0,0122718	q = 5,6364	5,9048	6,1860	6,4805	6,7891	7,1123	7,4510
c = 33,557	Q = 486,99	510,17	534,47	559,92	586,58	614,51	643,77
D = 0,150	U = 0,53407	0,55950	0,58614	0,61405	0,64329	0,67392	0,70601
F = 0,0176715	q = 9,4379	9,8872	10,358	10,851	11,368	11,909	12,476
c = 35,620	Q = 815,43	854,26	894,93	937,55	982,19	1029,0	1078,0
D = 0,175	U = 0,60581	0,63466	0,66488	0,69654	0,72970	0,76445	0,80085
F = 0,0240528	q = 14,572	15,265	15,992	16,754	17,551	18,387	19,263
c = 37,408	Q = 1259,0	1318,9	1381,7	1447,5	1516,4	1588,7	1664,3
D = 0,200	U = 0,67492	0,70705	0,74072	0,77599	0,81294	0,85165	0,89220
F = 0,0314159	q = 21,203	22,213	23,270	24,378	25,539	26,755	28,029
c = 38,983	Q = 1831,9	1919,2	2010,6	2106,3	2206,6	2311,7	2421,7
D = 0,225	U = 0,74176	0,77708	0,81408	0,85284	0,89345	0,93599	0,98056
F = 0,0397608	q = 29,493	30,897	32,368	33,910	35,524	37,216	38,988
c = 40,394	Q = 2548,2	2669,5	2796,6	2929,8	3069,3	3215,4	3368,5
D = 0,250	U = 0,80652	0,84493	0,88516	0,92731	0,97146	1,0177	1,0662
F = 0,0490874	q = 39,590	41,475	43,450	45,519	47,687	49,957	52,336
c = 41,667	Q = 3420,6	3583,5	3754,1	3932,8	4120,1	4316,3	4521,8
D = 0,275	U = 0,86950	0,91090	0,95427	0,99971	1,0473	1,0972	1,1494
F = 0,0593957	q = 51,644	54,104	56,680	59,379	62,206	65,168	68,271
c = 42,830	Q = 4462,1	4674,5	4897,1	5130,3	5374,6	5630,5	5898,6
D = 0,300	U = 0,93083	0,97515	1,0216	1,0702	1,1212	1,1746	1,2305
F = 0,0706858	q = 65,796	68,929	72,212	75,650	79,252	83,026	86,979
c = 43,899	Q = 5684,8	5955,5	6239,1	6536,2	6847,4	7173,4	7515,0
D = 0,325	U = 0,99061	1,0378	1,0872	1,1390	1,1932	1,2500	1,3095
F = 0,0829577	q = 82,179	86,092	90,191	94,486	98,985	103,70	108,64
c = 44,885	Q = 7100,3	7438,4	7792,5	8163,6	8552,3	8959,5	9386,1
	45	46	47	48	49	50	51

		45	46	47	48	49	50	51
$J=$		0,0059948 ∼1:167	0,0065798 ∼1:152	0,0072208 ∼1:138	0,0079248 ∼1:126	0,0086975 ∼1:115	0,0095455 ∼1:105	0,010476 ∼1:95
D=0,350	U=	1,0491	1,0990	1,1513	1,2062	1,2636	1,3238	1,3868
F=0,0962113	q=	100,93	105,74	110,77	116,05	121,57	127,36	133,42
c=45,804	Q=	8720,4	9135,7	9570,7	10026	10504	11004	11528
D=0,375	U=	1,1062	1,1588	1,2140	1,2718	1,3324	1,3958	1,4623
F=0,110447	q=	122,17	127,99	134,09	140,47	147,16	154,17	161,51
c=46,661	Q=	10556	11058	11585	12137	12714	13320	13954
D=0,400	U=	1,1621	1,2175	1,2754	1,3362	1,3998	1,4664	1,5366
F=0,125664	q=	146,04	152,99	160,27	167,91	175,90	184,28	193,05
c=47,464	Q=	12618	13218	13848	14507	15198	15922	16680
D=0,425	U=	1,2170	1,2750	1,3357	1,3993	1,4659	1,5357	1,6088
F=0,141863	q=	172,65	180,87	189,49	198,51	207,96	217,86	228,24
c=48,223	Q=	14917	15627	16372	17151	17968	18823	19720
D=0,450	U=	1,2709	1,3314	1,3948	1,4612	1,5308	1,6036	1,6800
F=0,159043	q=	202,12	211,75	221,83	232,39	243,46	255,05	267,19
c=48,936	Q=	17463	18295	19166	20079	21035	22036	23085
D=0,475	U=	1,3237	1,3867	1,4528	1,5219	1,5944	1,6703	1,7498
F=0,177205	q=	234,57	245,73	257,44	269,69	282,54	295,99	310,08
c=49,611	Q=	20266	21231	22242	23302	24411	25573	26791
D=0,500	U=	1,3756	1,4411	1,5098	1,5816	1,6570	1,7359	1,8185
F=0,196350	q=	270,11	282,97	296,44	310,56	325,34	340,83	357,06
c=50,253	Q=	23337	24448	25612	26832	28110	29448	30850
D=0,550	U=	1,4770	1,5473	1,6210	1,6982	1,7790	1,8637	1,9525
F=0,237583	q=	350,91	367,62	383,35	403,45	422,67	442,79	463,88
c=51,444	Q=	30318	31762	33274	34859	36519	38257	40079
D=0,600	U=	1,5752	1,6502	1,7288	1,8111	1,8973	1,9877	2,0823
F=0,282743	q=	445,38	466,58	488,80	512,08	536,46	562,00	588,76
c=52,529	Q=	38481	40313	42232	44243	46350	48557	50869
D=0,650	U=	1,6707	1,7502	1,8336	1,9209	2,0123	2,1081	2,2085
F=0,331831	q=	554,38	580,78	608,43	637,40	667,75	699,55	732,86
c=53,527	Q=	47898	50179	52568	55071	59694	60441	63319
D=0,700	U=	1,7635	1,8474	1,9354	2,0276	2,1241	2,2252	2,3312
F=0,384845	q=	678,66	710,98	744,83	780,30	817,45	856,37	897,15
c=54,445	Q=	58636	61428	64353	67418	70628	73991	77514
D=0,750	U=	1,8541	1,9424	2,0349	2,1317	2,2332	2,3396	2,4510
F=0,441786	q=	819,11	858,11	898,97	941,77	986,62	1033,6	1082,8
c=55,302	Q=	70771	74141	77671	81369	85244	89303	93555
D=0,800	U=	1,9425	2,0349	2,1318	2,2334	2,3397	2,4511	2,5678
F=0,502655	q=	976,39	1022,9	1071,6	1122,6	1176,1	1232,1	1290,7
c=56,098	Q=	84360	88377	92585	96993	101612	106450	111519
D=0,900	U=	2,1133	2,2139	2,3193	2,4298	2,5455	2,6667	2,7937
F=0,636173	q=	1344,4	1408,4	1475,5	1545,8	1619,4	1696,5	1777,2
c=57,541	Q=	116158	121689	127483	133553	139913	146575	153554
D=1,000	U=	2,2772	2,3857	2,4993	2,6183	2,7430	2,8736	3,0104
F=0,785398	q=	1788,5	1873,7	1962,9	2056,4	2154,3	2256,9	2364,4
c=58,824	Q=	154530	161888	169597	177672	186132	194995	204280
D=1,100	U=	2,4351	2,5510	2,6725	2,7997	2,9331	3,0727	3,2190
F=0,950332	q=	2314,1	2424,3	2539,7	2660,7	2787,0	2920,1	3059,1
c=59,973	Q=	199940	209461	219434	229883	240829	252296	264309
D=1,200	U=	2,5875	2,7107	2,8398	2,9750	3,1166	3,2650	3,4205
F=1,13097	q=	2926,4	3065,7	3211,7	33,646	3524,8	3692,7	3868,5
c=61,014	Q=	252840	264879	277491	290704	304546	319047	334239

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =	0,011498 ∼1:87	0,012619 ∼1:79	0,013849 ∼1:72	0,015199 ∼1:66	0,016681 ∼1:60	0,018307 ∼1:55	0,020092 ∼1:50
D = 0,040	U = 0,23828	0,24963	0,26151	0,27397	0,28701	0,30068	0,31499
F = 0,0012566	q = 0,29943	0,31369	0,32863	0,34428	0,36067	0,37784	0,39583
c = 22,222	Q = 25,871	27,103	28,393	29,745	31,162	32,646	34,200
D = 0,050	U = 0,29024	0,30406	0,31854	0,33370	0,34959	0,36624	0,38368
F = 0,0019635	q = 0,56988	0,59702	0,62544	0,65522	0,68642	0,71911	0,75335
c = 24,210	Q = 49,238	51,582	54,038	56,611	59,307	62,131	65,089
D = 0,060	U = 0,34042	0,35663	0,37361	0,39140	0,41004	0,42956	0,45002
F = 0,0028274	q = 0,96252	1,0083	1,0564	1,1067	1,1593	1,2145	1,2724
c = 25,922	Q = 83,161	87,121	91,270	95,615	100,17	104,94	109,93
D = 0,070	U = 0,38907	0,40760	0,42701	0,44734	0,46864	0,49096	0,51433
F = 0,0038485	q = 1,4973	1,5686	1,6433	1,7216	1,8035	1,8894	1,9794
c = 27,429	Q = 129,37	135,53	141,98	148,74	155,83	163,25	171,02
D = 0,080	U = 0,43640	0,45717	0,47894	0,50175	0,52564	0,55067	0,57689
F = 0,0050265	q = 2,1936	2,2980	2,4074	2,5221	2,6422	2,7680	2,8998
c = 28,778	Q = 189,52	198,55	208,00	217,91	228,28	239,15	250,54
D = 0,090	U = 0,48252	0,50550	0,52957	0,55478	0,58120	0,60887	0,63786
F = 0,0063617	q = 3,0697	3,2158	3,3690	3,5294	3,6974	3,8735	4,0579
c = 30,000	Q = 265,22	277,85	291,08	304,94	319,46	334,67	350,60
D = 0,100	U = 0,52759	0,55271	0,57903	0,60660	0,63548	0,66574	0,69744
F = 0,0078540	q = 4,1437	4,3410	4,5477	4,7642	4,9910	5,2287	5,4777
c = 31,119	Q = 358,01	375,06	392,92	411,63	431,23	451,76	473,27
D = 0,125	U = 0,63607	0,66636	0,69809	0,73133	0,76615	0,80263	0,84085
F = 0,0122718	q = 7,8058	8,1775	8,5669	8,9748	9,4021	9,8498	10,319
c = 33,557	Q = 674,42	706,53	740,18	775,42	812,34	851,02	891,54
D = 0,150	U = 0,73963	0,77485	0,81174	0,85040	0,89089	0,93331	0,97775
F = 0,0176715	q = 13,070	13,693	14,345	15,028	15,743	16,493	17,278
c = 35,620	Q = 1129,3	1183,1	1239,4	1298,4	1360,2	1425,0	1492,8
D = 0,175	U = 0,83898	0,87893	0,92078	0,96463	1,0106	1,0587	1,1091
F = 0,0240528	q = 20,180	21,141	22,147	23,202	24,307	25,464	26,677
c = 37,408	Q = 1743,5	1826,6	1913,5	2004,6	2100,1	2200,1	2304,9
D = 0,200	U = 0,93468	0,97919	1,0258	1,0747	1,1258	1,1794	1,2356
F = 0,0314159	q = 29,364	30,762	32,227	33,761	35,369	37,053	38,817
c = 38,983	Q = 2537,0	2657,8	2784,4	2917,0	3055,9	3201,4	3353,8
D = 0,225	U = 1,0273	1,0762	1,1274	1,1811	1,2373	1,2962	1,3580
F = 0,0397608	q = 40,844	42,789	44,826	46,961	49,197	51,540	53,994
c = 40,394	Q = 3528,9	3697,0	3873,0	4057,4	4250,6	4453,0	4665,1
D = 0,250	U = 1,1169	1,1701	1,2258	1,2842	1,3454	1,4094	1,4765
F = 0,0490874	q = 54,828	57,439	60,174	63,039	66,040	69,185	72,479
c = 41,667	Q = 4737,1	4962,7	5199,0	5446,6	5705,9	5977,6	6262,2
D = 0,275	U = 1,2042	1,2615	1,3216	1,3845	1,4504	1,5195	1,5918
F = 0,0593957	q = 71,522	74,927	78,495	82,233	86,148	90,250	94,548
c = 42,830	Q = 6179,5	6473,7	6782,0	7104,9	7443,2	7797,6	8168,9
D = 0,300	U = 1,2891	1,3505	1,4148	1,4822	1,5527	1,6267	1,7041
F = 0,0706858	q = 91,121	95,459	100,00	104,77	109,76	114,98	120,46
c = 43,899	Q = 7872,8	8247,7	8640,4	9051,8	9482,8	9934,4	10407
D = 0,325	U = 1,3719	1,4372	1,5056	1,5773	1,6524	1,7311	1,8136
F = 0,0829577	q = 113,81	119,23	124,90	130,85	137,08	143,61	150,45
c = 44,885	Q = 9833,1	10301	10792	11306	11844	12408	12999
	52	53	54	55	56	57	58

	52	53	54	55	56	57	58
$J =$	0,011498 ∼1:87	0,012619 ∼1:79	0,013849 ∼1:72	0,015199 ∼1:66	0,016681 ∼1:60	0,018307 ∼1:55	0,020092 ∼1:50
D = 0,350	U = 1,4528	1,5220	1,5945	1,6704	1,7499	1,8333	1,9205
F = 0,0962113	q = 139,78	146,43	153,41	160,71	168,36	176,38	184,78
c = 45,804	Q = 12077	12652	13254	13885	14547	15239	15965
D = 0,375	U = 1,5319	1,6049	1,6813	1,7613	1,8452	1,9331	2,0251
F = 0,110447	q = 169,20	177,25	185,69	194,53	203,80	213,50	223,67
c = 46,661	Q = 14619	15315	16044	16808	17608	18447	19325
D = 0,400	U = 1,6094	1,6860	1,7663	1,8504	1,9385	2,0308	2,1275
F = 0,125664	q = 202,24	211,87	221,96	232,53	243,60	255,20	267,35
c = 47,464	Q = 17474	18306	19178	20091	21047	22050	23099
D = 0,425	U = 1,6855	1,7657	1,8498	1,9379	2,0301	2,1268	2,2281
F = 0,141863	q = 239,10	250,49	262,42	274,91	288,00	301,71	316,08
c = 48,223	Q = 20659	21642	22673	23752	24883	26068	27309
D = 0,450	U = 1,7600	1,8438	1,9316	2,0236	2,1199	2,2209	2,3266
F = 0,159043	q = 279,92	293,24	307,21	321,83	337,16	353,21	370,03
c = 48,936	Q = 24185	25336	26543	27806	29131	30588	31971
D = 0,475	U = 1,8332	1,9205	2,0119	2,1077	2,2081	2,3132	2,4233
F = 0,177205	q = 324,85	340,31	356,52	373,50	391,28	409,91	429,43
c = 49,611	Q = 28067	29403	30803	32270	33807	35416	37103
D = 0,500	U = 1,9051	1,9958	2,0908	2,1904	2,2947	2,4040	2,5184
F = 0,196350	q = 374,07	391,88	410,54	430,08	450,56	472,02	494,49
c = 50,253	Q = 32319	33858	35470	37159	38929	40782	42724
D = 0,550	U = 2,0455	2,1429	2,2449	2,3518	2,4638	2,5811	2,7040
F = 0,237583	q = 485,97	509,11	533,35	558,74	585,35	613,22	642,42
c = 51,444	Q = 41988	43987	46081	48275	50574	52982	55505
D = 0,600	U = 2,1815	2,2853	2,3942	2,5082	2,6276	2,7527	2,8838
F = 0,282743	q = 616,80	646,17	676,93	709,17	742,94	778,31	815,37
c = 52,529	Q = 53291	55829	58487	61272	64190	67246	70448
D = 0,650	U = 2,3137	2,4239	2,5393	2,6602	2,7868	2,9195	3,0586
F = 0,331831	q = 767,75	804,31	842,61	882,73	924,76	968,79	1014,9
c = 53,527	Q = 66334	69492	72801	76268	79899	83704	87689
D = 0,700	U = 2,4422	2,5585	2,6803	2,8079	2,9416	3,0817	3,2285
F = 0,384845	q = 939,87	984,62	1031,5	1080,6	1132,1	1186,0	1242,5
c = 54,445	Q = 81205	85071	89122	93366	97811	102469	107348
D = 0,750	U = 2,5677	2,6900	2,8180	2,9522	3,0928	3,2401	3,3943
F = 0,441786	q = 1134,4	1188,4	1245,0	1304,3	1366,4	1431,4	1499,6
c = 55,302	Q = 98010	102676	107565	112687	118053	123674	129563
D = 0,800	U = 2,6901	2,8182	2,9524	3,0929	3,2402	3,3945	3,5561
F = 0,502655	q = 1352,2	1416,6	1484,0	1554,7	1628,7	1706,3	1787,5
c = 56,098	Q = 116829	122392	128219	134325	140721	147421	154441
D = 0,900	U = 2,9267	3,0660	3,2120	3,3650	3,5252	3,6930	3,8689
F = 0,636173	q = 1861,9	1950,5	2043,4	2140,7	2242,6	2349,4	2461,3
c = 57,541	Q = 160865	168525	176550	184956	193763	202989	212655
D = 1,000	U = 3,1537	3,3039	3,4612	3,6260	3,7987	3,9796	4,1690
F = 0,785398	q = 2476,9	2594,9	2718,4	2847,9	2983,5	3125,5	3274,4
c = 58,824	Q = 214007	224197	234772	246056	257772	270046	282905
D = 1,100	U = 3,3723	3,5329	3,7011	3,8773	4,0619	4,2554	4,4580
F = 0,950332	q = 3204,8	3357,4	3517,3	3684,7	3860,2	4044,0	4236,6
c = 59,973	Q = 276895	290079	303892	318362	333521	349402	366039
D = 1,200	U = 3,5834	3,7540	3,9328	4,1200	4,3162	4,5217	4,7370
F = 1,13097	q = 4052,7	4245,7	4447,8	4659,6	4881,5	5113,9	5357,4
c = 61,014	Q = 350154	366827	384294	402592	421762	441844	462883

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

$J =$	0,022051 ∼1:45	0,024201 ∼1:41	0,026561 ∼1:38	0,029151 ∼1:34	0,031993 ∼1:31	0,035112 ∼1:28	0,038535 ∼1:26
D = 0,040	U = 0,32999	0,34571	0,36217	0,37941	0,39748	0,41640	0,43623
F = 0,0012566	q = 0,41468	0,43443	0,45511	0,47678	0,49949	0,52327	0,54818
c = 22,222	Q = 35,828	37,534	39,322	41,194	43,156	45,210	47,363
D = 0,050	U = 0,40195	0,42109	0,44114	0,46214	0,48415	0,50720	0,53135
F = 0,0019635	q = 0,78922	0,82680	0,86617	0,90741	0,95062	0,99588	1,0433
c = 24,210	Q = 68,189	71,436	74,837	78,400	82,133	86,044	90,141
D = 0,060	U = 0,47144	0,49389	0,51741	0,54205	0,56786	0,59489	0,62322
F = 0,0028274	q = 1,3330	1,3964	1,4629	1,5326	1,6056	1,6820	1,7621
c = 25,922	Q = 115,17	120,65	126,40	132,42	138,72	145,33	152,25
D = 0,070	U = 0,53882	0,56448	0,59136	0,61952	0,64902	0,67992	0,71229
F = 0,0038485	q = 2,0736	2,1724	2,2758	2,3842	2,4977	2,6166	2,7412
c = 27,429	Q = 179,16	187,69	196,63	205,99	215,80	226,08	236,84
D = 0,080	U = 0,60436	0,63314	0,66328	0,69486	0,72795	0,76261	0,79893
F = 0,0050265	q = 3,0378	3,1825	3,3340	3,4928	3,6591	3,8333	4,0158
c = 28,778	Q = 262,47	274,97	288,06	301,78	316,14	331,20	346,97
D = 0,090	U = 0,66824	0,70005	0,73339	0,76831	0,80489	0,84322	0,88337
F = 0,0063617	q = 4,2511	4,4536	4,6656	4,8878	5,1205	5,3643	5,6197
c = 30,000	Q = 367,30	384,79	403,11	422,30	442,41	463,48	485,55
D = 0,100	U = 0,73065	0,76544	0,80188	0,84007	0,88007	0,92197	0,96587
F = 0,0078540	q = 5,7385	6,0117	6,2980	6,5979	6,9120	7,2412	7,5860
c = 31,119	Q = 495,81	519,41	544,15	570,06	597,20	625,64	655,43
D = 0,125	U = 0,88089	0,92283	0,96677	1,0128	1,0610	1,1116	1,1645
F = 0,0122718	q = 10,810	11,325	11,864	12.429	13,021	13,641	14,290
c = 33,557	Q = 934,00	978,47	1025,1	1073,9	1125,0	1178,6	1234,7
D = 0,150	U = 1,0243	1,0731	1,1242	1,1777	1,2338	1,2925	1,3541
F = 0,0176715	q = 18,101	18,963	19,866	20,812	21,803	22,841	23,928
c = 35,620	Q = 1563,9	1638,4	1716,4	1798,1	1883,8	1973,4	2067,4
D = 0,175	U = 1,1619	1,2172	1,2752	1,3359	1,3995	1,4661	1,5360
F = 0,0240528	q = 27,947	29,278	30,672	32,132	33,662	35,265	36,944
c = 37,408	Q = 2414,6	2529,6	2650,0	2776,2	2908,4	3046,9	3192,0
D = 0,200	U = 1,2944	1,3561	1,4206	1,4883	1,5591	1,6334	1,7112
F = 0,0314159	q = 40,666	42,602	44,631	46,756	48,982	51,314	53,758
c = 38,983	Q = 3513,5	3680,8	3856,1	4039,7	4232,0	4433,6	4644,7
D = 0,225	U = 1,4226	1,4904	1,5613	1,6357	1,7136	1,7952	1,8806
F = 0,0397608	q = 56,565	59,258	62,080	65,036	68,132	71,376	74,775
c = 40,394	Q = 4887,2	5119,9	5363,7	5619,1	5886,6	6166,9	6460,6
D = 0,250	U = 1,5468	1,6205	1,6977	1,7785	1,8632	1,9519	2,0448
F = 0,0490874	q = 75,930	79,546	83,334	87,302	91,458	95,813	100,38
c = 41,667	Q = 6560,4	6872,8	7200,0	7542,9	7902,0	8278,3	8672,4
D = 0,275	U = 1,6676	1,7470	1,8302	1,9174	2,0087	2,1043	2,2045
F = 0,0593957	q = 99,049	103,77	108,71	113,88	119,31	124,99	130,94
c = 42,830	Q = 8557,9	8965,4	9392,3	9839,5	10308	10799	11313
D = 0,300	U = 1,7852	1,8703	1,9593	2,0526	2,1503	2,2527	2,3600
F = 0,0706858	q = 126,19	132,20	138,50	145,09	152,00	159,24	166,82
c = 43,899	Q = 10903	11422	11966	12536	13133	13758	14413
D = 0,325	U = 1,8999	1,9904	2,0851	2,1844	2,2884	2,3974	2,5116
F = 0,0829577	q = 157,61	165,12	172,98	181,22	189,84	198,88	208,35
c = 44,885	Q = 13618	14266	14945	15657	16403	17184	18002
	59	60	61	62	63	64	65

	59	60	61	62	63	64	65
J =	0,022051 ∼1:45	0,024201 ∼1:41	0,026561 ∼1:38	0,029151 ∼1:34	0,031998 ∼1:31	0,035112 ∼1:28	0,038535 ∼1:26
***D* = 0,350**	*U* = 2,0120	2,1078	2,2082	2,3133	2,4235	2,5389	2,6597
F = 0,0962113	q = 193,58	202,79	212,45	222,57	233,16	244,27	255,90
c = 45,804	Q = 16725	17521	18356	19230	20146	21105	22110
***D* = 0,375**	*U* = 2,1215	2,2226	2,3284	2,4393	2,5554	2,6771	2,8046
F = 0,110447	q = 234,32	245,47	257,16	269,41	282,24	295,68	309,75
c = 46,661	Q = 20245	21209	22219	23277	24385	25546	26763
***D* = 0,400**	*U* = 2,2288	2,3350	2,4462	2,5626	2,6847	2,8125	2,9464
F = 0,125664	q = 280,09	293,42	307,39	322,03	337,36	353,48	370,26
c = 47,464	Q = 24199	25352	26559	27823	29148	30606	31990
***D* = 0,425**	*U* = 2,3342	2,4453	2,5617	2,6837	2,8115	2,9454	3,0856
F = 0,141863	q = 331,13	346,90	363,42	380,72	398,85	417,84	437,74
c = 48,223	Q = 28610	29972	31399	32894	34460	36101	37820
***D* = 0,450**	*U* = 2,4374	2,5535	2,6750	2,8024	2,9359	3,0756	3,2221
F = 0,159043	q = 387,65	406,11	425,45	445,70	466,93	489,16	512,45
c = 48,936	Q = 33493	35088	36759	38509	40342	42263	44276
***D* = 0,475**	*U* = 2,5387	2,6596	2,7862	2,9189	3,0579	3,2035	3,3560
F = 0,177205	q = 449,88	471,30	493,74	517,25	541,88	567,68	594,71
c = 49,611	Q = 38869	40720	42659	44690	46818	49048	51383
***D* = 0,500**	*U* = 2,6383	2,7640	2,8956	3,0335	3,1779	3,3292	3,4877
F = 0,196350	q = 518,04	542,71	568,55	595,62	623,98	653,69	684,82
c = 50,253	Q = 44759	46890	49122	51461	53912	56479	59168
***D* = 0,550**	*U* = 2,8327	2,9676	3,1089	3,2570	3,4120	3,5745	3,7447
F = 0,237583	q = 673,01	705,05	738,63	773,80	810,64	849,24	889,68
c = 51,444	Q = 58148	60917	63817	66856	70039	73374	76868
***D* = 0,600**	*U* = 3,0211	3,1649	3,3156	3,4735	3,6389	3,8122	3,9937
F = 0,282743	q = 854,19	894,87	937,48	982,12	1028,9	1077,9	1129,2
c = 52,529	Q = 73802	77317	80998	84855	88895	93128	97562
***D* = 0,650**	*U* = 3,2042	3,3568	3,5166	3,6840	3,8595	4,0432	4,2357
F = 0,331831	q = 1063,2	1113,9	1166,9	1222,5	1280,7	1341,7	1405,6
c = 53,527	Q = 91865	96239	100821	105622	110651	115920	121440
***D* = 0,700**	*U* = 3,3822	3,5432	3,7119	3,8887	4,0738	4,2678	4,4710
F = 0,384845	q = 1301,6	1363,6	1428,5	1496,5	1567,8	1642,4	1720,7
c = 54,445	Q = 112459	117814	123424	129301	135456	141903	148665
***D* = 0,750**	*U* = 3,5560	3,7253	3,9027	4,0885	4,2832	4,4871	4,7008
F = 0,441786	q = 1571,0	1645,8	1724,1	1806,2	1892,2	1982,3	2076,7
c = 55,302	Q = 135732	142195	148966	156059	163490	171275	179430
***D* = 0,800**	*U* = 3,7255	3,9029	4,0887	4,2834	4,4873	4,7010	4,9248
F = 0,502655	q = 1872,6	1961,8	2055,2	2153,1	2255,6	2363,0	2475,5
c = 56,098	Q = 161794	169498	177569	186024	194882	204161	213883
***D* = 0,900**	*U* = 4,0531	4,2461	4,4483	4,6601	4,8820	5,1144	5,3580
F = 0,636173	q = 2578,5	2701,3	2829,9	2964,6	3105,8	3253,7	3408,6
c = 57,541	Q = 222780	233388	244501	256143	268340	281117	294502
***D* = 1,000**	*U* = 4,3676	4,5755	4,7934	5,0216	5,2607	5,5112	5,7736
F = 0,785398	q = 3430,3	3593,6	3764,7	3944,0	4131,8	4328,5	4534,6
c = 58,824	Q = 296375	310487	325271	340759	356985	373983	391791
***D* = 1,100**	*U* = 4,6702	4,8926	5,1256	5,3696	5,6253	5,8932	6,1738
F = 0,950332	q = 4438,3	4649,6	4871,0	5102,9	5345,9	5600,5	5867,2
c = 59,973	Q = 383468	401727	420855	440895	461888	483881	506922
***D* = 1,200**	*U* = 4,9626	5,1989	5,4464	5,7058	5,9774	6,2621	6,5602
F = 1,13097	q = 5612,5	5879,8	6159,8	6453,1	6760,3	7082,2	7419,4
c = 61,014	Q = 484924	508014	532203	557544	584092	611904	641040

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =	0,042292 ∼1:24	0,046416 ∼1:22	0,050941 ∼1:20	0,055908 ∼1:18	0,061359 ∼1:16	0,067342 ∼1:15	0,073907 ∼1:14
D = 0,040	U = 0,45700	0,47876	0,50156	0,52544	0,55046	0,57667	0,60413
F = 0,0012566	q = 0,57429	0,60163	0,63028	0,66029	0,69173	0,72467	0,95917
c = 22,222	Q = 49,618	51,981	54,456	57,049	59,765	62,611	65,593
D = 0,050	U = 0,55665	0,58316	0,61092	0,64001	0,67049	0,70241	0,73586
F = 0,0019635	q = 1,0930	1,1450	1,1995	1,2567	1,3165	1,3792	1,4449
c = 24,210	Q = 94,434	98,930	103,64	108,58	113,75	119,16	124,84
D = 0,060	U = 0,65290	0,68398	0,71655	0,75067	0,78642	0,82386	0,86309
F = 0,0028274	q = 1,8460	1,9339	2,0260	2,1225	2,2235	2,3294	2,4403
c = 25,922	Q = 159,50	167,09	175,05	183,38	192,11	201,26	210,84
D = 0,070	U = 0,74621	0,78174	0,81896	0,85796	0,89881	0,94161	0,98645
F = 0,0038485	q = 2,8718	3,0085	3,1517	3,3018	3,4590	3,6237	3,7963
c = 27,429	Q = 248,12	259,93	272,31	285,28	298,86	313,09	328,00
D = 0,080	U = 0,83697	0,87682	0,91857	0,96231	1,0081	1,0561	1,1064
F = 0,0050265	q = 4,2071	4,4074	4,6172	4,8371	5,0674	5,3087	5,5615
c = 28,778	Q = 363,49	380,80	398,93	417,92	437,82	458,67	480,51
D = 0,090	U = 0,92543	0,96950	1,0157	1,0640	1,1147	1,1678	1,2234
F = 0,0063617	q = 5,8873	6,1677	6,4613	6,7690	7,0913	7,4290	7,7827
c = 30,000	Q = 508,67	532,89	558,26	584,84	612,69	641,86	672,43
D = 0,100	U = 1,0119	1,0600	1,1105	1,1634	1,2188	1,2768	1,3376
F = 0,0078540	q = 7,9472	8,3256	8,7220	9,1378	9,5724	10,028	10,506
c = 31,119	Q = 686,63	719,33	753,58	789,46	829,05	866,43	907,69
D = 0,125	U = 1,2199	1,2780	1,3389	1,4026	1,4694	1,5394	1,6127
F = 0,0122718	q = 14,971	15,684	16,430	17,213	18,032	18,891	19,791
c = 33,557	Q = 1293,5	1355,1	1419,6	1487,2	1558,0	1632,2	1709,9
D = 0,150	U = 1,4185	1,4861	1,5569	1,6310	1,7086	1,7900	1,8752
F = 0,0176715	q = 25,068	26,261	27,512	28,822	30,194	31,632	33,138
c = 35,620	Q = 2165,9	2269,0	2377,0	2490,2	2608,8	2733,0	2863,1
D = 0,175	U = 1,6091	1,6857	1,7660	1,8501	1,9382	2,0304	2,1271
F = 0,0240528	q = 38,703	40,546	42,477	44,499	46,618	48,838	51,163
c = 37,408	Q = 3344,0	3503,2	3670,0	3844,9	4027,8	4219,6	4420,5
D = 0,200	U = 1,7926	1,8780	1,9674	2,0611	2,1592	2,2621	2,3698
F = 0,0314159	q = 56,317	58,999	61,808	64,751	67,834	71,064	74,448
c = 38,983	Q = 4865,8	5097,5	5340,2	5594,5	5860,9	6140,0	6432,3
D = 0,225	U = 1,9702	2,0640	2,1623	2,2652	2,3731	2,4861	2,6045
F = 0,0397608	q = 78,336	82,066	85,973	90,067	94,355	98,848	103,55
c = 40,394	Q = 6768,2	7090,5	7428,1	7781,8	8152,3	8540,5	8947,1
D = 0,250	U = 2,1422	2,2442	2,3511	2,4630	2,5803	2,7032	2,8319
F = 0,0490874	q = 105,16	110,16	115,41	120,90	126,66	132,69	139,01
c = 41,667	Q = 9085,4	9518,0	9971,2	10446	10943	11464	12010
D = 0,275	U = 2,3095	2,4194	2,5346	2,6553	2,7818	2,9142	3,0530
F = 0,0593957	q = 137,17	143,70	150,55	157,71	165,22	173,09	181,33
c = 42,880	Q = 11852	12416	13007	13627	14275	14955	15667
D = 0,300	U = 2,4724	2,5901	2,7134	2,8426	2,9780	3,1198	3,2683
F = 0,0706858	q = 174,76	183,08	191,80	200,93	210,50	220,52	231,03
c = 43,899	Q = 15099	15818	16572	17361	18187	19053	19960
D = 0,325	U = 2,6312	2,7564	2,8877	3,0252	3,1692	3,3201	3,4782
F = 0,0829577	q = 218,27	228,67	239,56	250,96	262,91	275,43	288,55
c = 44,885	Q = 18859	19757	20698	21683	22716	23797	24930
	66	67	68	69	70	71	72

	66	67	68	69	70	71	72
$J =$	0,042292 ∼1:24	0,046416 ∼1:22	0,050941 ∼1:20	0,055908 ∼1:18	0,061359 ∼1:16	0,067342 ∼1:15	0,073907 ∼1:14
D = 0,350	U = 2,7864	2,9191	3,0581	3,2087	3,3562	3,5160	3,6834
F = 0,0962113	q = 268,08	280,85	294,22	308,23	322,91	338,28	354,39
c = 45,804	Q = 23162	24265	25421	26631	27899	29227	30619
D = 0,375	U = 2,9381	3,0780	3,2246	3,3781	3,5390	3,7075	3,8840
F = 0,110447	q = 324,50	339,95	356,14	373,10	390,87	409,48	428,97
c = 46,661	Q = 28037	29372	30771	32236	33771	35379	37063
D = 0,400	U = 3,0867	3,2337	3,3876	3,5490	3,7179	3,8950	4,0804
F = 0,125664	q = 387,89	406,36	425,70	445,97	467,21	489,46	512,76
c = 47,464	Q = 33513	35109	36781	38532	40367	42289	44303
D = 0,425	U = 3,2326	3,3865	3,5477	3,7167	3,8936	4,0790	4,2732
F = 0,141863	q = 458,58	480,41	503,29	527,25	552,36	578,66	606,21
c = 48,223	Q = 39621	41508	43484	45555	47724	49996	52377
D = 0,450	U = 3,3755	3,5362	3,7046	3,8810	4,0658	4,2594	4,4622
F = 0,159043	q = 536,85	562,41	589,19	617,25	646,64	677,43	709,69
c = 48,936	Q = 46384	48593	50906	53330	55870	58530	61317
D = 0,475	U = 3,5158	3,6833	3,8586	4,0424	4,2349	4,4365	4,6477
F = 0,177205	q = 623,03	652,69	683,77	716,33	750,44	786,17	823,61
c = 49,611	Q = 53830	56393	59078	61891	64838	67925	71160
D = 0,500	U = 3,6538	3,8278	4,0101	4,2010	4,4010	4,6106	4,8301
F = 0,196350	q = 717,42	751,59	787,37	824,86	864,14	905,29	948,39
c = 50,253	Q = 61985	64937	68029	71268	74662	78217	81941
D = 0,550	U = 3,9230	4,1098	4,3055	4,5105	4,7253	4,9503	5,1860
F = 0,237583	q = 932,04	976,42	1022,9	1071,6	1122,6	1176,1	1232,1
c = 51,444	Q = 80528	84363	88380	92588	96997	101615	106454
D = 0,600	U = 4,1839	4,3831	4,5918	4,8104	5,0395	5,2794	5,5308
F = 0,282743	q = 1183,0	1239,3	1298,3	1360,1	1424,9	1492,7	1563,8
c = 52,529	Q = 102208	107075	112173	117514	123110	128972	135118
D = 0,650	U = 4,4374	4,6487	4,8701	5,1020	5,3449	5,5994	5,8660
F = 0,331831	q = 1472,5	1542,6	1616,0	1693,0	1773,6	1858,1	1946,5
c = 53,527	Q = 127222	133280	139626	146374	153239	160536	168180
D = 0,700	U = 4,6839	4,9070	5,1406	5,3854	5,6418	5,9104	6,1919
F = 0,384845	q = 1802,6	1888,4	1978,3	2072,5	2171,2	2274,6	2382,9
c = 54,445	Q = 155743	163159	170928	179067	187594	196526	205884
D = 0,750	U = 4,9246	5,1591	5,4047	5,6621	5,9317	6,2141	6,5100
F = 0,441786	q = 2175,6	2279,2	2387,7	2501,4	2620,5	2745,3	2876,0
c = 55,302	Q = 187974	196924	206301	216124	226415	237196	248490
D = 0,800	U = 5,1593	5,4050	5,6624	5,9320	6,2144	6,5103	6,8203
F = 0,502655	q = 2593,4	2716,9	2846,2	2981,7	3123,7	3272,5	3428,3
c = 56,098	Q = 224067	234736	245913	257622	269889	282740	696208
D = 0,900	U = 5,6131	5,8804	6,1604	6,4537	6,7610	7,0829	7,4202
F = 0,636173	q = 3570,9	3740,9	3919,1	4105,7	4301,2	4506,0	4720,5
c = 57,541	Q = 308525	323216	338606	354729	371620	389315	407852
D = 1,000	U = 6,0486	6,3366	6,6383	6,9544	7,2855	7,6324	7,9958
F = 0,785398	q = 4750,5	4976,7	5213,7	5462,0	5722,0	5994,5	6279,9
c = 58,824	Q = 410446	429990	450464	471913	494384	517924	542585
D = 1,100	U = 6,4678	6,7757	7,0984	7,4364	7,7904	8,1614	8,5500
F = 0,950332	q = 6146,5	6439,2	6730,3	7067,0	7403,5	7756,0	8125,3
c = 59,973	Q = 531059	556346	582837	610589	639663	670121	702029
D = 1,200	U = 6,8726	7,1998	7,5427	7,9018	8,2781	8.6722	9,0852
F = 1,13097	q = 7772,7	8142,8	8530,6	8936,8	9362,3	9808,1	10275
c = 61,014	Q = 671564	703546	737041	772135	808901	847418	887768

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =	0,081118 ∼1:12	0,089021 ∼1:11	0,097701 ∼1:10	0,10728 ∼1:9,3	0,11768 ∼1:8,5	0,12915 ∼1:7,7	0,14175 ∼1:7,1
D = 0,040	U = 0,63290	0,66303	0,69460	0,72768	0,76233	0,79863	0,83665
F = 0,0012566	q = 0,79532	0,83319	0,87286	0,91443	0,95797	1,0036	1,0514
c = 22,222	Q = 68,716	71,988	75,415	79,006	82,768	86,709	90,838
D = 0,050	U = 0,77090	0,80760	0,84606	0,88635	0,92855	0,97276	1,0191
F = 0,0019635	q = 1,5137	1,5857	1,6612	1,7403	1,8232	1,9100	2,0010
c = 24,210	Q = 130,78	137,01	143,53	150,36	157,52	165,03	172,88
D = 0,060	U = 0,90419	0,94724	0,99234	1,0396	1,0891	1,1410	1,1953
F = 0,0028274	q = 2,5565	2,6783	2,8058	2,9394	3,0793	3,2260	3,3796
c = 25,922	Q = 220,88	231,40	242,42	253,96	266,06	278,72	292,00
D = 0,070	U = 1,0334	1,0826	1,1342	1,1882	1,2448	1,3040	1,3661
F = 0,0038485	q = 3,9771	4,1664	4,3648	4,5726	4,7904	5,0185	5,2574
c = 27,429	Q = 343,62	359,98	377,12	395,08	413,89	433,60	454,24
D = 0,080	U = 1,1591	1,2143	1,2721	1,3327	1,3961	1,4626	1,5323
F = 0,0050265	q = 5,8263	6,1037	6,3944	6,6988	7,0178	7,3520	7,7020
c = 28,778	Q = 503,39	527,36	552,47	578,18	606,34	635,21	665,45
D = 0,090	U = 1,2816	1,3426	1,4066	1,4735	1,5437	1,6172	1,6942
F = 0,0063617	q = 8,1533	8,5415	8,9482	9,3743	9,8207	10,288	10,778
c = 30,000	Q = 704,44	737,39	773,13	809,44	848,51	888,91	931,23
D = 0,100	U = 1,4013	1,4680	1,5379	1,6112	1,6879	1,7683	1,8525
F = 0,0078540	q = 11,006	11,530	12,079	12,654	13,257	13,888	14,549
c = 31,119	Q = 950,91	996,19	1043,6	1093,3	1145,4	1199,9	1257,0
D = 0,125	U = 1,6895	1,7699	1,8542	1,9425	2,0350	2,1319	2,2334
F = 0,0122718	q = 20,733	21,720	22,754	23,838	24,973	26,162	27,408
c = 33,557	Q = 1791,3	1876,6	1966,0	2059,6	2157,6	2260,4	2368,0
D = 0,150	U = 1,9645	2,0581	2,1561	2,2587	2,3663	2,4789	2,5970
F = 0,0176715	q = 34,716	36,369	38,101	39,915	41,816	43,807	45,893
c = 35,620	Q = 2999,5	3142,3	3291,9	3448,7	3612,9	3784,9	3965,1
D = 0,175	U = 2,2284	2,3345	2,4457	2,5621	2,6841	2,8119	2,9458
F = 0,0240528	q = 53,600	56,152	58,825	61,626	64,561	67,635	70,855
c = 37,408	Q = 4631,0	4851,5	5082,5	5324,5	5578,1	5843,7	6121,9
D = 0,200	U = 2,4826	2,6008	2,7246	2,8544	2,9903	3,1327	3,2818
F = 0,0314159	q = 77,993	81,707	85,597	89,673	93,943	98,416	103,10
c = 38,983	Q = 6738,6	7059,5	7395,6	7747,8	8116,7	8503,2	8908,0
D = 0,225	U = 2,7285	2,8584	2,9945	3,1371	3,2865	3,4429	3,6069
F = 0,0397608	q = 108,49	113,65	119,06	124,73	130,67	136,89	143,41
c = 40,394	Q = 9373,2	9818,5	10287	10777	11290	11828	12391
D = 0,250	U = 2,9667	3,1080	3,2560	3,4110	3,5734	3,7436	3,9218
F = 0,0490874	q = 145,63	152,56	159,83	167,44	175,41	183,76	192,51
c = 41,667	Q = 12582	13181	13809	14467	15155	15877	16633
D = 0,275	U = 3,1983	3,3506	3,5102	3,6773	3,8524	4,0359	4,2280
F = 0,0593957	q = 189,97	199,01	208,49	218,42	228,82	239,71	251,13
c = 42,830	Q = 16413	17195	18013	18871	19770	20711	21697
D = 0,300	U = 3,4239	3,5870	3,7578	3,9367	4,1242	4,3205	4,5263
F = 0,0706858	q = 242,02	253,55	265,62	278,27	291,52	305,40	319,94
c = 43,899	Q = 20911	21907	22950	24042	25187	26387	27643
D = 0,325	U = 3,6439	3,8174	3,9991	4,1895	4,3890	4,5980	4,8170
F = 0,0829577	q = 302,29	316,68	331,76	347,56	364,10	381,44	399,60
c = 44,885	Q = 26117	27361	28664	30029	31459	32957	34526
	73	74	75	76	77	78	79

		73	74	75	76	77	78	79
$J =$		0,081113 ∼1:12	0,089022 ∼1:11	0,097701 ∼1:10	0,10723 ∼1:9,3	0,11768 ∼1:8,5	0,12915 ∼1:7,7	0,14175 ∼1:7,1
D = 0,350	U =	3,8588	4,0426	4,2351	4,4367	4,6480	4,8693	5,1011
F = 0,0962113	q =	371,26	388,94	407,46	426,86	447,19	468,48	490,79
c = 45,804	Q =	32077	33604	35205	36881	38637	40477	42404
D = 0,375	U =	4,0689	4,2627	4,4657	4,6783	4,9010	5,1344	5,3789
F = 0,110447	q =	449,40	470,80	493,22	516,70	541,30	567,08	594,08
c = 46,661	Q =	38828	40677	42614	44643	46769	48996	51329
D = 0,400	U =	4,2747	4,4783	4,6915	4,9149	5,1489	5,3941	5,6509
F = 0,125664	q =	537,18	562,76	589,55	617,52	647,03	677,84	710,12
c = 47,464	Q =	46412	48622	50937	53363	55904	58565	61354
D = 0,425	U =	4,4767	4,6899	4,9132	5,1471	5,3922	5,6490	5,9180
F = 0,141863	q =	635,08	665,32	697,00	730,19	764,95	801,38	839,54
c = 48,223	Q =	54871	57484	60221	63088	66092	69239	72536
D = 0,450	U =	4,6747	4,8973	5,1305	5,3748	5,6307	5,8988	6,1797
F = 0,159043	q =	743,48	778,88	815,97	854,82	895,52	938,16	982,84
c = 48,936	Q =	64237	67295	70500	73856	71373	81057	84917
D = 0,475	U =	4,8691	5,1009	5,3438	5,5982	5,8648	6,1440	6,4366
F = 0,177205	q =	862,82	903,41	946,95	992,04	1039,3	1088,0	1140,6
c = 49,611	Q =	74548	78097	81816	85712	89793	94069	98548
D = 0,500	U =	5,0601	5,3011	5,5535	5,8179	6,0949	6,3851	6,6892
F = 0,196350	q =	993,55	1040,9	1090,4	1142,3	1196,7	1253,7	1313,4
c = 50,253	Q =	85843	89930	94212	98698	103398	108321	113479
D = 0,550	U =	5,4329	5,6916	5,9626	6,2465	6,5440	6,8556	7,1820
F = 0,237583	q =	1290,8	1352,2	1416,6	1484,1	1554,7	1628,8	1706,3
c = 51,444	Q =	111523	116833	122396	128224	134329	140725	147426
D = 0,600	U =	5,7942	6,0701	6,3591	6,6619	6,9791	7,3114	7,6596
F = 0,282743	q =	1638,3	1716,3	1798,0	1883,6	1973,3	2067,3	2165,7
c = 52,529	Q =	141546	148286	155347	162744	170493	178611	187116
D = 0,650	U =	6,1453	6,4380	6,7445	7,0657	7,4021	7,7545	8,1238
F = 0,331831	q =	2039,2	2136,3	2238,0	2344,6	2456,2	2573,2	2695,7
c = 53,527	Q =	176188	184577	193366	202480	212219	222324	232910
D = 0,700	U =	6,4867	6,7956	7,1192	7,4581	7,8133	8,1853	8,5750
F = 0,384845	q =	2496,4	2615,2	2739,8	2870,2	3006,9	3150,1	3300,1
c = 54,445	Q =	215687	225957	236716	247988	259796	272166	285126
D = 0,750	U =	6,8200	7,1448	7,4850	7,8414	8,2147	8,6059	9,0157
F = 0,441786	q =	3013,0	3156,5	3306,8	3464,2	3629,2	3802,0	3983,0
c = 55,302	Q =	260322	272718	285703	299307	313559	328489	344131
D = 0,800	U =	7,1451	7,4853	7,8417	8,2151	8,6063	9,0161	9,4454
F = 0,502655	q =	3591,5	3762,5	3941,7	4129,4	4326,0	4532,0	4747,8
c = 56,098	Q =	310307	325083	340562	356778	373766	391563	410208
D = 0,900	U =	7,7735	8,1436	8,5314	8,9376	9,3632	9,8090	10,276
F = 0,636173	q =	4945,3	5180,8	5427,4	5685,4	5956,6	6240,2	6537,4
c = 57,541	Q =	427273	447618	468931	491260	514651	539157	564829
D = 1,000	U =	8,3766	8,7754	9,1933	9,6310	10,090	10,570	11,073
F = 0,785398	q =	6578,9	6892,2	7220,4	7564,2	7924,4	8301,7	8697,0
c = 58,824	Q =	568421	595487	623841	653546	684665	717266	751419
D = 1,100	U =	8,9571	9,3836	9,8304	10,299	10,789	11,303	11,841
F = 0,950332	q =	8512,2	8917,5	9342,2	9787,0	10253	10741	11253
c = 59,973	Q =	735457	770576	807163	845597	885860	928041	972231
D = 1,200	U =	9,5178	9,9710	10,446	10,943	11,464	12,010	12,582
F = 1,13097	q =	10764	10277	11814	12376	12966	13583	14230
c = 61,014	Q =	930040	974325	1020718	1069320	1120236	1173577	1229456

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =		0,15557 ∼1:6,4	0,17074 ∼1:5,9	0,18738 ∼1:5,3	0,20565 ∼1:4,9	0,22570 ∼1:4,4	0,24771 ∼1:4,0	0,27186 ∼1:3,7
D = 0,040	U =	0,87849	0,91822	0,96195	1,0078	1,0557	1,1060	1,1587
F = 0,0012566	q =	1,1014	1,1539	1,2088	1,2664	1,3267	1,3898	1,4560
c = 22,222	Q =	95,164	99,695	104,44	109,41	114,62	120,08	125,80
D = 0,050	U =	1,0676	1,1184	1,1717	1,2275	1,2859	1,3472	1,4113
F = 0,0019635	q =	2,0962	2,1961	2,3006	2,4102	2,5249	2,6452	2,7711
c = 24,210	Q =	181,12	189,74	198,77	208,24	218,15	228,54	239,42
D = 0,060	U =	1,2522	1,3118	1,3743	1,4397	1,5083	1,5801	1,6553
F = 0,0028274	q =	3,5405	3,7091	3,8857	4,0707	4,2645	4,4676	4,6803
c = 25,922	Q =	305,90	320,46	335,72	351,71	368,46	386,00	404,38
D = 0,070	U =	1,4312	1,4993	1,5707	1,6455	1,7238	1,8059	1,8919
F = 0,0038485	q =	5,5078	5,7700	6,0448	6,3326	6,6341	6,9500	7,2809
c = 27,429	Q =	475,87	498,53	522,27	547,14	573,19	600,48	629,07
D = 0,080	U =	1,6052	1,6817	1,7617	1,8456	1,9335	2,0256	2,1220
F = 0,0050265	q =	8,0688	8,4530	8,8555	9,2771	9,7188	10,182	10,666
c = 28,778	Q =	697,14	730,34	765,11	801,54	839,71	879,69	921,58
D = 0,090	U =	1,7749	1,8594	1,9479	2,0407	2,1379	2,2397	2,3463
F = 0,0063617	q =	11,291	11,829	12,392	12,982	13,601	14,248	14,927
c = 30,000	Q =	975,58	1022,0	1070,7	1121,7	1175,1	1231,0	1289,7
D = 0,100	U =	1,9407	2,0331	2,1299	2,2313	2,3375	2,4488	2,5654
F = 0,0078540	q =	15,242	15,968	16,728	17,525	18,359	19,233	20,149
c = 31,119	Q =	1316,9	1379,6	1445,3	1514,1	1586,2	1661,7	1740,9
D = 0,125	U =	2,3397	2,4511	2,5673	2,6901	2,8182	2,9524	3,0930
F = 0,0122718	q =	28,713	30,080	31,512	33,013	34,585	36,231	37,956
c = 33,557	Q =	2480,8	2598,9	2722,6	2852,3	2988,1	3130,4	3279,4
D = 0,150	U =	2,7206	2,8502	2,9859	3,1281	3,2770	3,4331	3,5965
F = 0,0176715	q =	48,078	50,367	52,765	55,278	57,910	60,667	63,556
c = 35,620	Q =	4153,9	4351,7	4558,9	4776,0	5003,4	5241,6	5491,2
D = 0,175	U =	3,0861	3,2330	3,3870	3,5483	3,7172	3,8942	4,0796
F = 0,0240528	q =	74,229	77,464	81,467	85,346	89,409	93,667	98,127
c = 37,408	Q =	6413,4	6718,8	7038,6	7373,9	7725,0	8092,8	8478,1
D = 0,200	U =	3,4381	3,6018	3,7733	3,9530	4,1412	4,3384	4,5450
F = 0,0314159	q =	108,01	113,15	118,54	124,19	130,10	136,30	142,79
c = 38,983	Q =	9332,2	9776,6	10242	10730	11241	11776	12337
D = 0,225	U =	3,7785	3,9585	4,1470	4,3445	4,5514	4,7681	4,9951
F = 0,0397608	q =	150,24	157,39	164,89	172,74	180,97	189,58	198,61
c = 40,394	Q =	12981	13599	14246	14925	15635	16380	17160
D = 0,250	U =	4,1085	4,3042	4,5091	4,7238	4,9488	5,1844	5,4313
F = 0,0490874	q =	201,68	211,28	221,34	231,88	242,92	254,49	266,61
c = 41,667	Q =	17425	18255	19124	20034	20988	21988	23035
D = 0,275	U =	4,4293	4,6402	4,8612	5,0927	5,3352	5,5892	5,8553
F = 0,0593957	q =	263,08	275,61	288,73	302,48	316,89	331,97	347,78
c = 42,830	Q =	22730	23813	24947	26135	27379	28683	30048
D = 0,300	U =	4,7418	4,9676	5,2041	5,4519	5,7115	5,9834	6,2683
F = 0,0706858	q =	335,18	351,14	367,86	385,37	403,72	422,94	443,08
c = 43,899	Q =	28959	30338	31783	33296	34881	36542	38282
D = 0,325	U =	5,0463	5,2866	5,5383	5,8020	6,0783	6,3677	6,6709
F = 0,0829577	q =	418,63	438,56	459,45	481,32	504,24	528,25	553,41
c = 44,885	Q =	36170	37892	39696	41586	43567	45641	47814
		80	81	82	83	84	85	86

	80	81	82	83	84	85	86
$J=$	0,15557 ∼1:6,4	0,17074 ∼1:5,9	0,18738 ∼1:5,3	0,20565 ∼1:4,9	0,22570 ∼1:4,4	0,24771 ∼1:4,0	0,27186 ∼1:3,7
D=0,350	U = 5,3440	5,5985	5,8651	6,1443	6,4369	6,7434	7,0645
F = 0,0962113	q = 514,16	538,64	564,29	591,16	619,30	648,79	679,69
c = 45,804	Q = 44423	46538	48754	51076	53508	56056	58725
D=0,375	U = 5,6350	5,9033	6,1844	6,4789	6,7874	7,1106	7,8492
F = 0,110447	q = 622,37	652,00	683,05	715,57	749,64	785,34	822,73
c = 46,661	Q = 53773	56333	59015	61825	64769	67853	71084
D=0,400	U = 5,9200	6,2019	6,4972	6,8066	7,1307	7,4702	7,8259
F = 0,125664	q = 743,93	779,35	816,46	855,34	896,07	938,73	983,43
c = 47,464	Q = 64276	67336	70542	73901	77420	81107	84969
D=0,425	U = 6,1997	6,4950	6,8042	7,1282	7,4676	7,8232	8,1957
F = 0,141863	q = 879,51	921,39	965,26	1011,2	1059,4	1109,8	1162,7
c = 48,223	Q = 75990	79608	83399	87370	91530	95888	100454
D=0,450	U = 6,4739	6,7822	7,1051	7,4434	7,7979	8,1692	8,5582
F = 0,159043	q = 1029,6	1078,7	1130,0	1183,8	1240,2	1299,3	1361,1
c = 48,936	Q = 88960	93196	97634	102283	107153	112255	117600
D=0,475	U = 6,7431	7,0642	7,4005	7,7529	8,1221	8,5088	8,9140
F = 0,177205	q = 1194,9	1251,8	1311,4	1373,9	1439,3	1507,8	1579,6
c = 49,611	Q = 103240	108156	113306	118701	124353	130274	136478
D=0,500	U = 7,0077	7,3414	7,6909	8,0571	8,4408	8,8427	9,2637
F = 0,196350	q = 1376,0	1441,5	1510,1	1582,0	1657,3	1736,3	1818,9
c = 50,253	Q = 118883	124543	130473	136686	143194	150013	157156
D=0,550	U = 7,5240	7,8822	8,2576	8,6507	9,0627	9,4942	9,9463
F = 0,237583	q = 1787,6	1872,7	1961,9	2055,3	2153,1	2255,7	2363,1
c = 51,444	Q = 154446	161800	169504	177575	186031	194889	204169
D=0,600	U = 8,0243	8,4064	8,8067	9,2260	9,6653	10,126	10,608
F = 0,282743	q = 2268,8	2376,8	2490,0	2608,6	2732,8	2862,9	2999,2
c = 52,529	Q = 196026	205360	215138	225382	236114	247356	259134
D=0,650	U = 8,5106	8,9158	9,3404	9,7851	10,251	10,739	11,251
F = 0,331831	q = 2824,1	2958,6	3099,4	3247,0	3401,6	3563,6	3733,3
c = 53,527	Q = 244001	255619	267790	280541	293899	307894	322554
D=0,700	U = 8,9834	9,4111	9,8592	10,329	10,820	11,3366	11,875
F = 0,384845	q = 3457,2	3621,8	3794,3	3974,9	4164,2	4362,5	4570,2
c = 54,445	Q = 298702	312925	327825	343435	359788	376919	394866
D=0,750	U = 9,4449	9,8947	10,366	10,859	11,376	11,918	12,486
F = 0,441786	q = 4172,6	4371,3	4579,5	4797,5	5026,0	5265,3	5516,0
c = 55,302	Q = 360517	377683	395667	414507	434244	454920	476582
D=0,800	U = 9,8951	10,366	10,860	11,377	11,919	12,486	13,081
F = 0,502655	q = 4973,8	5210,7	5458,8	5718,7	5991,0	6276,3	65751
c = 56,098	Q = 429740	450203	471639	494103	517624	542271	568091
D=0,900	U = 10,765	11,278	11,815	12,378	12,967	13,584	14,231
F = 0,636173	q = 6848,7	7174,8	7516,4	7874,3	8249,2	8642,0	9053,5
c = 57,541	Q = 591724	619899	649424	680339	712734	746671	782224
D=1,000	U = 11,601	12,153	12,732	13,338	13,973	14,638	15,335
F = 0,785398	q = 9111,1	9544,9	9999,4	10476	10974	11497	12017
c = 58,824	Q = 787198	824682	863949	905087	948183	993332	1040630
D=1,100	U = 12,405	12,995	13,614	14,262	14,941	15,653	16,398
F = 0,950332	q = 11788	12350	12938	13554	14199	14875	15584
c = 59,973	Q = 1018524	1067020	1117829	1171055	1226816	1285232	1346429
D=1,200	U = 13,181	13,809	14,466	15,155	15,877	16,633	17,425
F = 1,13097	q = 14907	15617	16361	17140	17956	18811	19707
c = 61,014	Q = 1288000	1349329	1413578	1480887	1551400	1625271	1702559

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$,
U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =	0,29886 ∼1:3,4	0,32745 ∼1:3,1	0,35988 ∼1:2,8	0,39442 ∼1:2,5	0,43288 ∼1:2,3	0,47508 ∼1:2,1	0,52140 ∼1:1,9
D = 0,040	U = 1,2138	1,2716	1,3322	1,3956	1,4621	1,5317	1,6046
F = 0,0012566	q = 1,5254	1,5980	1,6741	1,7538	1,8373	1,9248	2,0164
c = 22,222	Q = 131,79	138,07	144,64	151,53	158,74	166,30	174,22
D = 0,050	U = 1,4785	1,5489	1,6227	1,6999	1,7809	1,8657	1,9545
F = 0,0019635	q = 2,9031	3,0413	3,1861	3,3378	3,4967	3,6632	3,8377
c = 24,210	Q = 250,82	262,77	275,28	288,39	302,12	316,50	331,57
D = 0,060	U = 1,7341	1,8167	1,9032	1,9938	2,0888	2,1882	2,2024
F = 0,0028274	q = 4,9032	5,1367	5,3713	5,6375	5,9059	6,1871	6,4817
c = 25,922	Q = 423,64	443,81	464,94	487,08	510,27	534,57	560,02
D = 0,070	U = 1,9820	2,0764	2,7752	2,2788	2,3873	2,5010	2,6201
F = 0,0038485	q = 7,6276	7,9908	8,3713	8,7699	9,1875	9,6250	10,083
c = 27,429	Q = 659,03	690,41	732,28	757,72	793,80	831,60	871,19
D = 0,080	U = 2,2230	2,3289	2,4398	2,5560	2,6777	2,8052	2,9388
F = 0,0050265	q = 11,174	11,706	12,264	12,848	13,459	14,100	14,772
c = 28,778	Q = 965,46	1011,4	1059,6	1110,0	1162,9	1218,3	1276,3
D = 0,090	U = 2,4580	2,5751	2,6977	2,8261	2,9607	3,1017	3,2494
F = 0,0063617	q = 15,637	16,382	17,162	17,979	18,835	19,732	20,672
c = 30,000	Q = 1351,1	1415,4	1482,8	1553,4	1627,4	1704,8	1786,0
D = 0,100	U = 2,6876	2,8156	2,9496	3,0901	3,2372	3,3914	3,5528
F = 0,0078540	q = 21,108	22,113	23,166	24,269	25,425	26,636	27,904
c = 31,119	Q = 1823,8	1910,6	2001,6	2096,9	2196,7	2301,3	2410,9
D = 0,125	U = 3,2402	3,3945	3,5562	3,7255	3,9029	4,0887	4,2834
F = 0,0122718	q = 39,764	41,657	43,641	45,719	47,896	50,176	52,565
c = 33,557	Q = 3435,6	3599,2	3770,6	3950,1	4138,2	4335,2	4541,7
D = 0,150	U = 3,7678	3,9472	4,1351	4,3320	4,5383	4,7544	4,9808
F = 0,0176715	q = 66,582	69,753	73,074	76,553	80,198	84,017	88,018
c = 35,620	Q = 5752,7	6026,6	6313,6	6614,2	6929,2	7259,1	7604,7
D = 0,175	U = 4,2739	4,4774	4,6906	4,9139	5,1479	5,3930	5,6498
F = 0,0240528	q = 102,80	107,69	112,82	118,19	123,82	129,72	135,89
c = 37,408	Q = 8881,8	9304,8	9747,8	10212	10698	11208	11741
D = 0,200	U = 4,7614	4,9881	5,2256	5,4745	5,7351	6,0082	6,2943
F = 0,0314159	q = 149,58	156,71	164,17	171,99	180,17	188,75	197,74
c = 38,983	Q = 12924	13539	14184	14860	15567	16308	17085
D = 0,225	U = 5,2330	5,4821	5,7432	6,0166	6,3031	6,6032	6,9177
F = 0,0397608	q = 208,07	217,97	228,35	239,23	250,62	262,55	275,05
c = 40,394	Q = 17977	18833	19730	20669	21653	22684	23764
D = 0,250	U = 5,6899	5,9608	6,2446	6,5420	6,8535	7,1798	7,5217
F = 0,0490874	q = 279,30	292,60	306,53	321,13	336,36	352,44	369,22
c = 41,667	Q = 24132	25281	26484	27745	29067	30451	31901
D = 0,275	U = 6,1341	6,4262	6,7322	7,0528	7,3886	7,7404	8,1090
F = 0,0593957	q = 364,34	381,69	399,86	418,90	438,85	459,75	481,64
c = 42,830	Q = 31479	32978	34548	36193	37917	39722	41614
D = 0,300	U = 6,5668	6,8795	7,2071	7,5502	7,9098	8,2864	8,6809
F = 0,0706858	q = 464,18	486,28	509,44	533,70	559,11	585,73	613,62
c = 43,899	Q = 40105	42015	44015	46111	48307	50607	53017
D = 0,325	U = 6,9886	7,3214	7,6700	8,0352	8,4178	8,8186	9,2385
F = 0,0829577	q = 579,76	607,36	636,28	666,58	698,32	731,57	766,40
c = 44,885	Q = 50091	52476	54975	57592	60335	63208	66217
	87	88	89	90	91	92	93

	87	88	89	90	91	92	93
***J* =**	0,29836 ∼1:3,4	0,32745 ∼1:3,1	0,35938 ∼1:2,8	0,39442 ∼1:2,5	0,43288 ∼1:2,3	0,47508 ∼1:2,1	0,52140 ∼1:1,9
***D* = 0,350** *F* = 0,0962113 *c* = 45,804	*U* = 7,4009 q = 712,05 Q = 61521	7,7533 745,95 64450	8,1225 781,47 67519	8,5092 818,68 70734	8,9144 857,67 74102	9,3389 898,50 77631	9,7835 941,29 81327
***D* = 0,375** *F* = 0,110447 *c* = 46,61	*U* = 7,8038 q = 861,91 Q = 74469	8,1754 902,95 78015	8,5647 945,94 81730	8,9725 990,99 85621	9,3998 1038,2 89698	9,8473 1087,6 93969	10,316 1139,4 98444
***D* = 0,400** *F* = 0,125664 *c* = 47,464	*U* = 8,1985 q = 1030,3 Q = 89014	8,5889 1079,3 93253	8,9979 1130,7 97693	9,4263 1184,5 102345	9,8752 1241,0 107216	10,345 1300,0 112323	10,838 1361,9 117672
***D* = 0,425** *F* = 0,141863 *c* = 48,223	*U* = 8,5859 q = 1218,0 Q = 105237	8,9948 1276,0 110248	9,4231 1336,8 115498	9,8718 1400,4 120997	10,342 1467,1 126759	10,834 1537,0 132794	11,350 1610,2 139117
***D* = 0,450** *F* = 0,159043 *c* = 48,936	*U* = 8,9657 q = 1425,9 Q = 123200	9,3926 1493,8 129066	9,8398 1565,0 135212	10,308 1639,5 141650	10,799 1717,5 148395	11,313 1799,3 155461	11,852 1885,0 162863
***D* = 0,475** *F* = 0,177205 *c* = 49,611	*U* = 9,3384 q = 1654,8 Q = 142976	9,7831 1733,6 149784	10,249 1816,2 156916	10,737 1902,6 164388	11,248 1993,2 172215	11,784 2088,1 180415	12,345 2187,6 189006
***D* = 0,500** *F* = 0,196350 *c* = 50,253	*U* = 9,7048 q = 1905,5 Q = 164639	10,167 1996,3 172478	10,651 2091,3 180691	11,158 2190,9 189293	11,690 2295,2 198308	12,246 2404,5 207751	12,829 2519,0 217643
***D* = 0,550** *F* = 0,237583 *c* = 51,444	*U* = 10,420 q = 2475,6 Q = 213890	10,916 2593,5 224075	11,436 2716,9 234744	11,980 2846,3 245922	12,551 2981,8 257631	13,148 3123,8 269899	13,774 3272,6 282750
***D* = 0,600** *F* = 0,282743 *c* = 52,529	*U* = 11,113 q = 3142,1 Q = 271473	11,642 3291,7 284400	12,196 3448,4 297942	12,777 3612,6 312128	13,385 3784,6 326990	14,023 3964,8 342560	14,690 4153,6 358872
***D* = 0,650** *F* = 0,331831 *c* = 53.527	*U* = 11,786 q = 3911,0 Q = 337913	12,347 4097,3 354003	12,935 4292,4 370859	13,551 4496,7 388518	14,197 4710,8 407017	14,873 4935,2 426398	15,581 5170,2 446701
***D* = 0,700** *F* = 0,384845 *c* = 54.445	*U* = 12,441 q = 4787,8 Q = 413668	13,033 5015,8 433366	13,654 5254,6 454000	14,304 5504,8 475618	14,985 5767,0 498265	15,699 6041,6 521990	16,446 6329,2 546845
***D* = 0,750** *F* = 0,441786 *c* = 55.302	*U* = 13,080 q = 5778,6 Q = 499275	13,703 6053,8 523048	14.355 6342,1 547953	15,039 6644,0 575044	15,755 6960,4 601378	16,505 7291,8 630013	17,291 7639,0 660028
***D* = 0,800** *F* = 0,502655 *c* = 56,098	*U* = 13,704 q = 6888,2 Q = 595141	14,356 7216,2 623480	15,040 7559,8 653167	15,756 7919,8 684268	16.506 8296,9 716850	17,292 8691,9 750983	18,115 9105,8 786742
***D* = 0,900** *F* = 0,636173 *c* = 57,541	*U* = 14,909 q = 9484,6 Q = 819470	15,619 9936,2 858490	16,362 10409 899368	17,142 10905 942192	17,958 11424 987055	18,813 11968 1034055	19,709 12538 1083292
***D* = 1,000** *F* = 0,785398 *c* = 58,824	*U* = 16,066 q = 12618 Q = 1090180	16.830 13219 1142090	17,632 13848 1196472	18,471 14507 1253443	19,351 15198 1313123	20,272 15922 1375651	21,238 16680 1441155
***D* = 1,100** *F* = 0,950332 *c* = 59,973	*U* = 17.179 q = 16326 Q = 1410540	17,997 17103 1477704	18.854 17917 1548066	19,752 18771 1621779	20,692 19664 1699000	21,677 20601 1779900	22,710 21582 1864651
***D* = 1,200** *F* = 1,13097 *c* = 61,014	*U* = 18,254 q = 20645 Q = 1783733	19,123 21628 1868667	20,034 22658 1957645	20 988 23737 2050859	21,987 24867 2148512	23,034 26051 2250816	24,131 27292 2357990

$J = \frac{\text{Druckhöhenverlust}}{\text{(schräge) Stranglänge}}$, D = Durchm. in m, F = Querschnitt in m², c = Koeffizient d. Formel $U = c\sqrt{J\frac{D}{4}}$, U = Geschwindigkeit in m p. Sek., q = Durchflußmenge in Lit. p. Sek., Q = Durchflußmenge in m³ p. Tag.

J =	0,57224 ∼1:1,7	0,62808 ∼1:1,6	0,68926 ∼1:1,5	0,75646 ∼1:1,3	0,83022 ∼1:1,2	0,91116 ∼1:1,1	1,00000 =1:1
D = 0,040	U = 1,6810	1,7611	1,8449	1,9328	2,0248	2,1212	2,2222
F = 0,0012566	q = 2,1124	2,2130	2,3184	2.4288	2,5444	2,6656	2,7925
c = 22,222	Q = 182,52	191,21	200,31	209,85	219,84	230,31	241,27
D = 0,050	U = 2,0476	2,1451	2,2472	2,3542	2,4663	2,5837	2,7068
F = 0,0019635	q = 4,0204	4,2118	4,4124	4,6225	4,8426	5,0732	5,3147
c = 24,210	Q = 347,36	363,90	381,23	399,38	418,40	438,32	459,19
D = 0,060	U = 2,4016	2,5160	2,6358	2,7613	2,8927	3,0305	3,1748
F = 0,0028274	q = 6,7904	7,1137	7,4524	7,8073	8,1790	8,5685	8,9765
c = 25,922	Q = 586,69	614,62	643,89	674,55	706,67	740,32	775,57
D = 0,070	U = 2,7448	2,8755	3,0125	3,1559	3,3062	3,4636	3,6285
F = 0,0038485	q = 10,563	11,066	11,593	12,145	12,724	13,329	13,964
c = 27,429	Q = 912,68	956,14	1001,7	1049,4	1099,3	1151,7	1206,5
D = 0,080	U = 3,0787	3,2253	3,3789	3,5397	3,7083	3,8849	4,0698
F = 0,0050265	q = 15,475	16,212	16,984	17,793	18,640	19,527	20,457
c = 28,778	Q = 1337,1	1400,7	1467,4	1537,3	1610,5	1687,2	1767,5
D = 0,090	U = 3,4041	3,5662	3,7360	3,9139	4,1002	4,2955	4,5000
F = 0,0063617	q = 21,656	22.687	23,767	24,899	26,085	27,327	28,628
c = 30,000	Q = 1871,1	1960,2	2053,5	2151,3	2253,7	2361,0	2473,4
D = 0,100	U = 3,7220	3,8992	4,0849	4,2794	4,4832	4,6967	4,9203
F = 0,0078540	q = 29,233	30,625	32,083	33,610	35,211	36,887	38,644
c = 31,119	Q = 2525,7	2646,0	2772,0	2903,9	3042,2	3187,1	3338,8
D = 0,125	U = 4,4874	4,7010	4,9249	5,1594	5,4051	5,6624	5,9320
F = 0,0122718	q = 55,068	57,690	60,437	63,315	66,330	69,488	72,797
c = 33,557	Q = 4757,9	4984,5	5221,8	5470,4	5730,9	6003,8	6289,7
D = 0,150	U = 5,2179	5,4664	5,7267	5.9994	6,2850	6,5843	6,8978
F = 0,0176715	q = 92,209	96,599	101,20	106,02	111,07	116,35	121,89
c = 35,620	Q = 7966,8	8346,2	8743.6	9159,9	9596,1	10053	10532
D = 0,175	U = 5,9189	6,2007	6,4959	6,8052	7,1293	7,4687	7,8244
F = 0,0240528	q = 142,37	149,14	156,25	163,69	171,48	179,64	188,20
c = 37,408	Q = 12300	12886	13500	14142	14816	15521	16260
D = 0,200	U = 6,5940	6,9080	7,2369	7,5815	7,9425	8,3207	8,7169
F = 0,0314159	q = 207,16	217,02	227,35	238,18	249,52	261,40	273,85
c = 38,983	Q = 17898	18751	19643	20579	21559	22585	23661
D = 0,225	U = 7,2471	7,5921	7,9536	8,3323	8,7291	9,1447	9,5802
F = 0,0397608	q = 288,15	301.87	316,24	331,30	347,08	363,60	380.91
c = 40.394	Q = 24896	26081	27323	28624	29987	31415	32911
D = 0,250	U = 7,8798	8,2550	8,6481	9,0599	9,4913	9 9432	10.417
F = 0,0490874	q = 386,80	405,22	424,51	444,73	465,90	488,09	511,33
c = 41,667	Q = 33420	35011	36678	38424	40254	42171	44179
D = 0,275	U = 8,4951	8,8996	9,3233	9,7673	10.232	10,720	11,230
F = 0,0593957	q = 504.57	528,60	553,77	580,13	607.76	636,70	667,01
c = 42,830	Q = 43595	45671	47845	50124	52510	55011	57630
D = 0,300	U = 9,0943	9,5273	9,9810	10.456	10,954	11,476	12,022
F = 0,0706858	q = 642.87	673,45	705,51	739.11	774,30	811,17	849.79
c = 43,899	Q = 55541	58186	60956	63859	66900	70085	73422
D = 0,325	U = 9,6784	10,139	10,622	11,128	11,658	12,213	12,794
F = 0,0829577	q = 802.90	841.13	881,18	923.14	967,09	1013,1	1061,4
c = 44,885	Q = 69370	72673	76134	79759	83557	87535	91703
	94	95	96	97	98	99	100

	94	95	96	97	98	99	100
$J =$	0,57224 ∼1:1,7	0,62803 ∼1:1,6	0,68926 ∼1:1,5	0,75646 ∼1:1,3	0,83022 ∼1:1,2	0,91116 ∼1:1,1	1,00000 =1:1
D = 0,350	U = 10,249	10,737	11,249	11,784	12,345	12,933	13,549
F = 0,0962113	q = 986,11	1033,1	1082,3	1133,8	1187,8	1244,3	1303,6
c = 45,804	Q = 85200	89256	93506	97959	102623	107510	112629
D = 0,375	U = 10,807	11,322	11,861	12,426	13,018	13,637	14,287
F = 0,110447	q = 1193,6	1250,5	1310,0	1372,4	1437,8	1506,2	1577,9
c = 46,661	Q = 103131	108042	113186	118576	124222	130137	136333
D = 0,400	U = 11,354	11,895	12,461	13,054	13,676	14,327	15,009
F = 0,125664	q = 1426,8	1494,7	1565,9	1640,5	1718,6	1800,4	1886,1
c = 47,464	Q = 123275	129145	135294	141736	148485	155555	162962
D = 0,425	U = 11,891	12,457	13,050	13,671	14,322	15,004	15,719
F = 0,141863	q = 1686,8	1767,1	1851,3	1939,4	2031,8	2128,5	2229,9
c = 48,223	Q = 145742	152681	159951	167567	175546	183905	192662
D = 0,450	U = 12,416	13,008	13,627	14,276	14,956	15,668	16,414
F = 0,159043	q = 1974,7	2068,8	2167,3	2270,5	2378,6	2491,8	2610,5
c = 48,936	Q = 170618	178742	187253	196169	205510	215296	225547
D = 0,475	U = 12,933	13,548	14,194	14,869	15,577	16,319	17,096
F = 0,177205	q = 2291,7	2400,9	2515,2	2634,9	2760,4	2891,8	3029,5
c = 49,611	Q = 198006	207434	217311	227658	238498	249855	261752
D = 0,500	U = 13,440	14,080	14,750	15,453	16,189	16,960	17,767
F = 0,196350	q = 2639,0	2764,6	2896,3	3034,2	3178,6	3330,0	3488,5
c = 50,253	Q = 228006	238863	250236	262152	275634	287711	301411
D = 0,550	U = 14,430	15,117	15,837	16,591	17,381	18,209	19,076
F = 0,237583	q = 3428,4	3591,6	3762,7	3941,8	4129,5	4326,1	4532,1
c = 51,444	Q = 296214	310318	325094	340574	356790	373779	391577
D = 0,600	U = 15,390	16,123	16,890	17,695	18,537	19,420	20,345
F = 0,282743	q = 4351,4	4558,6	4775,6	5003,0	5241,3	5490,8	5752,3
c = 52,529	Q = 375960	393861	412615	432262	452845	474407	496996
D = 0,650	U = 16,323	17,100	17,914	18,767	19,661	20,597	21,577
F = 0,331831	q = 5416,3	5674,2	5944,4	6227,5	6524,0	6834,6	7160,1
c = 53,527	Q = 467971	490254	513598	538053	563673	590512	618630
D = 0,700	U = 17,229	18,050	18,909	19,809	20,753	21,741	22,776
F = 0,384845	q = 6630,6	6946,3	7277,9	7623,6	7986,6	8366,9	8765,3
c = 54,445	Q = 572884	600162	628739	658677	690040	722897	757318
D = 0,750	U = 18,115	18,977	19,881	20,827	21,819	22,858	23,946
F = 0,441786	q = 8002,8	8383,8	8783,0	9201,2	9639,7	10098	10579
c = 55,302	Q = 691439	724362	758853	794986	832840	872497	914041
D = 0,800	U = 18,978	19,882	20,828	21,820	22,859	23,948	25,088
F = 0,502655	q = 9539,4	9993,6	10469	10968	11490	12037	12611
c = 56,098	Q = 824203	863448	904562	947633	992756	1040026	1089548
D = 0,900	U = 20,647	21,630	22,660	23,739	24,870	26,054	27,294
F = 0,636173	q = 13135	13761	14416	15102	15821	16575	17364
c = 57,541	Q = 1134874	1188911	1245522	1304829	1366959	1432048	1500236
D = 1,000	U = 22,249	23,308	24,418	25,581	26,799	28,075	29,412
F = 0,785398	q = 17434	18306	19178	20091	21048	22050	23100
c = 58,824	Q = 1509776	1581665	1656978	1735876	1818531	1905121	1995836
D = 1,100	U = 23,791	24,924	26,110	27,354	28,656	30,021	31,450
F = 0,950332	q = 22609	23686	24814	25995	27233	28530	29888
c = 59,973	Q = 1953438	2046454	2143895	2245978	2352923	2464959	2582330
D = 1,200	U = 25,280	26,484	27,745	29,066	30,450	31,900	33,419
F = 1,13097	q = 28591	29952	31379	32873	34438	36078	37796
c = 61,014	Q = 2470264	2587891	2711116	2840207	2975446	3117124	3265548

Tabelle III.

Werte von c in $U = c\sqrt{RJ}$ nach Ganguillet und Kutters Formel (41), S. 67.

Profilradius R in m	Rauhigkeit	Gefälle J							Rauhigkeit	Gefälle J						
		0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,001	0,01		0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,001	0,01
0,05	$n = 0{,}010$	38	44	51	54	56	57	58	$n = 0{,}013$	28	31	35	38	40	41	42
0,1		49	56	61	65	68	70	71		36	30	44	47	49	50	51
0,2		68	70	74	77	78	79	80		46	50	53	56	58	59	59
0,3		72	77	81	84	85	86	86		53	57	60	63	64	64	65
0,5		83	86	88	90	91	91	91		62	65	67	69	69	70	70
1,0		100	100	100	100	100	100	100		77	77	77	77	77	77	77
2,0		115	111	109	107	106	105	105		90	87	85	84	83	82	82
3,0		124	117	113	111	110	109	108		99	94	89	88	87	86	85
5,0		134	123	118	115	113	112	111		108	100	93	91	90	89	88
15,0		151	135	125	121	118	117	116		125	114	102	98	96	94	92
0,05	$n = 0{,}017$	19	22	24	26	28	29	29	$n = 0{,}020$	15	18	20	21	23	23	24
0,1		25	29	32	34	35	36	36		21	23	25	28	29	29	30
0,2		34	37	39	41	42	42	43		28	30	32	34	35	36	36
0,3		40	43	45	46	47	47	48		33	35	37	38	39	40	40
0,5		47	49	50	51	51	52	52		40	41	42	43	43	44	44
1,0		58	58	58	58	58	58	58		50	50	50	50	50	50	50
2,0		71	69	67	66	65	64	64		61	59	57	56	56	55	55
3,0		78	74	71	70	69	68	68		69	64	61	59	59	58	58
5,0		87	79	75	73	72	71	70		76	70	66	63	62	61	61
15,0		105	90	83	79	77	76	75		94	81	74	70	68	67	66
0,05	$n = 0{,}025$	12	13	15	16	17	18	18	$n = 0{,}030$	10	11	12	13	13	14	14
0,1		17	18	19	20	21	22	22		13	14	15	16	17	18	18
0,2		22	23	24	25	26	27	27		18	19	19	20	21	22	22
0,3		26	28	29	30	30	31	31		21	22	23	24	24	25	25
0,5		31	32	33	34	34	35	35		25	26	27	27	28	29	29
1,0		40	40	40	40	40	40	40		33	33	33	33	33	33	33
2,0		50	48	47	46	45	45	45		42	41	40	40	39	38	38
3,0		56	53	51	49	48	48	47		48	45	43	42	42	41	41
5,0		64	59	54	53	52	51	50		56	51	47	45	44	43	43
15,0		81	71	63	59	57	56	55		72	62	55	52	51	49	48
0,05	$n = 0{,}035$	8	9	9	10	10	11	11	$n = 0{,}040$	6	7	7	8	8	9	9
0,1		11	12	12	13	13	14	14		9	10	11	11	12	12	12
0,2		15	16	16	17	17	18	18		13	14	14	15	15	16	16
0,3		18	19	19	20	20	21	21		15	16	17	18	18	18	18
0,5		22	23	23	23	24	24	24		19	19	20	20	21	21	21
1,0		29	29	29	29	29	29	29		25	25	25	25	25	25	25
2,0		36	35	34	34	33	33	33		32	31	31	30	30	29	29
3,0		42	40	38	37	36	36	36		37	35	34	33	32	32	32
5,0		49	45	43	42	41	40	39		44	41	39	38	37	36	35
15,0		65	56	51	47	45	44	43		59	52	46	43	42	41	40

Tabelle V.

Zur Berechnung der Staukurven nach Rühlmanns Formel (66c), S. 125.

$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$	$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$	$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$	$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$
0,010	0,0067	0,290	1,3243	0,570	1,7579	0,850	2,1095
0,015	0,1452	0,295	1,3336	0,575	1,7647	0,855	2,1154
0,020	0,2444	0,300	1,3428	0,580	1,7714	0,860	2,1213
0,025	0,3222	0,305	1,3519	0,585	1,7781	0,865	2,1272
0,030	0,3863	0,310	1,3610	0,590	1,7848	0,870	2,1331
0,035	0,4411	0,315	1,3700	0,595	1,7914	0,875	2,1390
0,040	0,4889	0,320	1,3789	0,600	1,7980	0,880	2,1449
0,045	0,5316	0,325	1,3877	0,605	1,8046	0,885	2,1508
0,050	0,5701	0,330	1,3964	0,610	1,8112	0,890	2,1567
0,055	0,6053	0,335	1,4050	0,615	1,8178	0,895	2,1625
0,060	0,6376	0,340	1,4136	0,620	1,8243	0,900	2,1683
0,065	0,6677	0,345	1,4221	0,625	1,8308	0,905	2,1742
0,070	0,6958	0,350	1,4306	0,630	1,8373	0,910	2,1800
0,075	0,7222	0,355	1,4390	0,635	1,8438	0,915	2,1858
0,080	0,7482	0,360	1,4473	0,640	1,8503	0,920	2,1916
0,085	0,7708	0,365	1,4556	0,645	1,8567	0,925	2,1974
0,090	0,7933	0,370	1,4638	0,650	1,8631	0,930	2,2032
0,095	0,8148	0,375	1,4720	0,655	1,8695	0,935	2,2090
0,100	0,8353	0,380	1,4801	0,660	1,8759	0,940	2,2148
0,105	0,8550	0,385	1,4882	0,665	1,8823	0,945	2,2206
0,110	0,8739	0,390	1,4962	0,670	1,8887	0,950	2,2264
0,115	0,8922	0,395	1,5041	0,675	1,8951	0,955	2,2322
0,120	0,9098	0,400	1,5119	0,680	1,9014	0,960	2,2380
0,125	0,9269	0,405	1,5197	0,685	1,9077	0,965	2,2438
0,130	0,9434	0,410	1,5275	0,690	1,9140	0,970	2,2496
0,135	0,9595	0,415	1,5353	0,695	1,9203	0,975	2,2554
0,140	0,9751	0,420	1,5430	0,700	1,9266	0,980	2,2611
0,145	0,9903	0,425	1,5507	0,705	1,9329	0,985	2,2668
0,150	1,0051	0,430	1,5583	0,710	1,9392	0,990	2,2725
0,155	1,0195	0,435	1,5659	0,715	1,9455	0,995	2,2782
0,160	1,0335	0,440	1,5734	0,720	1,9517	1,000	2,2839
0,165	1,0473	0,445	1,5809	0,725	1,9579	1,100	2,3971
0,170	1,0608	0,450	1,5884	0,730	1,9641	1,200	2,5083
0,175	1,0740	0,455	1,5958	0,735	1,9703	1,300	2,6179
0,180	1,0869	0,460	1,6032	0,740	1,9765	1,400	2,7264
0,185	1,0995	0,465	1,6106	0,745	1,9827	1,500	2,8337
0,190	1,1119	0,470	1,6179	0,750	1,9888	1,600	2,9401
0,195	1,1241	0,475	1,6252	0,755	1,9949	1,700	3,0458
0,200	1,1361	0,480	1,6324	0,760	2,0010	1,800	3,1508
0,205	1,1479	0,485	1,6396	0,765	2,0071	1,900	3,2553
0,210	1,1595	0,490	1,6468	0,770	2,0132	2,000	3,3594
0,215	1,1709	0,495	1,6540	0,775	2,0193	2,100	3,4631
0,220	1,1821	0,500	1,6611	0,780	2,0254	2,200	3,5664
0,225	1,1931	0,505	1,6682	0,785	2,0315	2,300	3,6694
0,230	1,2040	0,510	1,6753	0,790	2,0375	2,400	3,7720
0,235	1,2148	0,515	1,6823	0,795	2,0435	2,500	3,8745
0,240	1,2254	0,520	1,6893	0,800	2,0495	2,600	3,9768
0,245	1,2358	0,525	1,6963	0,805	2,0555	2,700	4,0789
0,250	1,2461	0,530	1,7032	0,810	2,0615	2,800	4,1808
0,255	1,2563	0,535	1,7101	0,815	2,0675	2,900	4,2826
0,260	1,2664	0,540	1,7170	0,820	2,0735	3,000	4,3845
0,265	1,2763	0,545	1,7239	0,825	2,0795	3,500	4,8911
0,270	1,2861	0,550	1,7308	0,830	2,0855	4,000	5,3958
0,275	1,2958	0,555	1,7376	0,835	2,0915	4,500	5,8993
0,280	1,3054	0,560	1,7444	0,840	2,0975	5,000	6,4018
0,285	1,3149	0,565	1,7512	0,845	2,1035		

Tabelle IV.

Werte von γ in Bazins Formel (45), S. 71.

$\gamma =$	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75	$\gamma =$	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
R in m							R in m						
0,05	68,5	50,7	28,5	18,1	12,8	9,9	0,45	79,8	70,2	51,6	38,4	29,6	24,1
0,06	69,8	52,6	30,2	19,4	13,8	10,7	0,46	79,9	70,4	51,8	38,6	29,8	24,3
0,07	70,9	54,2	31,7	20,6	14,7	11,4	0,47	80,0	70,5	52,0	38,8	30,0	24,5
0,08	71,8	55,6	33,1	21,7	15,5	12,1	0,48	80,0	70,6	52,3	39,1	30,2	24,7
0,09	72,5	56,7	34,4	22,7	16,3	12,7	0,49	80,1	70,8	52,5	39,3	30,4	24,8
0,10	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3	0,50	80,2	70,9	52,7	39,5	30,6	25,0
0,11	73,6	58,7	36,5	24,4	17,7	13,9	0,55	80,4	71,5	53,7	40,5	31,6	25,9
0,12	74,1	59,5	37,4	25,2	18,3	14,4	0,60	80,7	72,1	54,6	41,4	32,5	26,7
0,13	74,6	60,2	38,2	25,9	18,9	14,9	0,65	80,9	72,6	55,4	42,3	33,3	27,4
0,14	75,0	60,9	39,0	26,7	19,4	15,3	0,70	81,1	73,0	56,1	43,1	34,1	28,1
0,15	75,3	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8	0,75	81,3	73,4	56,8	43,9	34,8	28,8
0,16	75,6	62,1	40,5	27,8	20,4	16,2	0,80	81,5	73,8	57,4	44,6	35,5	29,4
0,17	75,9	62,7	41,2	28,4	20,9	16,6	0,85	81,7	73,1	58,0	45,2	36,1	30,0
0,18	76,2	63,2	41,8	29,0	21,4	17,0	0,90	81,8	73,4	58,6	45,9	36,7	30,6
0,19	76,5	63,6	42,4	29,5	21,8	17,3	0,95	81,9	74,7	59,1	46,5	37,3	31,1
0,20	76,7	64,1	42,9	30,0	22,3	17,7	1,00	82,0	75,0	59,6	47,0	37,8	31,6
0,21	76,9	64,5	43,5	30,5	22,7	18,1	1,10	82,2	75,4	60,5	48,0	38,8	32,6
0,22	77,1	64,9	44,0	30,9	23,1	18,4	1,20	82,4	75,9	61,3	48,9	39,7	33,5
0,23	77,3	65,2	44,4	31,4	23,4	18,7	1,30	82,6	76,3	62,0	49,8	40,6	34,3
0,24	77,5	65,5	44,8	31,8	23,8	19,0	1,40	82,8	76,6	62,6	50,6	41,4	35,1
0,25	77,6	65,9	45,3	32,2	24,2	19,3	1,50	82,9	76,9	63,2	51,3	42,2	35,8
0,26	77,8	66,2	45,7	32,6	24,5	19,6	1,60	83,0	77,2	63,8	52,0	42,9	36,5
0,27	78,0	66,5	46,1	33,0	24,8	19,9	1,70	83,1	77,5	64,3	52,6	43,6	37,1
0,28	78,1	66,8	46,5	33,4	25,2	20,2	1,80	83,2	77,7	64,8	53,2	44,2	37,7
0,29	78,3	67,0	46,9	33,7	25,5	20,5	1,90	83,3	77,9	65,2	53,8	44,8	38,3
0,30	78,4	67,3	47,3	34,1	25,8	20,7	2,00	83,4	78,1	65,6	54,3	45,3	38,9
0,31	78,5	67,6	47,6	34,3	26,1	21,0	2,20	83,6	78,5	66,4	55,3	46,4	39,9
0,32	78,6	67,8	47,9	34,7	26,4	21,2	2,40	83,7	78,8	67,1	56,2	47,3	40,8
0,33	78,8	68,0	48,2	35,1	26,7	21,5	2,60	83,8	79,1	67,7	57,0	48,1	41,7
0,34	78,9	68,2	48,5	35,4	26,9	21,7	2,80	83,9	79,4	68,2	57,7	48,9	42,5
0,35	79,0	68,4	48,8	35,7	27,2	22,0	3,00	84,0	79,6	68,7	58,3	49,7	43,3
0,36	79,1	68,6	49,2	36,0	27,5	22,2	3,20	84,1	79,8	69,2	58,9	50,4	44,0
0,37	79,2	68,8	49,5	36,3	27,7	22,4	3,40	84,2	80,0	69,6	59,5	51,0	44,6
0,38	79,2	69,0	49,8	36,6	28,0	22,7	3,60	84,3	80,2	70,0	60,1	51,6	45,2
0,39	79,3	69,2	50,1	36,8	28,2	22,9	3,80	84,4	80,4	70,4	60,6	52,2	45,8
0,40	79,4	69,4	50,4	37,1	28,5	23,1	4,00	84,4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4
0,41	79,5	69,6	50,6	37,4	28,7	23,3	4,50	84,6	80,9	71,5	62,1	53,9	47,6
0,42	79,6	69,7	50,9	37,6	28,9	23,5	5,00	84,7	81,2	72,1	63,0	55,0	48,8
0,43	79,7	69,9	51,1	37,9	29,2	23,7	5,50	84,8	81,4	72,7	63,8	56,0	49,8
0,44	79,7	70,1	51,4	38,1	29,4	23,9	6,00	84,9	81,6	73,2	64,6	56,8	50,7

Tabelle V.

Zur Berechnung der Staukurven nach Rühlmanns Formel (66 c), S. 125.

$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$	$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$	$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$	$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$
0,010	0,0067	0,290	1,3243	0,570	1,7579	0,850	2,1095
0,015	0,1452	0,295	1,3336	0,575	1,7647	0,855	2,1154
0,020	0,2444	0,300	1,3428	0,580	1,7714	0,860	2,1213
0,025	0,3222	0,305	1,3519	0,585	1,7781	0,865	2,1272
0,030	0,3868	0,310	1,3610	0,590	1,7848	0,870	2,1331
0,035	0,4411	0,315	1,3700	0,595	1,7914	0,875	2,1390
0,040	0,4889	0,320	1,3789	0,600	1,7980	0,880	2,1449
0,045	0,5316	0,325	1,3877	0,605	1,8046	0,885	2,1508
0,050	0,5701	0,330	1,3964	0,610	1,8112	0,890	2,1567
0,055	0,6053	0,335	1,4050	0,615	1,8178	0,895	2,1625
0,060	0,6376	0,340	1,4136	0,620	1,8243	0,900	2,1683
0,065	0,6677	0,345	1,4221	0,625	1,8308	0,905	2,1742
0,070	0,6958	0,350	1,4306	0,630	1,8373	0,910	2,1800
0,075	0,7222	0,355	1,4390	0,635	1,8438	0,915	2,1858
0,080	0,7482	0,360	1,4473	0,640	1,8503	0,920	2,1916
0,085	0,7708	0,365	1,4556	0,645	1,8567	0,925	2,1974
0,090	0,7933	0,370	1,4638	0,650	1,8631	0,930	2,2032
0,095	0,8148	0,375	1,4720	0,655	1,8695	0,935	2,2090
0,100	0,8353	0,380	1,4801	0,660	1,8759	0,940	2,2148
0,105	0,8550	0,385	1,4882	0,665	1,8823	0,945	2,2206
0,110	0,8739	0,390	1,4962	0,670	1,8887	0,950	2,2264
0,115	0,8922	0,395	1,5041	0,675	1,8951	0,955	2,2322
0,120	0,9098	0,400	1,5119	0,680	1,9014	0,960	2,2380
0,125	0,9269	0,405	1,5197	0,685	1,9077	0,965	2,2438
0,130	0,9434	0,410	1,5275	0,690	1,9140	0,970	2,2496
0,135	0,9595	0,415	1,5353	0,695	1,9203	0,975	2,2554
0,140	0,9751	0,420	1,5430	0,700	1,9266	0,980	2,2611
0,145	0,9903	0,425	1,5507	0,705	1,9329	0,985	2,2668
0,150	1,0051	0,430	1,5583	0,710	1,9392	0,990	2,2725
0,155	1,0195	0,435	1,5659	0,715	1,9455	0,995	2,2782
0,160	1,0335	0,440	1,5734	0,720	1,9517	1,000	2,2839
0,165	1,0473	0,445	1,5809	0,725	1,9579	1,100	2,3971
0,170	1,0608	0,450	1,5884	0,730	1,9641	1,200	2,5083
0,175	1,0740	0,455	1,5958	0,735	1,9703	1,300	2,6179
0,180	1,0869	0,460	1,6032	0,740	1,9765	1,400	2,7264
0,185	1,0995	0,465	1,6106	0,745	1,9827	1,500	2,8337
0,190	1,1119	0,470	1,6179	0,750	1,9888	1,600	2,9401
0,195	1,1241	0,475	1,6252	0,755	1,9949	1,700	3,0458
0,200	1,1361	0,480	1,6324	0,760	2,0010	1,800	3,1508
0,205	1,1479	0,485	1,6396	0,765	2,0071	1,900	3,2553
0,210	1,1595	0,490	1,6468	0,770	2,0132	2,000	3,3594
0,215	1,1709	0,495	1,6540	0,775	2,0193	2,100	3,4631
0,220	1,1821	0,500	1,6611	0,780	2,0254	2,200	3,5664
0,225	1,1931	0,505	1,6682	0,785	2,0315	2,300	3,6694
0,230	1,2040	0,510	1,6753	0,790	2,0375	2,400	3,7720
0,235	1,2148	0,515	1,6823	0,795	2,0435	2,500	3,8745
0,240	1,2254	0,520	1,6893	0,800	2,0495	2,600	3,9768
0,245	1,2358	0,525	1,6963	0,805	2,0555	2,700	4,0789
0,250	1,2461	0,530	1,7032	0,810	2,0615	2,800	4,1808
0,255	1,2563	0,535	1,7101	0,815	2,0675	2,900	4,2826
0,260	1,2664	0,540	1,7170	0,820	2,0735	3,000	4,3845
0,265	1,2763	0,545	1,7239	0,825	2,0795	3,500	4,8911
0,270	1,2861	0,550	1,7308	0,830	2,0855	4,000	5,3958
0,275	1,2958	0,555	1,7376	0,835	2,0915	4,500	5,8993
0,280	1,3054	0,560	1,7444	0,840	2,0975	5,000	6,4018
0,285	1,3149	0,565	1,7512	0,845	2,1035		

Tabelle VI. **Zur Berechnung der Senkungskurven nach Rühlmanns Formel (66d), S. 125.**

$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$	$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$	$\frac{y}{h_0}$	$\frac{ix}{h_0}$
0,010	0,0067	0,225	0,8939	0,440	0,9931
0,015	0,1251	0,230	0,8982	0,445	0,9941
0,020	0,2287	0,235	0,9023	0,450	0,9951
0,025	0,2888	0,240	0,9063	0,455	0,9961
0,030	0,3463	0,245	0,9101	0,460	0,9971
0,035	0,3948	0,250	0,9138	0,465	0,9980
0,040	0,4356	0,255	0,9174	0,470	0,9989
0,045	0,4715	0,260	0,9209	0,475	0,9998
0,050	0,5034	0,265	0,9242	0,480	1,0006
0,055	0,5319	0,270	0,9275	0,485	1,0014
0,060	0,5577	0,275	0,9306	0,490	1,0022
0,065	0,5811	0,280	0,9336	0,495	1,0029
0,070	0,6025	0,285	0,9365	0,500	1,0036
0,075	0,6222	0,290	0,9394	0,505	1,0043
0,080	0,6405	0,295	0,9421	0,510	1,0050
0,085	0,6575	0,300	0,9448	0,515	1,0057
0,090	0,6733	0,305	0,9473	0,520	1,0063
0,095	0,6881	0,310	0,9498	0,525	1,0069
0,100	0,7020	0,315	0,9522	0,530	1,0075
0,105	0,7150	0,320	0,9546	0,535	1,0081
0,110	0,7273	0,325	0,9569	0,540	1,0086
0,115	0,7389	0,330	0,9591	0,545	1,0091
0,120	0,7500	0,335	0,9612	0,550	1,0096
0,125	0,7603	0,340	0,9632	0,555	1,0101
0,130	0,7703	0,345	0,9652	0,560	1,0106
0,135	0,7796	0,350	0,9671	0,565	1,0111
0,140	0,7886	0,355	0,9690	0,570	1,0116
0,145	0,7971	0,360	0,9708	0,575	1,0121
0,150	0,8053	0,365	0,9725	0,580	1,0125
0,155	0,8131	0,370	0,9742	0,585	1,0129
0,160	0,8205	0,375	0,9759	0,590	1,0133
0,165	0,8276	0,380	0,9775	0,595	1,0137
0,170	0,8344	0,385	0,9790	0,600	1,0140
0,175	0,8410	0,390	0,9805	0,650	1,0166
0,180	0,8473	0,395	0,9819	0,700	1,0184
0,185	0,8533	0,400	0,9833	0,750	1,0194
0,190	0,8591	0,405	0,9847	0,800	1,0199
0,195	0,8647	0,410	0,9860	0,850	1,0202
0,200	0,8700	0,415	0,9873	0,900	1,0203
0,205	0,8751	0,420	0,9885	0,950	1,0203
0,210	0,8801	0,425	0,9897	1,000	1,0203
0,215	0,8848	0,430	0,9909		
0,220	0,8895	0,435	0,9920		

Tabelle VII. Zur Berechnung der Staukurven nach Tolkmitts Formeln (67c) und (67d), S. 132.

$\frac{h}{h_0}$	$F\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{\pi}{4}$	$\frac{h}{h_0}$	$F\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{\pi}{4}$	$\frac{h}{h_0}$	$F\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{\pi}{4}$	$\frac{h}{h_0}$	$F\left(\frac{h}{h_0}\right)+\frac{\pi}{4}$
1,0	— ∞	1,15	0,842	1,35	1,193	1,75	1,685
1,005	— 0,102	1,16	0,865	1,36	1,207	1,80	1,740
1,01	+ 0,074	1,17	0,887	1,37	1,221	1,85	1,795
1,015	0,179	1,18	0,908	1,38	1,235	1,90	1,850
1,02	0,254	1,19	0,928	1,39	1,249	1,95	1,904
1,025	0,313	1,20	0,948	1,40	1,262	2,0	1,957
1,03	0,362	1,21	0,967	1,41	1,276	2,1	2,063
1,035	0,403	1,22	0,985	1,42	1,289	2,2	2,168
1,04	0,440	1,23	1,003	1,43	1,302	2,3	2,272
1,045	0,473	1,24	1,021	1,44	1,315	2,4	2,376
1,05	0,502	1,25	1,038	1,45	1,328	2,5	2,478
1,06	0,554	1,26	1,055	1,46	1,341	2,6	2,581
1,07	0,599	1,27	1,071	1,47	1,354	2,7	2,683
1,08	0,635	1,28	1,087	1,48	1,367	2,8	2,785
1,09	0,675	1,29	1,103	1,49	1,379	2,9	2,886
1,10	0,708	1,30	1,119	1,50	1,392	3,0	2,988
1,11	0,738	1,31	1,134	1,55	1,453	3,5	3,492
1,12	0,766	1,32	1,149	1,60	1,513	4,0	3,995
1,13	0,793	1,33	1,164	1,65	1,571	4,5	4,496
1,14	0,818	1,34	1,178	1,70	1,628	5,0	4,997

Tabelle VIII. Zur Berechnung der Senkungskurven nach Tolkmitts Formel (67d), S. 132.

Die Funktion F weicht von jener der Staukurve ab; doch gilt Gl. (67d) wieder.

$\frac{h}{h_0}$	$F\left(\frac{h}{h_0}\right)$	$\frac{h}{h_0}$	$F\left(\frac{h}{h_0}\right)$	$\frac{h}{h_0}$	$F\left(\frac{h}{h_0}\right)$	$\frac{h}{h_0}$	$F\left(\frac{h}{h_0}\right)$
1,0	∞	0,925	0,260	0,80	0,087	0,65	0,026
0,995	0,894	0,92	0,246	0,79	0,080	0,64	0,024
0,99	0,724	0,915	0,234	0,78	0,074	0,63	0,022
0,985	0,625	0,91	0,223	0,77	0,068	0,62	0,020
0,98	0,556	0,905	0,212	0,76	0,063	0,61	0,018
0,975	0,504	0,90	0,203	0,75	0,058	0,60	0,017
0,97	0,461	0,89	0,185	0,74	0,054	0,55	0,011
0,965	0,426	0,88	0,169	0,73	0,050	0,50	0,006
0,96	0,395	0,87	0,155	0,72	0,046	0,45	0,004
0,955	0,369	0,86	0,142	0,71	0,042	0,40	0,002
0,95	0,346	0,85	0,130	0,70	0,039	0,35	0,001
0,945	0,325	0,84	0,120	0,69	0,036	0,30	0
0,94	0,306	0,83	0,110	0,68	0,033	0	0
0,935	0,289	0,82	0,102	0,67	0,031		
0,93	0,274	0,81	0,094	0,66	0,028		

Tabelle IX. Zur Berechnung der Staukurven nach Bresses Formel (74c), S. 141.

$\frac{h_0}{h}$	$B\left(\frac{h_0}{h}\right)$	$\frac{h_0}{h}$	$B\left(\frac{h_0}{h}\right)$	$\frac{h_0}{h}$	$B\left(\frac{h_0}{h}\right)$	$\frac{h_0}{h}$	$B\left(\frac{h_0}{h}\right)$
0,999	2,1834	0,944	0,8418	0,800	0,4198	0,48	0,1207
0,998	1,9523	0,942	0,8301	0,795	0,4117	0,47	0,1154
0,997	1,8172	0,940	0,8188	0,790	0,4039	0,46	0,1102
0,996	1,7213	0,938	0,8079	0,785	0,3962	0,45	0,1052
0,995	1,6469	0,936	0,7973	0,780	0,3886	0,44	0,1003
0,994	1,5861	0,934	0,7871	0,775	0,3813	0,43	0,0955
0,993	1,5348	0,932	0,7772	0,770	0,3741	0,42	0,0909
0,992	1,4902	0,930	0,7675	0,765	0,3671	0,41	0,0865
0,991	1,4510	0,928	0,7581	0,760	0,3603	0,40	0,0821
0,990	1,4159	0,926	0,7490	0,755	0,3536	0,39	0,0779
0,989	1,3841	0,924	0,7401	0,750	0,3470	0,38	0,0738
0,988	1,3551	0,922	0,7315	0,745	0,3406	0,37	0,0699
0,987	1,3284	0,920	0,7231	0,740	0,3343	0,36	0,0660
0,986	1,3037	0,918	0,7149	0,735	0,3282	0,35	0,0623
0,985	1,2807	0,916	0,7069	0,730	0,3221	0,34	0,0587
0,984	1,2592	0,914	0,6990	0,725	0,3162	0,33	0,0553
0,983	1,2390	0,912	0,6914	0,720	0,3104	0,32	0,0519
0,982	1,2199	0,910	0,6839	0,715	0,3047	0,31	0,0486
0,981	1,2019	0,908	0,6766	0,710	0,2991	0,30	0,0455
0,980	1,1848	0,906	0,6695	0,705	0,2937	0,29	0,0425
0,979	1,1686	0,904	0,6625	0,70	0,2883	0,28	0,0395
0,978	1,1531	0,902	0,6556	0,69	0,2778	0,27	0,0367
0,977	1,1383	0,900	0,6489	0,68	0,2677	0,26	0,0340
0,976	1,1241	0,895	0,6327	0,67	0,2580	0,25	0,0314
0,975	1,1105	0,890	0,6173	0,66	0,2486	0,24	0,0290
0,974	1,0974	0,885	0,6025	0,65	0,2395	0,23	0,0266
0,973	1,0848	0,880	0,5884	0,64	0,2306	0,22	0,0243
0,972	1,0727	0,875	0,5749	0,63	0,2221	0,21	0,0221
0,971	1,0610	0,870	0,5619	0,62	0,2138	0,20	0,0201
0,970	1,0497	0,865	0,5494	0,61	0,2058	0,19	0,0181
0,968	1,0282	0,860	0,5374	0,60	0,1980	0,18	0,0162
0,966	1,0080	0,855	0,5258	0,59	0,1905	0,17	0,0145
0,964	0,9890	0,850	0,5146	0,58	0,1832	0,16	0,0128
0,962	0,9709	0,845	0,5037	0,57	0,1761	0,15	0,0113
0,960	0,9539	0,840	0,4932	0,56	0,1692	0,14	0,0098
0,958	0,9376	0,835	0,4831	0,55	0,1625	0,13	0.0085
0,956	0,9221	0,830	0,4733	0,54	0,1560	0,12	0,0072
0,954	0,9073	0,825	0,4637	0,53	0,1497	0,11	0,0061
0,952	0,8931	0,820	0,4544	0,52	0,1435	0,10	0,0050
0,950	0,8795	0,815	0,4454	0,51	0,1376	0,09	0,0041
0,948	0,8665	0,810	0,4367	0,50	0,1318	0,08	0,0032
0,946	0,8539	0,805	0,4281	0,49	0,1262	0,07	0,0025

Tabelle X. Zur Berechnung der Senkungskurven nach Bresses Formel (74c), S. 141.

$\frac{h}{h_0}$	$B\left(\frac{h_0}{h}\right)$	$\frac{h}{h_0}$	$B\left(\frac{h_0}{h}\right)$	$\frac{h}{h_0}$	$B\left(\frac{h_0}{h}\right)$	$\frac{h}{h_0}$	$B\left(\frac{h_0}{h}\right)$
0,00	— 0,6046	0,44	— 0,1547	0,790	0,3258	0,944	0,8226
0,01	— 0,5946	0,45	— 0,1438	0,795	0,3357	0,946	0,8354
0,02	— 0,5846	0,46	— 0,1327	0,800	0,3459	0,948	0,8487
0,03	— 0,5746	0,47	— 0,1216	0,805	0,3562	0,950	0,8624
0,04	— 0,5646	0,48	— 0,1104	0,810	0,3668	0,952	0,8767
0,05	— 0,5546	0,49	— 0,0991	0,815	0,3776	0,954	0,8916
0,06	— 0,5446	0,50	— 0,0878	0,820	0,3886	0,956	0,9071
0,07	— 0,5346	0,51	— 0,0763	0,825	0,3998	0,958	0,9233
0,08	— 0,5246	0,52	— 0,0647	0,830	0,4114	0,960	0,9402
0,09	— 0,5146	0,53	— 0,0530	0,835	0,4232	0,962	0,9580
0,10	— 0,5046	0,54	— 0,0412	0,840	0,4353	0,964	0,9767
0,11	— 0,4946	0,55	— 0,0293	0,845	0,4478	0,966	0,9965
0,12	— 0,4845	0,56	— 0,0172	0,850	0,4605	0,968	1,0174
0,13	— 0,4745	0,57	— 0,0050	0,855	0,4737	0,970	1,0396
0,14	— 0,4645	0,58	+ 0,0074	0,860	0,4872	0,971	1,0512
0,15	— 0,4545	0,59	+ 0,0199	0,865	0,5012	0,972	1,0632
0,16	— 0,4444	0,60	+ 0,0325	0,870	0,5156	0,973	1,0757
0,17	— 0,4344	0,61	+ 0,0454	0,875	0,5305	0,974	1,0886
0,18	— 0,4243	0,62	+ 0,0584	0,880	0,5459	0,975	1,1020
0,19	— 0,4143	0,63	+ 0,0716	0,885	0,5619	0,976	1,1160
0,20	— 0,4042	0,64	+ 0,0851	0,890	0,5785	0,977	1,1305
0,21	— 0,3941	0,65	+ 0,0987	0,895	0,5958	0,978	1,1457
0,22	— 0,3840	0,66	+ 0,1127	0,900	0,6138	0,979	1,1615
0,23	— 0,3739	0,67	+ 0,1268	0,902	0,6213	0,980	1,1781
0,24	— 0,3638	0,68	+ 0,1413	0,904	0,6289	0,981	1,1955
0,25	— 0,3536	0,69	+ 0,1560	0,906	0,6366	0,982	1,2139
0,26	— 0,3434	0,70	+ 0,1711	0,908	0,6445	0,983	1,2333
0,27	— 0,3333	0,705	+ 0,1787	0,910	0,6525	0,984	1,2538
0,28	— 0,3230	0,710	+ 0,1864	0,912	0,6607	0,985	1,2757
0,29	— 0,3128	0,715	+ 0,1943	0,914	0,6691	0,986	1,2990
0,30	— 0,3025	0,720	+ 0,2022	0,916	0,6776	0,987	1,3241
0,31	— 0,2923	0,725	+ 0,2102	0,918	0,6864	0,988	1,3511
0,32	— 0,2819	0,730	+ 0,2184	0,920	0,6953	0,989	1,3804
0,33	— 0,2716	0,735	+ 0,2266	0,922	0,7045	0,990	1,4125
0,34	— 0,2612	0,740	+ 0,2350	0,924	0,7138	0,991	1,4480
0,35	— 0,2508	0,745	+ 0,2434	0,926	0,7234	0,992	1,4876
0,36	— 0,2403	0,750	+ 0,2520	0,928	0,7332	0,993	1,5324
0,37	— 0,2298	0,755	+ 0,2607	0,930	0,7433	0,994	1,5841
0,38	— 0,2192	0,760	+ 0,2696	0,932	0,7537	0,995	1,6452
0,39	— 0,2086	0,765	+ 0,2785	0,934	0,7643	0,996	1,7200
0,40	— 0,1980	0,770	+ 0,2877	0,936	0,7753	0,997	1,8162
0,41	— 0,1872	0,775	+ 0,2970	0,938	0,7866	0,998	1,9517
0,42	— 0,1765	0,780	+ 0,3064	0,940	0,7982	0,999	2,1831
0,43	— 0,1656	0,785	+ 0,3160	0,942	0,8102	1,000	

Sachregister.

Namenregister.

Gewässerregister.



